

Placements de tours sur les diagrammes de permutations

5 août 2014

Résumé

Le problème des placements de tours consiste à compter le nombre de manières de placer k tours sur un échiquier sans que les tours ne puissent s'attaquer entre elles. L'échiquier peut être de dimension et de forme arbitraire. On revisitera quelques résultats classiques sur les placements de tours, notamment ceux de Foata et Schützenberger d'une part, et ceux de Goldman, Joichi et White d'autre part. On abordera ensuite la question des diagrammes de permutations comme généralisation des diagrammes de Ferrers. Si le temps le permet, on verra une application des placements de tours au problème des dérangements.

Plan

1	Définitions & motivations	1
2	Classification des diagrammes de Ferrers et lien avec la coloration des graphes	2
3	Diagrammes de permutation	5
4	Les placements de tours et les dérangements	7

1 Définitions & motivations

La théorie des placements de tours (*Rook theory*) vise à développer des outils pour étudier les permutations partielles avec restrictions. Cette théorie permet de développer des solutions élégantes à certains problèmes combinatoires, notamment le problème des dérangements. La théorie des placements de tours a aussi certaines applications en algèbre linéaire, notamment pour énumérer des matrices de rang fixé sur le corps fini \mathbb{F}_q .

Commençons par donner quelques définitions :

Définition 1 (Permutations, permutations partielles). *Une permutation est une bijection d'un ensemble fini S vers lui-même. Comme S est fini, on peut le mettre en bijection avec $[n]$ et considérer, sans perte de généralité que $S = [n]$.*

On généralise la notion de permutation par celle de permutation partielle en prenant deux sous-ensembles $S_1, S_2 \subseteq S$ qui satisfont $\#S_1 = \#S_2$. Une permutation partielle est une bijection de S_1 vers S_2 . Si $\#S_1 = k$, alors on dit qu'une bijection de S_1 vers S_2 est une permutation partielle de k éléments sur S . La restriction $S_1 = S_2 = S$ nous ramène à la notion de permutation.

Définition 2 (Échiquier, placement de tours). *Un échiquier B est un sous-ensemble arbitraire de la grille $[n] \times [n]$. Un placement de k tours sur B est une permutation partielle σ de k éléments sur $[n]$ satisfaisant $(i, \sigma(i)) \in B$ pour tout élément i du domaine de σ . L'ensemble des placements de k tours sur B est noté $R_k(B)$ et on note $r_k(B) = \#R_k(B)$.*

Définition 3 (Polynôme caractéristique et équivalence des échiquiers). *Le polynôme caractéristique d'un échiquier B est donné par*

$$\chi_B(x) = \sum_{k \geq 0} r_k(B)(x)_{n-k}.$$

où $(x)_j$ désigne la fonction factorielle décroissante d'indice j , c-à-d le produit $x(x-1) \dots (x-j+1)$.

On dit que deux échiquiers B et C sont équivalents (noté $B \sim C$) si $r_k(B) = r_k(C)$ pour tout entier k . De manière équivalente, $B \sim C$ si et seulement si $\chi_B = \chi_C$.

2 Classification des diagrammes de Ferrers et lien avec la coloration des graphes

La *Rook theory* classique s'est développée en réponse à une question de John Riordan (*An Introduction to Combinatorial Analysis*, 1958) : quand deux échiquiers sont-ils équivalents ?

Les travaux de Foata et Schützenberger, puis ceux de Goldman, Joichi et White ont permis de classer les diagrammes de Ferrers. Donnons-en une définition formelle :

Définition 4. *Un échiquier B est un diagramme de Ferrers s'il satisfait les deux conditions suivantes :*

1. *B est triangulaire supérieur, c-à-d $(i, j) \in B$ seulement si $i < j$;*
2. *si $(i, j) \in B$, alors $(i, l) \in B$ pour $j \leq l \leq n$ et $(k, j) \in B$ pour $1 \leq k \leq i$.*

Dans les faits, un diagramme de Ferrers est le diagramme d'une partition. Par convention on choisit de le placer dans le coin supérieur droit de la grille $[n] \times [n]$ (notation non-standard).

Foata et Schützenberger ont publié en 1970 le résultat suivant dans [1] :

Théorème 1 (Foata et Schützenberger, 1970). *Tout diagramme de Ferrers B est équivalent à un unique diagramme de Ferrers croissant (c-à-d qu'aucune ligne n'a autant d'éléments que la ligne précédente, sauf pour les lignes vides).*

En 1975, Goldman, Joichi et White publiaient le résultat suivant (voir [2]), qui permet de donner une démonstration simple du théorème précédent ainsi qu'une construction du diagramme de Ferrers croissant équivalent à un diagramme de Ferrers donné :

Théorème 2 (Goldman, Joichi, White, 1975). *Soit c_i le nombre de cases dans la i^e ligne d'un diagramme de Ferrers $B \subset [n] \times [n]$. Alors :*

$$\chi_B(x) = \prod_{i=1}^n (x + c_i - n + i).$$

Démonstration. Notons par $[a, b]$ l'ensemble $\{i \in \mathbb{N} : a \leq i \leq b\}$. On suppose que $x \in \mathbb{N}$ et on montre que les deux membres de l'équation dénombrent la même chose.

Soit $B' = B \cup [n] \times [n+1, x]$. On peut calculer $r_n(B')$ en utilisant deux méthodes différentes :

Méthode 1 : On peut écrire $R_n(B')$ comme l'union disjointe d'ensembles $R_{n,k}(B')$, où $R_{n,k}(B')$ désigne l'ensemble des placements de n tours sur B' avec k tours sur B . Fixons k . Pour choisir un élément $R \in R_{n,k}(B')$, il faut d'abord placer k tours sur B de $r_k(B)$ manières, avant de placer les $n-k$ tours restantes sur un rectangle de taille $n-k \times x$, de $(x)_{n-k}$ façons, d'où

$$r_n(B') = \#R_n(B') = \# \bigsqcup_{k \geq 0} R_{n,k}(B') = \sum_{k \geq 0} \#R_{n,k}(B') = \sum_{k \geq 0} r_k(B)(x)_{n-k}.$$

Méthode 2 : Comme B' est aussi le diagramme d'une partition, ses lignes sont ordonnées par inclusion de bas en haut. Prenons la ligne i et supposons qu'on a placé des tours sur les $n-i$ lignes du bas. Il nous reste alors $x + c_i - n + i$ choix pour placer une tour sur cette ligne. En prenant le produit sur toutes les lignes, on obtient

$$r_n(B') = \prod_{i=1}^n (x + c_i - n + i),$$

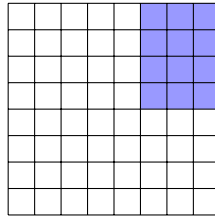
tel que désiré. □

Corollaire 1. *Pour tout diagramme de Ferrers $B \subset [n] \times [n]$, le multi-ensemble $\{c_i - n + i\}$ caractérise la classe d'équivalence de B . De plus, on peut trouver le diagramme de Ferrers croissant équivalent à B en ordonnant les éléments de $\{c_i - n + i\}$ de la manière suivante :*

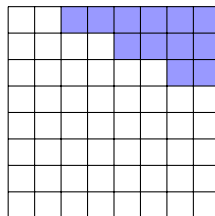
1. écrire la plus longue séquence strictement décroissante ;
2. placer le reste des éléments en ordre croissant.

On obtient la taille des lignes du diagramme de Ferrers croissant (de bas en haut) en ajoutant $i-1$ au i^e élément de la liste.

Exemple 1. Prenons le diagramme de Ferrers suivant :



Le multi-ensemble correspondant est $\{0, -1, -1, -2, -2, -3, -3, -4\}$. On ordonne le multi-ensemble tel que spécifié dans le corollaire pour obtenir la liste $(0, -1, -2, -3, -4, -3, -2, -1)$. En rajoutant $n-i$ à tous les éléments de la liste, on obtient la liste $(0, 0, 0, 0, 2, 4, 6)$, qui correspond au diagramme :



Le polynôme caractéristique des deux échiquiers est

$$\chi(x) = x(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2(x-4).$$

Avec un peu d'aide de l'algèbre linéaire, on peut écrire le polynôme dans la base factorielle décroissante :

$$\chi(x) = (x)_8 + 12(x)_7 + 24(x)_6 + 36(x)_5,$$

ce qui nous donne directement le nombre de placement de tours sur nos échiquiers. Par exemple, il y a 36 permutations partielles de 3 éléments sur l'ensemble [8] qui satisfont la contrainte représentée par nos échiquiers.

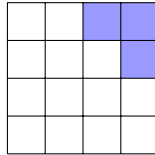
Un second résultat majeur a aussi été donné par Goldman, Joichi et White en 1975 (voir [3]) :

Théorème 3 (Goldman, Joichi, White, 1975). *Si un échiquier B est triangulaire supérieur et transitif (c-à-d $(i, j), (j, k) \in B \Rightarrow (i, k) \in B$), alors on peut construire un graphe $\Gamma(B)$ dont le polynôme chromatique est égal au polynôme caractéristique de B .*

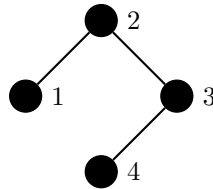
Le théorème se base principalement sur une bijection entre les placements de tours et des partitions des sommets de $\Gamma(B)$ qui satisfont qu'aucun des sous-graphes engendrés n'a d'arêtes. Une telle partition est appelée partition propre du graphe. Étant donné que n'importe quel k coloration d'un graphe représente une k partition propre de ce graphe, le polynôme chromatique peut s'écrire en terme de ces partitions.

La construction du graphe $\Gamma(B)$ et la preuve étant assez technique, on illustre la bijection (quand-même jolie) par un exemple simple :

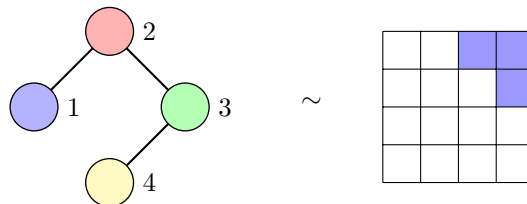
Example 2. Soit $B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 4)\}$, c'est-à-dire :



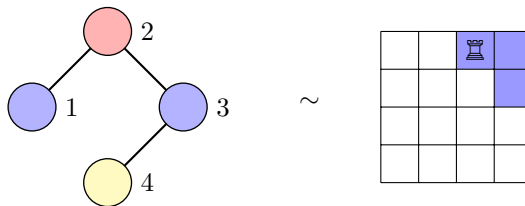
Le graphe $\Gamma(B)$ a comme ensemble de sommets $\{1, 2, 3, 4\}$ et comme arêtes tous les points $(i, j) \notin B$ tels que $i < j$, c'est-à-dire $\{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$. Le graphe ressemble à



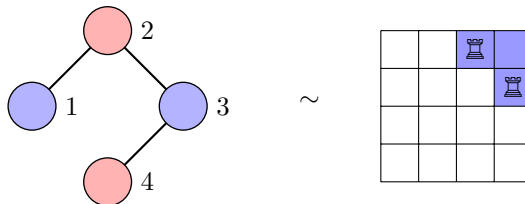
À un placement de k tours sur B , on associe un partitionnement des sommets de $\Gamma(B)$ en $n - k$ parties avec la règle que si une tour est placée sur la case (i, j) , alors les sommets i et j sont dans la même part. Le placement de tour vide $\emptyset \in R_0(B)$ nous donne la partition triviale :



Ajouter une tour sur la case (1, 3) est associé à la partition suivante de $\Gamma(B)$, en 3 parts :



Enfin, en ajoutant une seconde tour sur la case (2, 4), on obtient une partition de $\Gamma(B)$ en deux parts :



Étant donné qu'il s'agit du seul placement de 2 tours sur B , il s'agit aussi de la seule partition de $\Gamma(B)$ en 2 parts. De plus, on remarque qu'il est impossible de partitionner $\Gamma(B)$ en 1 part, de même qu'il est impossible de placer 3 tours sur B .

Ce théorème permet de donner certaines propriétés du polynôme caractéristique d'un échiquier triangulaire supérieur et transitif. Par exemple, si un entier k en est une racine, alors tous les éléments de l'ensemble $[k]$ en sont aussi des racines. De plus, 0 en est toujours une racine.

3 Diagrammes de permutation

Maintenant que les diagrammes de Ferrers sont complètement classifiés, on veut pouvoir développer des méthodes qui s'appliquent à des familles plus larges d'échiquiers. Un bon candidat est le diagramme de permutation :

Définition 5 (Diagramme d'une permutation). *Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Alors le diagramme Sud-Ouest (ou simplement diagramme) de σ est un échiquier $D_\sigma \subset [n] \times [n]$:*

$$D_\sigma = \{(i, \sigma_j) : i < j, \sigma_i < \sigma_j\}.$$

On l'obtient en traçant des équerres Sud-Ouest à partir des points $(i, \sigma(i))$ en notation matricielle.

Les diagrammes de permutations admettent les propriétés suivantes :

1. tous les diagrammes de Ferrers sont des diagrammes de permutations ;
2. D_σ est toujours transitif, et on peut facilement le rendre triangulaire supérieur ;
3. le graphe $\Gamma(D_\sigma)$ est en fait isomorphe au graphe d'inversion de σ ;
4. la plus grande partie des permutations n'ont pas pour diagramme un diagramme de Ferrers.

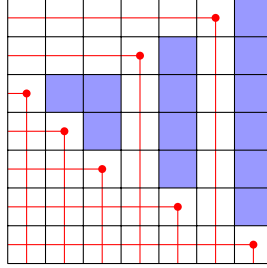


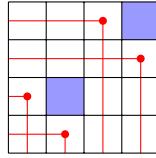
FIGURE 1 – Diagramme d'une permutation covexillaire non-dominante.

Il est même possible de montrer que le fait d'être triangulaire supérieur n'est plus nécessaire dans le cas des diagrammes de permutations.

Une première généralisation naturelle des diagrammes de Ferrers en terme des diagrammes de permutations requiert la définition suivante :

Définition 6. Une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est dite covexillaire si ses lignes peuvent être totalement ordonnées par inclusion. Si D_σ est un diagramme de Ferrers, alors on dit que σ est dominante.

L'exemple par excellence d'une permutation non-covexillaire est le suivant :



Une permutation covexillaire non-dominante est illustrée à la figure 1.

Le résultat de Goldman, Joichi et White concernant la factorisation du polynôme caractéristique des diagrammes de Ferrers peut facilement être généralisée à tous les diagrammes covexillaires. On peut de même montrer que tout diagramme covexillaire est équivalent à un unique diagramme de Ferrers croissant, et il n'est pas difficile de construire la permutation dominante correspondante. Fait intéressant : si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est covexillaire, la permutation dominante croissante équivalente à σ peut toujours être construite dans \mathfrak{S}_n . Cela motive la définition suivante :

Définition 7. L'ensemble \mathcal{R}_n désigne le quotient de l'ensemble des permutations \mathfrak{S}_n par l'équivalence des diagrammes de permutations. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, alors $[\sigma] \in \mathcal{R}_n$ désigne la classe de σ .

On ne connaît aucune formule pour $\#\mathcal{R}_n$. Néanmoins, on peut donner le résultat suivant :

Proposition 1. Soit $\mathcal{F}_n = \{[\sigma] \in \mathcal{R}_n : \sigma \text{ est dominante}\}$. Alors $\#\mathcal{F}_n = 2^{n-1}$.

Démonstration. On sait, par le théorème de Foata et Schützenberger, qu'il nous suffit de montrer qu'il existe 2^{n-1} permutations dominantes croissantes. Une permutation est dominante croissante si son diagramme est un diagramme de Ferrers dans $[n] \times [n]$.

Soit $B \subset [n] \times [n]$ un diagramme de Ferrers avec k lignes non-vides. Par définition, $0 \leq k \leq n-1$. Choisir un tel diagramme B revient à choisir les k colonnes parmi les $n-1$ colonnes possibles pour

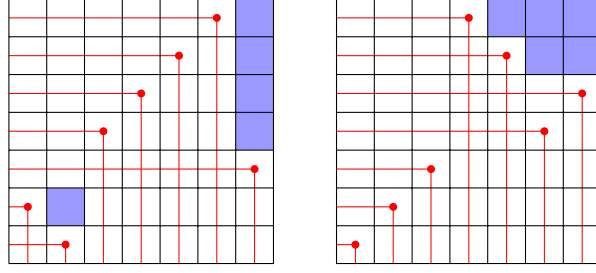


FIGURE 2 – Une permutation non-covexillaire et une permutation dominante croissante peuvent être équivalentes.

lesquelles B est croissant, pour un total de $\binom{n-1}{k}$ choix. En prenant la somme pour toutes les valeurs de k , on obtient

$$\#\mathcal{F}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = 2^{n-1}.$$

□

Ceci étant fait, on peut se demander s'il existe, dans ces classes dominantes, des éléments non-covexillaires. La réponse est non si $n \leq 6$. Toutefois, pour $n \geq 7$, on voit apparaître ce qu'on appelle les *classes mixtes*, qui contiennent un représentant dominant croissant, mais aussi certaines permutations pour lequel le théorème de factorisation de Goldman, Joichi et White ne s'applique pas. Un exemple est donné à la figure 2. L'existence de ces classes est en elle-même assez surprenante, et soulève la question suivante (toujours sans réponse) : comment peut-on donner déterminer si le polynôme caractéristique d'une permutation non-covexillaire se factorise entièrement dans \mathbb{N} ?

4 Les placements de tours et les dérangements

Pour aborder le problème des dérangements en utilisant la théorie des placements de tours, nous avons besoin de la définition suivante :

Définition 8. Soit $B \subseteq [n] \times [n]$ un échiquier. On définit l'ensemble

$$H_k(B) = \{R \in R_n([n] \times [n]) : \#(R \cap B) = k\},$$

c'est-à-dire l'ensemble des placements de n tours sur $[n] \times [n]$ dont k tours sont sur B . On notera $h_k(B) = \#H_k(B)$.

Le théorème suivant, tiré du livre *Enumerative Combinatorics* de Richard Stanley, permet de lier $h_k(B)$ avec $r_k(B)$:

Théorème 4 (Stanley). Pour tout échiquier B :

$$\sum_{k \geq 0} h_k(B) x^k = \sum_{k \geq 0} r_k(B) (x-1)^k (n-k)!$$

Preuve (idée). Les deux membres de l'équation comptent le nombre de manières de placer n tours sur $[n] \times [n]$ et de colorier celles sur B avec x couleurs. \square

Corollaire 2. Soit D_n le nombre de permutations de \mathfrak{S}_n sans points fixes. Alors

$$D_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k (n-k)! \binom{n}{k}. \quad (1)$$

Démonstration. Soit $B = \{(i, i) : i \in [n]\}$. Alors $h_0(B)$ représente le nombre de permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ pour lesquelles $(i, \sigma(i)) \notin B$, autrement dit le nombre de permutations qui satisfont $i \neq \sigma(i)$. En conséquence $D_n = h_0(B)$.

De plus, placer k tours sur B revient à choisir k cases sur la diagonale, d'où $r_k(B) = \binom{n}{k}$ si $0 \leq k \leq n$, et $r_k(B) = 0$ sinon. Par le théorème précédent :

$$\sum_{k \geq 0} h_k(B) x^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x-1)^k (n-k)!$$

En posant $x = 0$, on obtient alors

$$D_n = h_0(B) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (n-k)!,$$

tel que désiré. \square

Références

- [1] D. Foata and M. P. Schützenberger. On the rook polynomials of Ferrers relations. In *Combinatorial theory and its applications, II (Proc. Colloq., Balatonfüred, 1969)*, pages 413–436. North-Holland, Amsterdam, 1970.
- [2] Jay R. Goldman, J. T. Joichi, and Dennis E. White. Rook theory. i. : Rook equivalence of ferrers boards. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 52(1) :pp. 485–492, 1975.
- [3] Dennis E. White Jay R. Goldman, J. T. Joichi. Rook polynomials and the chromatic structure of graphs. *Journal of combinatorial theory*, 1975.