

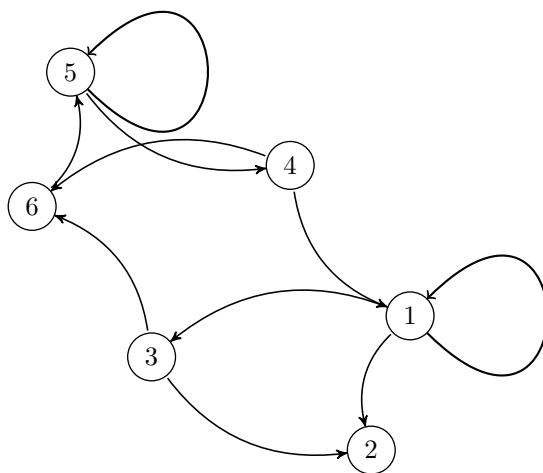
Exercices 2

by Aram Dermenjian

12 septembre 2017

Un exercice marqué du symbole \star est considéré comme plus difficile et ne sera pas une question d'examen. Un exercice marqué du symbole \dagger est trouvé dans les notes du cours.

Exercice 1 (\dagger) Soit le graphe orienté Γ suivant :



- (i) Déterminer la matrice d'adjacence $M = M(\Gamma)$ de ce graphe.
- (ii) Calculer M^4 et vérifier que l'entrée à la ligne 5 et à la colonne 5 de M^4 correspond bien au nombre de chemins de longueur 4 allant du sommet 5 au sommet 5 dans le graphe Γ en énumérant tous ces chemins.
- (iii) Calculer M^6 et vérifier que l'entrée à la ligne 5 et à la colonne 2 de M^6 correspond bien au nombre de chemins de longueur 6 allant du sommet 5 au sommet 2 dans le graphe Γ en énumérant tous ces chemins.

Exercice 2 Soit Γ le graphe dont la matrice d'adjacence est donnée par

$$M(\Gamma) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- (i) Dessiner le graphe Γ
- (ii) Combien y a-t-il de chemins de longueur 3 entre chaque couple (i, j) de sommets?

Exercice 3 Donner les formes matricielles des systèmes d'équations linéaires suivants :

- (i) $2x_1 + 3x_2 = 9$
 $x_1 - x_2 = 1$
- (ii) $x_1 + x_3 = 5$
 $x_2 - x_4 = 7$
- (iii) $2x_1 + 3x_2 = 12$
 $x_1 = 5$
- (iv) $3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 27$
 $2x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 27x_4 - 3x_5 = 12$
 $3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 19x_5 = -11$
 $-2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 3$
 $x_1 - 3x_2 + x_3 = 12$
- (v) $12x_1 = 5$
 $0 = 0$

Exercice 4 (†) Pour chacune des matrices suivantes, indiquer si elle est réduite, réduite échelonnée.

(i)
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 4 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(ii)
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(iii)
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 11 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

Exercice 5 (†) Pour chacune des matrices suivantes, effectuer une série d'opérations élémentaires de ligne pour obtenir à la suite de celles-ci une matrice échelonnée réduite et de plus indiquer son rang. Il faut utiliser l'algorithme de Gauss-Jordan.

(i)
$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 8 & -4 \\ 3 & 3 & 2 & 12 & -1 \end{bmatrix}$$

(ii)
$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -4 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & -5 & 16 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 2 & -1 & 12 & -1 \end{bmatrix}$$

(iii)
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Exercice 6 Pour chacune des matrices suivantes, en utilisant l'algorithme de Gauss-Jordan, obtenir la matrice échelonnée réduite et indiquer son rang.

(i)
$$\begin{bmatrix} -9 & 1 & -19 \\ -5 & 6 & -4 \\ 5 & -1 & 10 \end{bmatrix}$$

(ii)
$$\begin{bmatrix} -2 & 5 & 12 \\ -2 & 11 & 24 \\ 3 & -10 & -23 \end{bmatrix}$$

$$(iii) \begin{bmatrix} 1 & -3 & -8 & 10 & -6 & -21 & 18 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & 4 & 10 & -8 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -3 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & 8 & -6 & 0 & 14 & -16 \\ 1 & -4 & -12 & 17 & -12 & -35 & 28 \end{bmatrix}$$