

Exercices 10

by Aram Dermenjian

21 novembre 2017

Un exercice marqué du symbole \star est considéré comme plus difficile et ne sera pas une question d'examen. Un exercice marqué du symbole \dagger est trouvé dans les notes du cours.

Exercice 1 (\dagger) Considérons $V = \mathbb{R}_\ell^4$ et les cinq vecteurs suivants

$$\vec{v}_1 = [1 \quad -1 \quad 0 \quad 2], \vec{v}_2 = [0 \quad 1 \quad 1 \quad 0], \vec{v}_3 = [-1 \quad 0 \quad 3 \quad 1] \\ \vec{v}_4 = [0 \quad -3 \quad 5 \quad 6], \text{ et } \vec{v}_5 = [0 \quad 0 \quad -1 \quad 3]$$

- (i) Est-ce que le vecteur \vec{v}_4 est une combinaison linéaire des vecteurs \vec{v}_1 , \vec{v}_2 et \vec{v}_3 ?
- (ii) Déterminer une équation de la forme $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0$ qui décrit tous les vecteurs qui sont des combinaisons linéaires des vecteurs \vec{v}_1 , \vec{v}_2 et \vec{v}_3 .
- (iii) Est-ce que le vecteur \vec{v}_5 est une combinaison linéaire des vecteurs \vec{v}_1 , \vec{v}_2 et \vec{v}_3 ?
- (iv) Est-ce que les 4 vecteurs \vec{v}_2 , \vec{v}_3 , \vec{v}_4 et \vec{v}_5 sont linéairement indépendants ou non ?
- (v) Est-ce que $\mathcal{B} = \{\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5\}$ est une base de \mathbb{R}_ℓ^4 ?

Exercice 2 (\dagger) Considérons $V = \mathbb{R}_c^4$ et les quatres vecteurs suivants :

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Est-ce que ces quatre vecteurs sont linéairement indépendants ou pas ?

Exercice 3 Les sous-ensembles suivants de \mathbb{R}_ℓ^4 sont-ils des sous-espaces ?

- (i) $U = \{[x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4] \in \mathbb{R}_\ell^4 \mid x_1 \geq 0\}$.
- (ii) $U = \{[x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4] \in \mathbb{R}_\ell^4 \mid x_3 = 2x_1 - x_2\}$.
- (iii) $U = \{[x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4] \in \mathbb{R}_\ell^4 \mid x_2x_4 = 0\}$.
- (iv) $U = \{[x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4] \in \mathbb{R}_\ell^4 \mid x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1\}$.
- (v) $U = \{[x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4] \in \mathbb{R}_\ell^4 \mid x_1^2 = x_3 = x_4\}$

Exercice 4 (\star) Soit U_1 et U_2 deux sous-espaces de V . Montrer que

$$U_1 + U_2 = \{\vec{v} \in V \mid \vec{v} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{u}_1 \in U_1 \text{ et } \vec{u}_2 \in U_2\}$$

est un sous-espace de V .

Exercice 5 Soit l'espace $V = \mathbb{R}_\ell^4$ et la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Donner le noyau $\ker(A)$ de A .

Exercice 6 Soit les quatres vecteurs suivants :

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Noter par U le sous-espace de \mathbb{R}_ℓ^4 qui contient toutes les combinaisons linéaires de ce 4 vecteurs. Construire une forme explicite de U .