

Exercices 4

by Aram Dermenjian

26 septembre 2017

Un exercice marqué du symbole \star est considéré comme plus difficile et ne sera pas une question d'examen. Un exercice marqué du symbole \dagger est trouvé dans les notes du cours.

Exercice 1 Donner la matrice élémentaire $E_5(\mathcal{O}_p)$ pour les opérations élémentaires suivants :

- (i) $\mathcal{O}_p = L_1 \leftarrow 2L_1$
- (ii) $\mathcal{O}_p = L_3 \leftarrow -L_3$
- (iii) $\mathcal{O}_p = L_2 \leftrightarrow L_4$
- (iv) $\mathcal{O}_p = L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1$
- (v) $\mathcal{O}_p = L_2 \leftarrow L_2 + 5L_4$
- (vi) $\mathcal{O}_p = L_1 \leftarrow L_1 + xL_5$

Exercice 2 Donner l'opération élémentaire pour les matrices élémentaires suivantes :

$$(i) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(ii) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(iii) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(iv) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 3 Écrire les matrices suivantes comme un produit de matrices élémentaires :

$$(i) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{bmatrix}$$

$$(ii) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(iii) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice 4 (\dagger) Pour chacune des matrices carrées suivantes, déterminer si elle est inversible ou pas et si elle est inversible, calculer son inverse.

$$(i) \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 7 \\ 1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(ii) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(iii) \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(iv) \begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 5 Les matrices suivantes, sont-elles inversibles? Si oui, calculer leur inverse.

$$(i) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(ii) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(iii) \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(iv) \star \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{bmatrix}$$

$$(v) \star \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & \cdots & d_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & d_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ d_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(vi) \star \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(vii) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & b \end{bmatrix}$$

$$(viii) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(ix) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(x) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 6 (★) Montrer que si la matrice symétrique A a un inverse, alors A^{-1} est aussi symétrique.

Exercice 7 (†) À partir de la matrice des transactions intersectorielles donnée dans le tableau ci-dessous pour une économie constituée de 3 secteurs :

Vente de	à	Secteur 1	Secteur 2	Secteur 3	Demande des ménages	Ventes totales
Secteur 1		20	30	10	40	100
Secteur 2		10	50	40	100	200
Secteur 3		20	80	50	50	200

- Calculer la matrice des coefficients techniques A .
- Calculer la matrice $E = (I_3 - A)^{-1}$ des effets.
- Évaluer l'effet d'un accroissement de 1 unité la demande des ménages pour chacun des secteurs sur les ventes totales.

Exercice 8 À partir de la matrice des transactions intersectorielles donnée dans le tableau ci-dessous pour une économie constituée de trois secteurs :

Vente de	à	Secteur 1	Secteur 2	Secteur 3	Demande des ménages	Ventes totales
Secteur 1		80	160	0	160	400
Secteur 2		40	40	20	300	400
Secteur 3		0	40	10	50	100

- Déterminer la matrice A des coefficients techniques de production ;
- Calculer la matrice E des effets directs et indirects, par dollar de demande finale
- Quel est le secteur pour lequel l'augmentation de la demande a le plus grand impact sur l'économie ?