Exposé Final

Séminaire des étudiants aux cycles supérieurs en mathématiques

Université du Québec à Montréal

14 déc 2016

Petit Évariste Galois

Aujourd'hui on parlera de Évariste Galois.
Né le 25 octobre 1811.
Mort le 31 mai 1832.

Ça, c'est son histoire.

Aram : choisir quelqu'un.e pour chanter

Petit Évariste Galois

Aram : choisir quelqu'un.e pour chanter
(dans la mélodie de <<Petit Papa Noël>>)

C'est la belle nuit de duel
La gaine étend son épée d'escrime
Et les yeux levés vers l'encrier
A cerveau, les idées à écrire
Avant de fermer le manuscrit
Font une dernière théorie.

Petit Évariste Galois

Aram : choisir quelqu'un.e pour chanter (dans la mélodie de <<Petit Papa Noël>>)

C'est la belle nuit de duel
La gaine étend son épée d'escrime
Et les yeux levés vers l'encrier
A cerveau, les idées à écrire
Avant de fermer le manuscrit
Font une dernière théorie.

Petit Évariste Galois
Quand tu écris tes pensées de fois
Sur les conjectures pas résolu
N'oublie pas les bien connu
Mais avant de partir
Il faudra écrire ta théorie
Il existe pas une solution en radicaux
Pour tous polynômes de degré cinq.

Galois et les mathématiques

Mort en duel à l'âge de 20 ans, Galois a tout de même eu le temps développer quelques théories qui sont à la base de certaines branches des mathématiques modernes.

Par exemple, le résultat suivant :

Galois (1829)

Une équation algébrique est résoluble par radicaux, c'est-à-dire par un nombre fini d'opérations élémentaires sur les coefficients du polynôme, y compris des calculs de racines n^{ime} si et seulement si le groupe des permuations de ses racines est résoluble.

Une équation algébrique est une équation de la forme
$P = Q$
où P et Q sont les polynômes.

Emmy Noether et les mathématiques

Considérée par Einstein comme « le génie mathématique créatif le plus considérable produit depuis que les femmes ont eu accès aux études supérieures », Emmy Noether a développé de larges pans de l'algèbre moderne, ainsi que de la physique mathématique.

Elle a d'ailleurs suivi les traces d'Évariste Galois, en considérant un problème lié à ses théories :

Le *problème inverse de la théorie de Galois* consiste à déterminer s'il existe une extension de corps isomorphe au groupe de Galois (un groupe qui agit sur l'extension tout en fixant le corps initial). Malgré les avancées, c'est un problème qui reste toujours ouvert.

Un exemple de problème relié est la résolution de cette conjecture :

Tout groupe fini est le groupe de Galois d'une extension galoisienne (algébrique, avec des belles propriétés) des nombres rationnels.

PREUVES D'EMMY NOETHER

Selon Wikipédia$^{(*)}$, Emmy Noether est aussi reconnue pour n'avoir jamais formulé ce fameux théorème, qui est en fait le fruit de travaux (indépendants) de nombreux étudiants :

Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $\frac{\sin(x)}{n} = si(x)$.

Un corollaire vient immédiatement d'une réécriture :

Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $\frac{\sin(x)}{n} = 6$.

$^{(*)}$ On y lit aussi que Noether a inventé le parallélogramme.

Rappels

- La constante ω est telle que $\omega e^{\omega} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 8^+} \frac{1}{x-8} = \infty$

Grâce au corollaire, on trouve que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 6^+} \frac{ne^{\omega}}{nx - \sin x} &= \lim_{x \to 6^+} \frac{e^{\omega}}{x - \frac{\sin x}{n}} \\
&= e^{\omega} \lim_{x \to 6^+} \frac{1}{x - 6} \\
&= e^{\omega} \lim_{x \to (3+3)^+} \frac{1}{x - (3+3)} \\
&= e^{\omega}(\omega + \omega) \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Section $9\frac{3}{4}$: Les applications ésotériques des limites

Commençons d'abord par revoir l'exemple de la dernière section et ce qu'il peut nous apprendre sur la vie.

Section $9\frac{3}{4}$: Les applications ésotériques des limites

Commençons d'abord par revoir l'exemple de la dernière section et ce qu'il peut nous apprendre sur la vie.

Exemple

Nous avons calculé que $\lim_{x \to 8^+} \frac{1}{x-8} = \infty$

Section $9\frac{3}{4}$: Les applications ésotériques des limites

Commençons d'abord par revoir l'exemple de la dernière section et ce qu'il peut nous apprendre sur la vie.

Exemple

Nous avons calculé que $\displaystyle\lim_{x\to 8^+} \frac{1}{x-8} = \infty$

Que savons-nous sur ce fameux nombre 8 ?

Section $9\frac{3}{4}$: Les applications ésotériques des limites

Commençons d'abord par revoir l'exemple de la dernière section et ce qu'il peut nous apprendre sur la vie.

Exemple

Nous avons calculé que $\lim\limits_{x \to 8^+} \dfrac{1}{x-8} = \infty$

Que savons-nous sur ce fameux nombre 8 ?

- Sa planète est Saturne et sa constellation, le scorpion ;

Section $9\frac{3}{4}$: Les applications ésotériques des limites

Commençons d'abord par revoir l'exemple de la dernière section et ce qu'il peut nous apprendre sur la vie.

Exemple

Nous avons calculé que $\lim_{x\to 8^+} \frac{1}{x-8} = \infty$

Que savons-nous sur ce fameux nombre 8 ?

- Sa planète est Saturne et sa constellation, le scorpion ;
- Son métal est le plomb et sa pierre, l'onyx noir ;

Section $9\frac{3}{4}$: Les applications ésotériques des limites

Commençons d'abord par revoir l'exemple de la dernière section et ce qu'il peut nous apprendre sur la vie.

Exemple

Nous avons calculé que $\lim_{x \to 8^+} \frac{1}{x-8} = \infty$

Que savons-nous sur ce fameux nombre 8 ?

- Sa planète est Saturne et sa constellation, le scorpion ;
- Son métal est le plomb et sa pierre, l'onyx noir ;
- Sa note musicale est le do de la deuxième octave ;

Section $9\frac{3}{4}$: Les applications ésotériques des limites

Commençons d'abord par revoir l'exemple de la dernière section et ce qu'il peut nous apprendre sur la vie.

Exemple

Nous avons calculé que $\lim_{x \to 8^+} \frac{1}{x-8} = \infty$

Que savons-nous sur ce fameux nombre 8 ?

- Sa planète est Saturne et sa constellation, le scorpion ;
- Son métal est le plomb et sa pierre, l'onyx noir ;
- Sa note musicale est le do de la deuxième octave ;
- Le nombre 8 est la modération, le caducée, la répartition avec justice.

Section $9\frac{3}{4}$: Les applications ésotériques des limites

Commençons d'abord par revoir l'exemple de la dernière section et ce qu'il peut nous apprendre sur la vie.

Exemple

Nous avons calculé que $\lim_{x \to 8^+} \frac{1}{x-8} = \infty$

Que savons-nous sur ce fameux nombre 8 ?

- Sa planète est Saturne et sa constellation, le scorpion ;
- Son métal est le plomb et sa pierre, l'onyx noir ;
- Sa note musicale est le do de la deuxième octave ;
- Le nombre 8 est la modération, le caducée, la répartition avec justice.

Section $9\frac{3}{4}$: Les applications ésotériques des limites

Commençons d'abord par revoir l'exemple de la dernière section et ce qu'il peut nous apprendre sur la vie.

Exemple

Nous avons calculé que $\lim\limits_{x \to 8^+} \dfrac{1}{x-8} = \infty$

Que savons-nous sur ce fameux nombre 8 ?

- Sa planète est Saturne et sa constellation, le scorpion ;
- Son métal est le plomb et sa pierre, l'onyx noir ;
- Sa note musicale est le do de la deuxième octave ;
- Le nombre 8 est la modération, le caducée, la répartition avec justice.

Que signifie alors la limite vers 8^+ ?

Section $9\frac{3}{4}$: Géométrie euclidienne des reliques de la mort

Concentrons nous plus particulièrement sur ce symbole :

Section $9\frac{3}{4}$: Géométrie euclidienne des reliques de la mort

Concentrons nous plus particulièrement sur ce symbole : 

Section $9\frac{3}{4}$: Géométrie euclidienne des reliques de la mort

Concentrons nous plus particulièrement sur ce symbole : 

Theorem

Les serpentards sont les meilleurs.

Section $9\frac{3}{4}$: Géométrie euclidienne des reliques de la mort

Concentrons nous plus particulièrement sur ce symbole : 

Theorem

Les serpentards sont les meilleurs.

Démonstration.

La droite est à la fois médiane, médiatrice, hauteur et bissectrice du triangle, mais aussi diamètre du cercle !

Section $9\frac{3}{4}$: Géométrie euclidienne des reliques de la mort

Concentrons nous plus particulièrement sur ce symbole : 

Theorem

Les serpentards sont les meilleurs.

Démonstration.

La droite est à la fois médiane, médiatrice, hauteur et bissectrice du triangle, mais aussi diamètre du cercle ! Ce cercle est lui même tangent au triangle.

Section $9\frac{3}{4}$: Géométrie euclidienne des reliques de la mort

Concentrons nous plus particulièrement sur ce symbole : 

Theorem

Les serpentards sont les meilleurs.

Démonstration.

La droite est à la fois médiane, médiatrice, hauteur et bissectrice du triangle, mais aussi diamètre du cercle ! Ce cercle est lui même tangent au triangle. La position des 3 formes est la clef de cette démonstration. En effet,

Section $9\frac{3}{4}$: Géométrie euclidienne des reliques de la mort

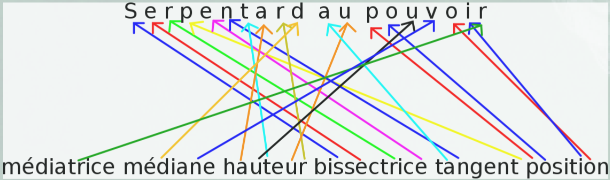
Concentrons nous plus particulièrement sur ce symbole : 

Theorem

Les serpentards sont les meilleurs.

Démonstration.

La droite est à la fois médiane, médiatrice, hauteur et bissectrice du triangle, mais aussi diamètre du cercle ! Ce cercle est lui même tangent au triangle. La position des 3 formes est la clef de cette démonstration. En effet,



Les sordides membres de Serpentar ont utilis de faccon perverses la géomtrie Euclidienne pour montrer qu'ils étaient les meilleurs. Il est tant de rétablir la vérité. C'est pourquoi moi : Dumbeldore et mon ami Gandalf le blanc avons décidé de dévoiler notre ultime arme magique :

La gémétrie Gandalfbeldorienne

La géométrie Gandalfbeldorienne

Celle ci sera utilisée afin de montrer que notre ami Christophe Reutappotter n'a pas bien compris la beauté de la suite de Fibonacci qui conjecture un magnifique théorème aux applications spectaculaires.

Theorem

Le cercle est une droite double

Démonstration.

Dans notre géomtrie nous partons du principe que si nous pensons à quelque chose c'est que ceci a du sens et puisque tout ce qui a du sens est mathématiquement **CORREC** nous axiomatiserons que tout ce que nous disons (Gandalf et moi) est vrai. Quiconque en douterait se verrait châtier de la pire des faccons en devant lire l'oeuvre intégrale de Bourbaki.

Puisque nous sommes deux à établir ce théorème il est tout naturel d'avoir la relation suivante :

$$x^2 + y^2 = 1 \Longleftrightarrow (x + y)^2 = 1$$

Dès lors on voit bien que le cercle est une droite double, cette notion se nomme variété Gandalfbeldorienne. $\square$

La géométrie Gandalfbeldorienne

Corollaire

Les fleurs de Tournesols sont droites et leur nombre de pétales est pair.

Démonstration.

Dans le monde des Moldus les fleurs de Tournesols sont délimitées par un cercle. Notons n le nombre de pétales d'une fleur de Tournesol. On sait par le théorème précédant que les cercles sont des droites doubles. Alors il vient que les fleurs de Tournesols sont droites. De plus comme cette droite est double il y a $2n$ pétales. $\square$

La géométrie Gandalfbeldorienne

Corollaire

le Château de Moulinsart a un jardin parfaitement symétrique.

Démonstration.

Tournesol est un grand ami de Tintin et du capitaine Haddock, tous deux résidant au château de Moulinsart. Il se trouve que le jardinier titulaire du château s'est vu offert un poste dans une prestigieuse équipe de hockey sur glace au Canada à Montréal, et par souci de confidentialité nous ne dirons pas le nom de cette équipe. Par conséquent le capitaine a gentiment proposé à son ami Tournesol, grand passionné de botanique, de laisser libre place à son imagination et sa science afin de re-décorer le parc du château. Puisque les fleurs de Tournesols sont droites est on un nombre de pétales pair il est tout naturel de dire que ce jardin est parfaitement symétrique. □

Distance magique et applications

En plus de démontrer que Christophe Reutappotter à tort, l'axiomatique Gandalfbeldorienne nous permet aussi de définir une notion de distance sur la variété du même nom.

Definition

Soit a et b sur une variété Gandalfbeldorienne, alors on définit la distance magique

$$d(a, b) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \text{ et } b \text{ possèdent des cheminés} \\ |a| + |b| & \text{sinon} \end{cases}$$

On peut facilement se convaincre que d respecte les axiomes d'une distance.

On a donc le théorème suivant

Distance magique et applications

En plus de démontrer que Christophe Reutappotter à tort, l'axiomatique Gandalfbeldorienne nous permet aussi de définir une notion de distance sur la variété du même nom.

Definition

Soit a et b sur une variété Gandalfbeldorienne, alors on définit la distance magique

$$d(a, b) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \text{ et } b \text{ possèdent des cheminés} \\ |a| + |b| & \text{sinon} \end{cases}$$

On peut facilement se convaincre que d respecte les axiomes d'une distance.
On a donc le théorème suivant

Theorem

$$\textit{Campus des sciences} = \textit{Poudlard}$$

Distance magique et applications

Theorem

$$\textit{Campus des sciences} = \textit{Poudlard}$$

Démonstration.

On note d'abord que la campus possède une immense cheminée en son centre. Aussi, dans *Some Solvability Results for Combinatorially Hogwarts Trivial Planes*, Granger démontre que Poudlard possède une cheminée. On a donc

$$d_{🪄}(\text{Campus des sciences}, \text{Poudlard}) = 0$$

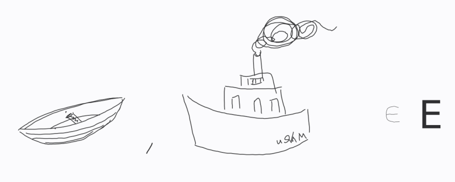
Comme $d_{🪄}$ est une distance, on a donc

$$\text{Campus des sciences} = \text{Poudlard}$$

$\square$

Soit (E, d) un espace métrique si E est l'univers et d une distance sur E.

Exemple



On a que $d(\textit{le canot}, \textit{le bateau}) \neq 0$, *et rappelle que* $|a| =$ *Le nombre de lettres dans 'a' sans article définis. Donc,* $|\textit{canot}| = 5$ *et* $|\textit{bateau}| = 6$. *Alors,* $d(\textit{le canot}, \textit{le bateau}) = 11$.

Il est trivial de vérifier que cette métrique est équivalente à celle de $\mathbb{R}^n$.

Théorème

L'univers est holistique
(i.e. l'ensemble est plus grand que la somme de ses parties).

• La distance vue est une distance discrète, donc les ouverts sont également des fermées.
• Il est possible de recouvrir entièrement l'espace de boules ouvertes disjointes (respectivement de boules fermées disjointes).
• Par le paradoxe Banach-Tarski, nous pouvons doubler chacune des boules fermées.
Donc nous pouvons doubler l'univers. D'où le résultat

Est-ce que toutes parties de l'univers à la même propriété ?

Voici un chat.

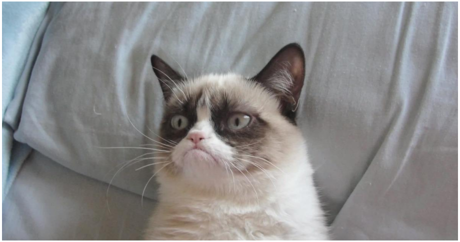
Voici un chat.

Il est mignon

Voici un chat.

Elle aussi.

Voici un chat.



Mais pas lui.

Maintenant reprenons

Petit Évariste Galois

Aujourd'hui on a parlé de Évariste Galois.
Né le 25 octobre 1811.
Mort le 31 mai 1832.

Ça, c'était son histoire.

Un gros merci à toutes et tous qui sont participé ! ! !