

Algèbre matricielle
MAT1600 groupe 30
Examen 1
mercredi, le 19 octobre 2016
Professeur: Robert Bédard

Directives:

- Durée de l'examen: 3 heures.
- Matériel permis: Calculatrice.
- Aucune note, aucun livre n'est permis.
- Vous devez répondre dans votre cahier d'examen. À la fin de l'examen, insérer le questionnaire dans votre cahier d'examen.
- Il y a six questions. La pondération pour chacune des questions est à la droite du numéro.

Exercice 1. Soit les matrices suivantes:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Effectuer chacune des opérations suivantes si elles sont définies.

- (a) **(5 points)** $B - 2AC$;
- (b) **(5 points)** $(B + 2C)A$;
- (c) **(5 points)** $(A + 3A^T)$

Exercice 2. (25 points) Résoudre le système d'équations linéaires suivant en utilisant des opérations élémentaires de ligne sur les matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -7 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 & 4 & 10 \\ 0 & 2 & 6 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 5 & -4 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Exercice 3. (15 points) Résoudre le système d'équations linéaires suivant en utilisant des opérations élémentaires de ligne sur les matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -9 \\ 28 \end{bmatrix}$$

Exercice 4. (a) (15 points) En utilisant des opérations élémentaires de ligne sur les matrices, déterminer si la matrice suivante

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 1 & 8 \\ -1 & -2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

est inversible? Si oui, calculer l'inverse D^{-1} de D .

(b) **(5 points)** Résoudre le système d'équations linéaires suivant

$$D \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 18 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Exercice 5. Soit la matrice

$$E = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Nous avons calculé les puissances suivantes de E :

$$E^2 = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 2 \\ -1 & 10 & -1 \\ 2 & -8 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad E^3 = \begin{bmatrix} 13 & -20 & 14 \\ 8 & -31 & 8 \\ -4 & 28 & -5 \end{bmatrix}$$

- (a) **(15 points)** Calculer le polynôme minimal de la matrice E .
- (b) **(5 points)** En utilisant le polynôme minimal de la matrice E , indiquer si cette matrice est inversible. De plus si elle est inversible, calculer l'inverse de E en utilisant le polynôme minimal.

Exercice 6. (5 points) Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Son polynôme minimal est $P(x) = x^2 - 2x - 11$. En utilisant le polynôme minimal, exprimer la puissance A^7 en fonction de I_2 et A .