

Devoir 2

à remettre le 5 déc 2017

Points Total : 80

Pour les étudiants dont le code permanent est entre **BER** et **BOU**.

- (i) Aucun travail rédigé au crayon plomb ne sera corrigé.
- (ii) Il faut bien écrire votre réponse (*e.g.* sans trop de ratures).
- (iii) Si vous voulez transmettre votre devoir par courriel, il faut envoyer le fichier en format PDF. Aucun scan ni document *Word* ne sera accepté.
- (iv) Vous remettez une copie par personne.

Exercice 1 (10 points) Soit la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & -2 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & -4 & 8 & -12 & -4 \\ -2 & 0 & -3 & 2 & -4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 4 \\ 5 & -5 & 20 & 0 & 15 & 10 & 15 \end{bmatrix}$$

Calculer le déterminant de A .

Exercice 2 Soit la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -5 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

et considérer le système d'équations linéaires suivant

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ -2 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

- (i) **(3 points)** Calculer le déterminant de A .
- (ii) **(6 points)** Calculer l'inverse de A à l'aide de la matrice adjointe.
- (iii) **(6 points)** Calculer la solution du système d'équations linéaires à l'aide de la règle de Cramer.

Exercice 3 Fixons une base orthonormée $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3}\}$ de l'espace E^3 orientée selon la règle de la main droite. Supposons que vous êtes au point $P = (0, 1, 2)$ et que vous trouvez une carte au trésor. Vous ouvrez la carte et les deux points suivants sont écrits à l'intérieur :

$$Q = (1, 1, 3) \quad \text{et} \quad R = (1, 0, 2).$$

En-dessous des points, les instructions suivantes sont écrites :

- (i) **(2 points)** Bienvenue à Eruban ! Il y a un gros trésor dans notre terre, mais il vous faut le trouver. Pour le trouver, vous devez savoir la distance entre vous et notre origine $(0, 0, 0)$. Calculer la longueur $\|\overrightarrow{OP}\|$ du vecteur \overrightarrow{OP} .

- (ii) **(4 points)** Quand vous avez trouvé la distance, traversez le champs devant vous et allez au point Q . Pour y aller, il vous faut calculer l'angle entre les vecteurs \overrightarrow{OP} et \overrightarrow{OQ} et calculer le vecteur $\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$ entre les deux points.
- (iii) **(2 points)** Quand vous êtes arriver au point Q , il faut aller au point R . Ainsi, il vous faut calculer le scalaire η tel que le vecteur $\overrightarrow{OP} + \eta\overrightarrow{OQ}$ est perpendiculaire au vecteur \overrightarrow{OR} .
- (iv) **(4 points)** Alors, on y va au point R ! Mais quand vous tournez vers R , vous apercevez un grand lac au travers de votre chemin! Pour le traverser, il faut construire un plan sur lequel vous pourrez marcher. Donner l'équation du plan Π_{PQR} passant par les trois points P , Q et R en utilisant le produit vectoriel.
- (v) **(2 points)** Après avoir construire le plan Π_{PQR} , vous pouvez enfin traverser le lac et vous êtes au point R . Quand vous arrivez au point R , la carte change! Toutes les instructions disparaissent et elles sont remplacées par la phrase "le trésor est au point S " :

$$S = (4, 0, 2)$$

Vous espérez que le point S se trouve sur le plan que vous avez construit. Est-ce que le point S appartient au plan Π_{PQR} ?

- (vi) **(4 points)** Alors, il faut y aller! Déterminer les équations paramétriques de l'unique droite Δ_{RS} passant par les deux points R et S .
- (vii) **(2 points)** Finalement, allez au point S ! Là vous utilisez votre pelle pour creuser. Après quelques minutes, vous trouvez le trésor de Eruban! Vous gagnez 2 points pour avoir essayé chaque partie de cette question.

Exercice 4 (3 points chaque) Les sous-ensembles suivants de $V = \mathbb{R}_\ell^4$ sont-ils des sous-espaces de V ? Pourquoi?

- (i) $U = \{[0 \ 0 \ 0 \ 0]\}$
- (ii) $U = \{[x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4] \mid x_2x_3 = x_1\}$
- (iii) $U = \{[x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4] \mid x_1^2 = 2x_4\}$
- (iv) $U = \{[x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4] \mid x_1 = x_2 + x_4\}$
- (v) $U = \{[x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4] \mid x_1 = x_2 + x_3, x_2 = 3x_4\}$

Exercice 5 (5 points chaque) Soit les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ -1 & 3 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 6 & -8 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & -8 \\ 2 & -1 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \end{bmatrix}$$

Donner le noyau de A dans \mathbb{R}_ℓ^4 et le noyau de B dans \mathbb{R}_ℓ^4 .

Exercice 6 (10 points) Déterminer si les vecteurs suivants forment une base de \mathbb{R}_ℓ^4 .

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ -4 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix}$$