

Algèbre matricielle  
MAT1600 groupe 20  
Examen 1  
mardi, le 25 octobre 2016  
Professeur: Robert Bédard

**Directives:**

- Durée de l'examen: 3 heures.
- Matériel permis: Calculatrice.
- Aucune note, aucun livre n'est permis.
- Vous devez répondre dans le cahier d'examen. À la fin de l'examen, insérer le questionnaire dans votre cahier d'examen.
- Il y a six questions. La pondération pour chacune des questions est à la droite du numéro.

**Exercice 1.** Soit les matrices suivantes:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Effectuer chacune des opérations suivantes si elles sont définies.

- (a) **(5 points)**  $C - 4AB$ ;
- (b) **(5 points)**  $(3B - C)A$ ;
- (c) **(5 points)**  $(A + 4A^T)$

**Exercice 2. (25 points)** Résoudre le système d'équations linéaires suivant en utilisant des opérations élémentaires de ligne sur les matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & 9 \\ 2 & 0 & 6 & -4 & -16 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 12 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix}$$

**Exercice 3. (15 points)** Résoudre le système d'équations linéaires suivant en utilisant des opérations élémentaires de ligne sur les matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -19 \\ 38 \end{bmatrix}$$

**Exercice 4. (a) (15 points)** En utilisant des opérations élémentaires de ligne sur les matrices, déterminer si la matrice suivante

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

est inversible? Si oui, calculer l'inverse  $D^{-1}$  de  $D$ .

(b) **(5 points)** Résoudre le système d'équations linéaires suivant

$$D \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**Exercice 5.** Soit la matrice

$$E = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Nous avons calculé les puissances suivantes de  $E$ :

$$E^2 = \begin{bmatrix} 3 & -5 & -11 \\ 10 & 1 & -3 \\ 3 & -7 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad E^3 = \begin{bmatrix} -21 & -20 & -6 \\ 15 & -33 & 17 \\ 13 & -2 & -32 \end{bmatrix}$$

- (a) **(15 points)** Calculer le polynôme minimal de la matrice  $E$ .
- (b) **(5 points)** En utilisant le polynôme minimal de la matrice  $E$ , indiquer si cette matrice est inversible. De plus si elle est inversible, calculer l'inverse de  $E$  en utilisant le polynôme minimal.

**Exercice 6. (5 points)** Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Son polynôme minimal est  $P(x) = x^2 - 6x + 13$ . En utilisant le polynôme minimal, exprimer la puissance  $A^7$  en fonction de  $I_2$  et  $A$ .