Algèbre matricielle - MAT1600

Robert Bédard
Département de mathématiques
Université du Québec à Montréal
bedard.robert@uqam.ca

18 août 2015

Table des matières

Liste des tableaux

Table des figures

Préface

Ces notes s'adressent aux étudiantes et étudiants du cours Algèbre matricielle (Sigle : MAT1600) à l'UQAM. Elles constituent la matière pour un cours de premier cycle d'une quarantaine d'heures. Elles seront divisées en sept chapitres. Pour l'instant, les six premiers chapitres ont été rédigés. Les notions de base du calcul matriciel sont décrites et quelques applications sont aussi présentées.

Quelques exercices sont inclus à la fin de chaque chapitre. Ceux marqués d'un (†) sont considérés comme étant difficile et nécessitent parfois des notions vues dans d'autres cours de mathématiques. Il y a très peu d'exercices de ce type. Ils ne sont là que pour éveiller la curiosité des étudiantes et étudiants sur d'autres sujets mathématiques.

Les preuves de certains des théorèmes ou propositions ne sont qu'esquissées dans le texte. J'ai préféré procéder ainsi pour ne pas trop alourdir ces notes de cours en espérant que les étudiantes et étudiants ne m'en tiendront pas trop rigueur.

D'avance je remercie toute personne qui me signalera les lapsus et autres coquilles qui m'auraient échappés.

Robert Bédard

Chapitre 1

Matrices

Dans ce chapitre, nous allons définir ce qu'est une matrice et décrire ensuite les opérations algébriques usuelles sur celles-ci. Nous terminerons en considérant une application à la théorie des graphes orientés.

1.1 Définitions de base

Définition 1.1. Une **matrice** de format $m \times n$ est un tableau rectangulaire comportant m lignes et n colonnes dont les entrées sont généralement des nombres.

Exemple 1.1.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0{,}5 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{est une matrice de format } 2 \times 3.$$

Notation 1.1. Généralement lorsque nous voulons écrire une matrice quelconque A, nous écrirons

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

où a_{ij} désigne l'entrée à la ligne i et à la colonne j. On dit que a_{ij} est le terme générale de la matrice A. Souvent aussi nous écrirons tout ceci sous la forme abrégée

$$A = [a_{ij}]_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \quad \text{ou encore} \quad A = [a_{ij}]$$

Définition 1.2. Deux **matrices** $A = [a_{ij}]$ **et** $B = [b_{ij}]$ **sont égales** si et seulement si elles ont le même format et les entrées aux positions correspondantes sont égales. C'est donc dire que si A est de format $m \times n$ et B est de format $m' \times n'$, alors il faut pour que ces deux matrices soient égales que $m' = m$, $n' = n$ et $a_{ij} = b_{ij}$ pour tout i et j tels que $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$.

Exemple 1.2. Les deux matrices suivantes

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 7 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ne sont pas égales parce qu'elles n'ont pas le même format ; l'une est de format 2×3 et l'autre de format 3×3. Alors que les deux matrices

$$\begin{bmatrix} x & 1 & -3 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 8 & 1 & -3 \\ 2 & y & 7 \end{bmatrix}$$

sont égales si et seulement si $x = 8$ et $y = 5$.

Certains matrices sont particulières à cause de leur format ou de certains propriétés qu'elles possèdent. Nous allons maintenant énumérer certaines de ces matrices.

Définition 1.3. La **matrice nulle** de format $m \times n$ est la matrice de format $m \times n$ dont toutes les entrées sont nulles. Nous noterons cette matrice par $0_{m\times n}$ ou encore par 0 seulement si le format est connu.

Exemple 1.3. La matrice nulle de format 3×2 est

$$0_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Définition 1.4. Une matrice $A = [a_{ij}]$ est dite être **carrée d'ordre** n si elle est de format $n \times n$. Elle a autant de lignes que de colonnes. Dans ce cas, la diagonale allant du coin supérieur gauche au coin inférieur droit est appelée la **diagonale principale**.

Exemple 1.4. La matrice

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & -2 & 3 \\ 0 & \boxed{5} & 7 \\ 1 & 10 & \boxed{-1} \end{bmatrix}$$

est une matrice carrée d'ordre 3 dans laquelle nous avons encadré les entrées de la diagonale principale : 1, 5 et -1.

Définition 1.5. La **matrice identité** d'ordre n est la matrice carrée de format $n \times n$ dont les entrées sur la diagonale principale sont égales à 1 et les autres, celles hors de la diagonale principale sont nulles (c'est-à-dire égales à 0). Nous noterons cette matrice par I_n ou encore I si l'ordre est connu.

Exemple 1.5. La matrice identité d'ordre 4 est

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.2 Opérations algébriques.

Il est possible de définir des opérations algébriques sur l'ensemble des matrices. Nous pouvons ainsi additionner, soustraire ou encore multiplier des matrices si certaines conditions sont vérifiées sur les formats de celles-ci. Nous allons maintenant décrire ces opérations et sous quelques conditions, elles sont bien définies.

Définition 1.6. Soit deux matrices : $A = [a_{ij}]$ de format $m \times n$ et $B = [b_{ij}]$ de format $m' \times n'$. Alors nous pouvons les additionner si et seulement si elles ont le même format, c'est-à-dire $m' = m$ et $n' = n$. Dans ce cas, le résultat de l'addition : la **somme** notée $A + B$ est aussi une matrice de format $m \times n$ et l'entrée à la ligne i et colonne j de $A + B$ est la somme des entrées correspondantes de A et de B, c'est-à-dire $a_{ij} + b_{ij}$. Nous pourrions écrire ceci de façon abrégée par

$$[a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}].$$

Exemple 1.6. L'addition

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

n'est pas définie dans ce cas parce que ces deux matrices ne sont pas de même format, une est de format 2×3, alors que l'autre est de format 2×2. Par contre, l'addition

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & -2 \\ 1 & 10 & -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & -9 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

est bien définie, les deux matrices étant de format 3×4 et la somme est

$$\begin{bmatrix} (1+0) & (3+(-1)) & (7+3) & ((-1)+5) \\ (0+2) & (2+5) & (5+1) & ((-2)+4) \\ (1+1) & (10+(-9)) & ((-1)+2) & (4+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 & 4 \\ 2 & 7 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Définition 1.7. Soit une matrice $A = [a_{ij}]$ de format $m \times n$ et un scalaire (c'est-à-dire un nombre) α. Alors nous pouvons multiplier A par α, que nous noterons par αA, et le résultat de la **multiplication de A par le scalaire α** est une matrice du même format que A et dont les entrées sont celles de A multipliées par α. Nous pouvons écrire ceci de façon abrégée par

$$\alpha A = \alpha[a_{ij}] = [\alpha a_{ij}].$$

Exemple 1.7. Nous avons illustré cette opération ci-dessous.

$$7 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \cdot 1 & 7 \cdot 0 & 7 \cdot 6 & 7 \cdot 1 \\ 7 \cdot 2 & 7 \cdot 5 & 7 \cdot 3 & 7 \cdot 1 \\ 7 \cdot (-3) & 7 \cdot 4 & 7 \cdot 7 & 7 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 42 & 7 \\ 14 & 35 & 21 & 7 \\ -21 & 28 & 49 & 35 \end{bmatrix}.$$

Définition 1.8. Soit deux matrices : $A = [a_{ij}]$ de format $m \times n$ et $B = [b_{ij}]$ de format $m' \times n'$. Alors nous pouvons soustraire l'une de l'autre si et seulement si elles ont le même format, c'est-à-dire $m' = m$ et $n' = n$. Dans ce cas, le résultat : la **différence** notée $A - B$, est aussi une matrice de format $m \times n$ et l'entrée à la ligne i et colonne j de $A - B$ est la différence des entrées correspondantes de A et de B, c'est-à-dire $a_{ij} - b_{ij}$. Nous pourrions écrire ceci de façon abrégée par

$$[a_{ij}] - [b_{ij}] = [a_{ij} - b_{ij}].$$

Noter que $A - B$ est tout simplement $A + (-1)B$.

Exemple 1.8.

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (7-5) & (1-(-1)) \\ (-2-6) & (4-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -8 & 1 \end{bmatrix}.$$

La somme et la multiplication par un scalaire satisfont des propriétés similaires à celles de la somme pour les nombres. Nous avons énumérées celles-ci ci-dessous. Nous ne démontrerons pas celles-ci, mais les preuves sont faciles à obtenir des définitions.

Proposition 1.1. *Soit A, B et C des matrices de format $m \times n$, α, β des scalaires. Alors*

(a) $A + B = B + A$ *(commutativité de la somme)*

(b) $(A + B) + C = A + (B + C)$ *(associativité de la somme)*

(c) $A + 0_{m \times n} = 0_{m \times n} + A = A$ *(élément neutre pour la somme)*

(d) $A + (-A) = 0_{m \times n}$, *où* $-A = (-1)A$ *(matrice opposée)*

(e) $1A = A$ *(unitarité)*

(f) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ *(distributivité)*

(g) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ *(distributivité)*

(h) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$ *(associativité du produit par un scalaire)*

Une opération plus délicate est la multiplication de matrices. Nous allons maintenant décrire celle-ci.

Définition 1.9. Soit une matrice $A = [a_{ij}]$ de format $p \times q$ et une matrice $B = [b_{ij}]$ de format $r \times s$. Alors nous pouvons multiplier A par B notée AB si et seulement si le nombre de colonnes q de A est égal au nombre de lignes r de B. **Attention ici l'ordre est important dans le produit, c'est-à-dire que AB et BA ne donnent pas nécessairement la même matrice**. Nous avons les formats suivants :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{iq} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pj} & \dots & a_{pq} \end{bmatrix}}_{A \text{ de format } p \times \boxed{\text{q}}} \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{is} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{q1} & b_{q2} & \dots & b_{qj} & \dots & b_{qs} \end{bmatrix}}_{B \text{ de format } \boxed{\text{q}} \times s}$$

Le **produit** AB sera alors une matrice C de format $p \times s$, où

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2j} & \dots & c_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{is} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p1} & c_{p2} & \dots & c_{pj} & \dots & c_{ps} \end{bmatrix}$$

où c_{ij} désigne l'entrée à la ligne i et à la colonne j du produit AB et est égale à

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj} + \cdots + a_{iq}b_{qj} = \sum_{k=1}^{q} a_{ik}b_{kj}.$$

Ainsi c_{ij} est obtenue des entrées de A sur la ligne i et celles de B sur la colonne j.

Remarque 1.1. Il peut arriver que AB soit bien définie, alors que BA ne le soit pas. De plus même si BA est définie, les matrices AB et BA ne sont pas nécessairement égales.

Exemple 1.9. Le produit

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}}_{\text{format } 3\times 2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\text{format } 3\times 3}$$

n'est pas défini parce que le nombre de colonnes de la matrice de gauche, c'est-à-dire 2, n'est pas égal au nombre de lignes de la matrice de droite, c'est-à-dire 3. Par contre le produit

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\text{format } 3\times 3} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}}_{\text{format } 3\times 2}$$

est défini parce que le nombre de colonnes de la matrice de gauche, c'est-à-dire 3, est égal au nombre de lignes de la matrice de droite, c'est-à-dire 3. Le produit sera une matrice de format 3×2 et est égal à

$$\begin{bmatrix} ((1)(1)+(2)(-1)+(-3)(0)) & ((1)(2)+(2)(4)+(-3)(5)) \\ ((0)(1)+(3)(-1)+(4)(0)) & ((0)(2)+(3)(4)+(4)(5)) \\ ((1)(1)+(0)(-1)+(2)(0)) & ((1)(2)+(0)(4)+(2)(5)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ -3 & 32 \\ 1 & 12 \end{bmatrix}.$$

Exemple 1.10. Le produit

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}}_{\text{format } 2\times 2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}}_{\text{format } 2\times 2}$$

est défini parce que le nombre de colonnes de la matrice de gauche, c'est-à-dire 2, est égal au nombre de lignes de la matrice de droite, c'est-à-dire 2. Le produit sera une matrice de format 2×2 et est égal à

$$\begin{bmatrix} ((3)(1)+(1)(-1)) & ((3)(4)+(1)(7)) \\ ((1)(1)+(5)(-1)) & ((1)(4)+(5)(7)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 19 \\ -4 & 39 \end{bmatrix}.$$

De plus si nous considérons le produit des mêmes matrices mais cette fois dans l'ordre inverse, nous aurons que le produit

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}}_{\text{format } 2\times 2} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}}_{\text{format } 2\times 2}$$

est aussi défini parce que le nombre de colonnes de la matrice de gauche, c'est-à-dire 2, est égal au nombre de lignes de la matrice de droite, c'est-à-dire 2. Le produit sera une matrice de format 2×2 et est égal à

$$\begin{bmatrix} ((1)(3) + (4)(1)) & ((1)(1) + (4)(5)) \\ ((-1)(3) + (7)(1)) & ((-1)(1) + (7)(5)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 21 \\ 4 & 34 \end{bmatrix}.$$

Cet exemple illustre bien le fait que même si les produits AB et BA sont définis, il ne sont pas nécessairement égaux.

Ces opérations satisfont des propriétés similaires à celles pour les opérations sur les nombres. Nous avons énumérées celles-ci ci-dessous. Nous ne les démontrerons pas, mais les preuves sont faciles à obtenir des définitions.

Proposition 1.2. *Soit que A est une matrice de format $m \times n$, B et B' sont deux matrices de format $n \times p$ et C une matrice de format $p \times q$ et un scalaire α. Alors*

(a) $(AB)C = A(BC)$ *(associativité du produit)*

(b) $AI_n = A$ *et* $I_m A = A$ *(élément neutre pour le produit)*

(c) $A0_{n\times r} = 0_{m\times r}$ *et* $0_{s\times m}A = 0_{s\times n}$ *(élément absorbant)*

(d) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$ *(associativité du produit par un scalaire)*

(e) $A(B + B') = AB + AB'$ *et* $(B + B')C = BC + B'C$ *(distributivité)*

Notation 1.2. Si A est une matrice carrée d'ordre n et m est un entier positif (≥ 0), alors nous noterons par A^m : le produit de la matrice A avec elle-même m fois, c'est-à-dire

$$\text{si } m = 0, \text{ alors} \quad A^0 = I_n \quad \text{et si } m > 0, \text{ alors} \quad A^m = \underbrace{A \cdot A \cdots A \cdot A}_{m \text{ facteurs}}.$$

Par exemple $A^5 = AAAAA$.

Remarque 1.2. Ce qu'il faut bien se souvenir est que nous ne pouvons pas supposer les matrices AB et BA sont égales même si ces deux produits sont bien définis. Par exemple, si A et B sont des matrices carrées d'ordre n, alors nous aurons en utilisant les propriétés énoncées aux propositions 1.1 et 1.2

$$\begin{aligned} (A+B)^2 &= (A+B)(A+B) = (A+B)A + (A+B)B \\ &= (AA + BA) + (AB + BB) \\ &= A^2 + BA + AB + B^2. \end{aligned}$$

Donc la matrice $(A+B)^2$ n'est pas nécessairement égale à $A^2 + 2AB + B^2$, alors que si a, b sont des nombres, nous aurions que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

1.3 Matrices particulières

Certaines matrices ont des propriétés particulières qu'il nous faut distinguer. C'est ce que nous ferons dans cette section.

Définition 1.10. Une matrice carrée $A = [a_{ij}]$ est dite **triangulaire supérieure** si toutes les entrées de A situées strictement sous la diagonale principale sont nulles, c'est-à-dire que $a_{ij} = 0$ lorsque $i > j$. Une matrice carrée $A = [a_{ij}]$ est dite **triangulaire inférieure** si toutes les entrées de A situées strictement au-dessus de la diagonale principale sont nulles, c'est-à-dire que $a_{ij} = 0$ lorsque $i < j$.

Exemple 1.11.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 7 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

est une matrice triangulaire supérieure, alors que

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

est une matrice triangulaire inférieure.

Définition 1.11. Une matrice carrée $A = [a_{ij}]$ est dite **diagonale** si elle est à la fois triangulaire supérieure et triangulaire inférieure, c'est-à-dire que toutes les entrées sont nulles sauf celles sur la diagonale principale.

Exemple 1.12.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{est une matrice diagonale.}$$

Définition 1.12. Soit une matrice $A = [a_{ij}]$ de format $m \times n$. Alors la **transposée** de A, que nous noterons A^T, est la matrice de format $n \times m$ obtenue en interchangeant les lignes et les colonnes de A. Ainsi si A est la matrice

$$A = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \longleftarrow \text{ ligne } i \\ \\ \\ \end{array} \\ \uparrow & \\ \text{colonne } j & \end{array}$$

alors sa transposée A^T est

$$A^T = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{i1} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{i2} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{1j} & a_{2j} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{mj} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{in} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \longleftarrow \text{ ligne } j \\ \\ \\ \end{array} \\ \uparrow & \\ \text{colonne } i & \end{array}$$

Exemple 1.13. Si A est la matrice de format 4×2 suivante

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 3 & 7 \\ 4 & -1 \end{bmatrix},$$

alors sa transposée A^T sera égale à la matrice de format 2×4

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

La transposée satisfait certaines propriétés relativement aux opérations algébriques définies précédemment. Les preuves de ces propriétés sont faciles à obtenir des définitions.

Proposition 1.3. *Soit deux matrices A et A' de format $m \times n$, une matrice B de format $n \times p$ et un scalaire α. Alors*

(a) $(A^T)^T = A$

(b) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

(c) $(A + A')^T = A^T + (A')^T$

(d) $(AB)^T = B^T A^T$ *L'ordre du produit est inversé !*

Définition 1.13. Une matrice carrée A est dite être **symétrique** si et seulement si A est égale à sa transposée, c'est-à-dire que $A = A^T$.

Exemple 1.14. Soit les deux matrices carrées suivantes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 3 & -2 & 5 \\ 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

Alors la matrice A est symétrique, car

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 3 & -2 & 5 \\ 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = A.$$

Par contre la matrice B n'est pas symétrique, car

$$B^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \end{bmatrix} = B.$$

Exemple 1.15. La matrice des distances (par vol d'oiseau) entre les quatre villes : Montréal, Paris, Londres et Washington

$$\begin{array}{c c} \text{Villes} & \begin{array}{cccc} \text{Montréal} & \text{Paris} & \text{Londres} & \text{Washington} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Montréal} \\ \text{Paris} \\ \text{Londres} \\ \text{Washington} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 5506 & 5222 & 788 \\ 5506 & 0 & 344 & 6166 \\ 5222 & 344 & 0 & 5899 \\ 788 & 6166 & 5899 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

est une matrice symétrique.

Définition 1.14. Une matrice carrée A est dite être **antisymétrique** si et seulement si $A^T = -A$.

Exemple 1.16.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 & 5 \\ -3 & 0 & 1 & 9 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \\ -5 & -9 & -4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{est une matrice antisymétrique.}$$

En effet,

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 & -5 \\ 3 & 0 & -1 & -9 \\ -2 & 1 & 0 & -4 \\ 5 & 9 & 4 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 & 5 \\ -3 & 0 & 1 & 9 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \\ -5 & -9 & -4 & 0 \end{bmatrix} = -A$$

Proposition 1.4. *Toute matrice carrée M peut s'exprimer d'une et une seule façon comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique, c'est-à-dire qu'il existe une et une seule matrice symétrique S, ainsi qu'une et une seule matrice antisymétrique A telles que $M = S + A$. Plus précisément*

$$\frac{1}{2}(M + M^T) \textit{ est symétrique,} \quad \frac{1}{2}(M - M^T) \textit{ est antisymétrique}$$

et

$$S = \frac{1}{2}(M+M^T), \quad A = \frac{1}{2}(M-M^T) \quad \textit{et} \quad M = \frac{1}{2}(M+M^T)+\frac{1}{2}(M-M^T).$$

Preuve. En utilisant les propriétés de la transposée énoncées aux propositions 1.1 et 1.3, nous obtenons que

$$\frac{1}{2}(M + M^T)^T = \frac{1}{2}(M^T + (M^T)^T) = \frac{1}{2}(M^T + M) = \frac{1}{2}(M + M^T)$$

et ceci montre que $\dfrac{1}{2}(M + M^T)$ est symétrique.

De la même façon,

$$\frac{1}{2}(M - M^T)^T = \frac{1}{2}(M^T - (M^T)^T) = \frac{1}{2}(M^T - M) = -\frac{1}{2}(M - M^T)$$

montre que $\dfrac{1}{2}(M - M^T)$ est antisymétrique.

De plus

$$\frac{1}{2}(M + M^T) + \frac{1}{2}(M - M^T) = \frac{1}{2}\left((M + M^T) + (M - M^T)\right) = \frac{1}{2}(2M) = M.$$

En posant $S = \frac{1}{2}(M+M^T)$ et $A = \frac{1}{2}(M-M^T)$, nous obtenons qu'il y a au moins une façon d'écrire la matrice M comme la somme d'une matrice symétrique S et d'une matrice antisymétrique A . Il nous faut maintenant montrer qu'il y a une seule façon d'écrire M comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique. Supposons que $M = S_1 + A_1$, où S_1 est une matrice symétrique et A_1 est une matrice antisymétrique, nous voulons montrer que $S_1 = S$ et $A_1 = A$.

En effet, en utilisant les propriétés de la transposée énoncées aux propositions 1.1 et 1.3, nous obtenons

$$M+M^T = (S_1+A_1)+(S_1+A_1)^T = (S_1+A_1+S_1^T+A_1^T) = S_1+A_1+S_1-A_1 = 2S_1$$

parce que S_1 est symétrique et A_1 est antisymétrique. De même

$$M-M^T = (S_1+A_1)-(S_1+A_1)^T = (S_1+A_1-S_1^T-A_1^T) = S_1+A_1-S_1+A_1) = 2A_1.$$

Nous obtenons en divisant par 2 que

$$S_1 = \frac{1}{2}(M+M^T) = S \quad \text{et} \quad A_1 = \frac{1}{2}(M-M^T) = A.$$

□

Exemple 1.17. Soit la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -8 \end{bmatrix}.$$

Alors

$$S = \frac{1}{2}(M+M^T) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & -8 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & 7/2 \\ 2 & 7/2 & -8 \end{bmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2}(M-M^T) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & -8 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1/2 \\ -3 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

et nous avons bien que

$$S + A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & 7/2 \\ 2 & 7/2 & -8 \end{bmatrix}}_{\text{symétrique}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1/2 \\ -3 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{antisymétrique}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -8 \end{bmatrix} = M.$$

Définition 1.15. Une matrice $A = [a_{ij}]$ de format $m \times n$ a un **inverse à gauche** s'il existe une matrice B de format $n \times m$ telle que $BA = I_n$, où I_n est la matrice identité d'ordre n. De même la matrice A a un **inverse à droite** s'il existe une matrice C de format $n \times m$ telle que $AC = I_m$, où I_m est la matrice identité d'ordre m. Une matrice n'a pas nécessairement un inverse à droite ou encore à gauche.

Exemple 1.18. La matrice

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ est un inverse à gauche de } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

En effet,

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice A n'a pas d'inverse à droite. En effet, supposons le contraire et que la matrice

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

est un inverse à droite de A. Alors

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ (2a-3d) & (2b-3e) & (2c-3f) \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nous obtenons alors que $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 0$, $e = 0$ et $f = 1$. Mais de ceci nous aurons que la ligne 2 du produit sera $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ et ne sera pas égale à $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Nous pouvons donc conclure que A n'a pas d'inverse à droite.

Exemple 1.19. Si $ad - bc \neq 0$ pour la matrice carrée d'ordre 2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

alors

$$\frac{1}{(ad-bc)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

est a un inverse à droite et à gauche de A. En effet,

$$\frac{1}{(ad-bc)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{(ad-bc)} \begin{bmatrix} (da-bc) & (db-bd) \\ (-ca+ac) & (-cb+ad) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \left(\frac{1}{(ad-bc)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \right) &= \frac{1}{(ad-bc)} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(ad-bc)} \begin{bmatrix} (ad+b(-c)) & (a(-b)+ba) \\ (cd+d(-c)) & (c(-b)+da) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi pour la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

nous avons que $ad - bc = (1)(4) - (2)(3) = -2 \neq 0$ et conséquemment cette matrice A a comme inverse à gauche et à droite, la matrice

$$\frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Remarque 1.3. Dans le cas d'une matrice carrée, multiplier par son inverse est similaire à diviser par cette matrice. Nous allons traiter dans un chapitre ultérieur la question de savoir si une matrice carrée a un inverse et si oui, comment obtenir cet inverse. Auparavant nous allons seulement obtenir quelques propriétés de l'inverse s'il existe. Nous discuterons aussi dans un chapitre ultérieur de la situation d'une matrice qui est rectangulaire sans être carrée et dans ce cas, il sera question de pseudo-inverse. Nous verrons ceci lorsque nous discuterons de la droite des moindres carrés.

Proposition 1.5. *Si une matrice carrée A a un inverse à gauche B et un inverse à droite C, alors $B = C$.*

Preuve. Supposons que A est de format $n \times n$. Alors nous avons par hypothèse que $BA = I_n$ et $AC = I_n$. Donc en utilisant la proposition 1.2, nous obtenons

$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C.$$

C'est ce que nous voulions montrer. □

Définition 1.16. Si une matrice carrée A a un inverse à gauche et à droite B, alors nous dirons que A est une matrice **inversible** et que B est un **inverse** de A. Une matrice non inversible est dite **singulière**.

Notation 1.3. Si une matrice carrée A est inversible, alors comme conséquence de la proposition 1.5 nous avons que cet inverse est unique. Nous noterons cet inverse par A^{-1}.

Proposition 1.6. *Soit deux matrices carrées A et B inversibles de même format $n \times n$. Alors*

(a) *La matrice inverse A^{-1} est inversible et son inverse est A. En d'autres mots, nous avons que $(A^{-1})^{-1} = A$.*

(b) *Le produit AB est inversible et son inverse $(AB)^{-1}$ est le produit des inverses en ordre inverse, c'est-à-dire que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Preuve. (a) Comme A est inversible, nous avons que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. Mais ceci montre que A^{-1} a A comme inverse à gauche et à droite. Dans ce cas, l'inverse est unique et nous pouvons conclure que $(A^{-1})^{-1} = A$.

(b) Nous pouvons considérer la matrice $B^{-1}A^{-1}$ parce que A et B sont inversibles. Nous avons comme conséquence de la proposition 1.2 que

$$\begin{aligned}(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(B(B^{-1}A^{-1})) = A((BB^{-1})A^{-1})\\ &= A(I_nA^{-1}) = AA^{-1} = I_n,\end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned}(B^{-1}A^{-1})(AB) &= ((B^{-1}A^{-1})A)B = (B^{-1}(A^{-1}A))B\\ &= (B^{-1}I_n)B = B^{-1}B = I_n.\end{aligned}$$

Ceci montre que $B^{-1}A^{-1}$ est un inverse à gauche et à droite de AB. Comme l'inverse est unique, nous obtenons que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. □

Remarque 1.4. Si $A_1, A_2, \dots, A_k$ sont des matrices carrées inversibles de même format $n \times n$, alors le produit $A_1A_2 \cdots A_n$ est aussi une matrice inversible et son inverse $(A_1A_2 \cdots A_n)^{-1}$ est

$$(A_1A_2\cdots A_k)^{-1} = \underbrace{A_k^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}}_{\text{l'ordre des facteurs du produit est inversé}}.$$

Il suffit d'utiliser plusieurs fois la proposition précédente.

Notation 1.4. Si A est une matrice carrée inversible et que m est un entier négatif ($m < 0$), alors A^m désignera la matrice $(A^{-1})^{|m|}$, où $|m|$ est la valeur absolue de m. Rappelons que $|m| = -m$ si $m < 0$ et $|m| = m$ si $m \geq 0$. Par exemple, $|-7| = 7$ et $|10| = 10$. Mais noter que nous aurions aussi pu écrire que $A^m = (A^{|m|})^{-1}$ à cause de la proposition 1.6. Donc avec cette notation, nous avons que $A^{-6} = (A^{-1})^6 = (A^6)^{-1}$. Avec cette notation, il est possible de montrer que

$$A^mA^n = A^{m+n} \quad \text{et} \quad (A^m)^n = A^{mn} \quad \text{pour tout entier } m, n \in \mathbb{Z}.$$

1.4 Application des matrices aux graphes

Définition 1.17. Un **graphe orienté** $\Gamma = (\mathcal{S}, \mathcal{F})$ est formé d'un ensemble fini non vide de sommets $\mathcal{S}$ et d'un ensemble de flèches $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{S} \times \mathcal{S}$. Le nombre d'éléments de $\mathcal{S}$ est appelé **l'ordre** de Γ. Si $f = (x, y) \in \mathcal{F}$ est une flèche, nous disons qu'elle va de x vers y et nous pourrions représenter ceci graphiquement par $x \longrightarrow y$. Si $f = (x, x)$, alors nous dirons que f est une **boucle en** x.

Il est possible de représenter un graphe orienté par des points et des flèches reliant ces points. Nous avons illustrer ceci dans l'exemple ci-dessous.

Exemple 1.20. Considérons le graphe orienté $\Gamma = (\mathcal{S}, \mathcal{F})$ pour lequel l'ensemble des sommets est

$$\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

et l'ensemble des flèches est

$$\mathcal{F} = \{(1,2), (1,3), (3,2), (3,4), (5,4), (5,5), (6,7)\}.$$

Alors nous pouvons représenter ceci dans la figure 1.1.

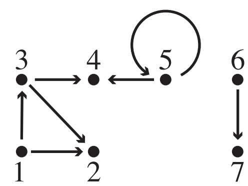


FIGURE 1.1 – Exemple d'un graphe orienté

Il est aussi possible de décrire un graphe orienté au moyen d'une matrice.

Définition 1.18. Étant donné un graphe orienté $\Gamma = (\mathcal{S}, \mathcal{F})$ d'ordre n et pour lequel l'ensemble $\mathcal{S}$ des sommets est $\mathcal{S} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Alors la **matrice d'adjacence** de Γ est la matrice carrée $M(\Gamma)$ de format $n \times n$ définie par

$$M(\Gamma) = [m_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \quad \text{où} \quad m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } (x_i, x_j) \in \mathcal{F}\,; \\ \\ 0, & \text{si } (x_i, x_j) \notin \mathcal{F}. \end{cases}$$

Exemple 1.21. Si nous prenons le graphe orienté $\Gamma = (\mathcal{S}, \mathcal{F})$ de l'exemple précédent, nous aurons alors comme matrice d'adjacence

$$M(\Gamma) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lemme 1.1. *Soit un graphe orienté $\Gamma = (\mathcal{S}, \mathcal{F})$ d'ordre n et pour lequel l'ensemble $\mathcal{S}$ des sommets est $\mathcal{S} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et la matrice d'adjacence correspondante :*

$$M(\Gamma) = [m_{ij}]_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$$

Alors

(a) *La somme des entrées $\sum_{k=1}^{n} m_{ik}$ sur la ligne i de $M(\Gamma)$ est égale au nombre de flèches sortant du sommet x_i.*

(b) *La somme des entrées $\sum_{k=1}^{n} m_{kj}$ sur la colonne j de $M(\Gamma)$ est égale au nombre de flèches entrant dans le sommet x_j.*

(c) *La somme des entrées $\sum_{k=1}^{n} m_{kk}$ sur la colonne principale de $M(\Gamma)$ est égale au nombre de boucles de Γ.*

Preuve. (a) Par définition, nous avons que

$$m_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{si } (x_i, x_k) \text{ est une flèche dans } \Gamma\,; \\ \\ 0, & \text{s'il n'y a pas de flèches de } x_i \text{ vers } x_k \text{ dans } \Gamma. \end{cases}$$

Conséquemment la somme $\sum_{k=1}^{n} m_{ik}$ est égale au nombre de flèches sortant de x_i.

(b) Par définition, nous avons que

$$m_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{si } (x_k, x_j) \text{ est une flèche dans } \Gamma\,; \\ \\ 0, & \text{s'il n'y a pas de flèches de } x_k \text{ vers } x_j \text{ dans } \Gamma. \end{cases}$$

Conséquemment la somme $\sum_{k=1}^{n} m_{kj}$ est égale au nombre de flèches entrant dans le sommet x_j.

(c) Par définition, nous avons que

$$m_{kk} = \begin{cases} 1, & \text{si } (x_k, x_k) \text{ est une boucle dans } \Gamma\,; \\ \\ 0, & \text{s'il n'y a pas de boucle à } x_k \text{ dans } \Gamma. \end{cases}$$

Conséquemment la somme $\sum_{k=1}^{n} m_{kk}$ est égale au nombre de boucles dans le graphe orienté Γ. $\square$

Définition 1.19. Soit un graphe orienté $\Gamma = (\mathcal{S}, \mathcal{F})$ d'ordre n et pour lequel l'ensemble $\mathcal{S}$ des sommets est $\mathcal{S} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Un **chemin de** x_i **vers** x_j dans Γ est une suite de flèches : (x_{p_0}, x_{p_1}), $(x_{p_1}, x_{p_2}), \ldots, (x_{p_{k-1}}, x_{p_k})$ de Γ telle que la première flèche (x_{p_0}, x_{p_1}) part de x_i, c'est-à-dire que $x_{p_0} = x_i$, la dernière flèche $(x_{p_{k-1}}, x_{p_k})$ se termine à x_j et si f et f' sont deux flèches successives dans le chemin, alors le sommet d'arrivée de la flèche f est le sommet de départ de la flèche f'. Le nombre k de flèches dans le chemin est appelé la **longueur du chemin**.

Exemple 1.22. Considérons le graphe orienté de la figure 1.2. Nous avons désigné les flèches du graphe par des lettres de a à h. Avec cette notation, nous avons que a, b, d, e, g, g, h est un chemin de longueur 7 allant du sommet 1 au sommet 7. Pareillement f, e, h est un chemin de longueur 3 allant du sommet 6 au sommet 7.

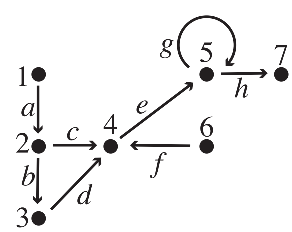


FIGURE 1.2 – Graphe orienté

Proposition 1.7. *Soit un graphe orienté $\Gamma = (\mathcal{S}, \mathcal{F})$ d'ordre n et pour lequel l'ensemble $\mathcal{S}$ des sommets est $\mathcal{S} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et la matrice d'adjacence correspondante :*

$$M = M(\Gamma) = [m_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Pour chaque entier $p \geq 1$, écrivons la $p^{\text{ième}}$ puissance de M :

$$M^p = [m_{ij}(p)]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Alors $m_{ij}(p)$ est le nombre de chemins de longueur p allant du sommet x_i jusqu'au sommet x_j.

Preuve. La preuve de cette proposition est ce que nous appellons une preuve par récurrence. Si $p = 1$, alors le résultat est vrai par la définition même de la matrice d'adjacence. Nous pouvons supposer que le résultat est vrai pour $p - 1$ et nous voulons le démontrer pour p. Ainsi nous supposons que les entrées de la matrice M^{p-1} comptent les chemins de longueur $p - 1$ entre deux sommets quelconques du graphe. Un chemin de longueur p : $f_1, f_2, \ldots, f_{p-1}, f_p$ dans le graphe Γ allant du sommet x_i au sommet x_j est un chemin de longueur $p-1$ allant du sommet x_i jusqu'au sommet x_k pour un certain k suivi d'une flèche f_p allant de x_k vers le sommet x_j. Réciproquement à tout chemin de longueur $p-1$: $f_1, f_2, \ldots, f_{p-1}$ allant de x_i jusqu'au sommet x_k pour un certain k et à toute flèche f allant de x_k vers le sommet x_j, nous pouvons associer un chemin de longueur p en considérant $f_1, f_2, \ldots, f_{p-1}, f$. De tout ceci, nous obtenons l'équation

$$m_{ij}(p) = \sum_{k=1}^{n} m_{ik}(p-1)m_{kj}$$

Mais ceci est l'entrée à la ligne i et colonne j de $M^{p-1}M = M^p$. C'est ce que nous devions montrer. □

Exemple 1.23. Si nous reprenons le graphe orienté de la figure 1.2, alors sa matrice d'adjacence est

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si nous calculons la puissance sixième de M, nous obtenons

$$M^6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La proposition précédente indique qu'il y a 2 chemins de longueur 6 allant du sommet 1 jusqu'au sommet 5 dans le graphe orienté de la figure 1.2. En effet, ces deux chemins sont : a, b, d, e, g, g et a, c, e, g, g, g.

1.5 Exercices

Exercice 1.1. Soit les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -5 & 1 & 4 & -2 \\ 7 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & 0 \\ 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & -5 \\ 10 & 8 & -9 \end{bmatrix}.$$

Indiquer si chacune des opérations suivantes est bien définie et effectuer ce calcul dans le cas où l'opération est bien définie :

(a) BAC,

(b) B^2A,

(c) $(BC)^2$,

(d) B^2C^2,

(e) $A(B+3C)$,

(f) $(B+3C)A$,

(g) $A^T(B+5C^T)$,

(h) $A+A^T$.

Exercice 1.2. Soit la matrice suivante

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calculer chacune des matrices suivantes : (a) A^2, (b) A^3, (c) A^4, (d) A^{100}, (e)(†) [1] $(I_4 + A)^8$.

Exercice 1.3. Soit la matrice A.

(a) Vérifier que la matrice A^TA est une matrice symétrique.

(b) Dans le cas où A est une matrice de format 2×2, c'est-à-dire

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

alors calculer A^TA.

Exercice 1.4. Soit les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 7 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(a) Vérifier que la matrice A n'a pas d'inverse B à gauche.

1. Un exercice marqué du symbole (†) est considéré comme plus difficile et ne sera pas une question d'examen.

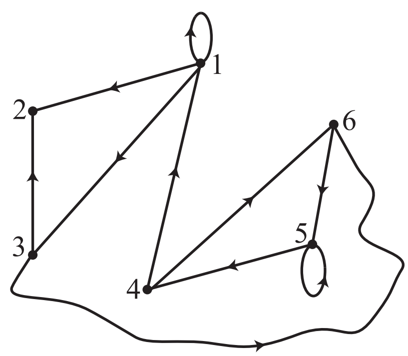
(b) Vérifier que la matrice C est un inverse à droite de A.

(c) Vérifier que la matrice ci-dessous est aussi un inverse à droite de A pour tous les scalaires α, β, γ et δ :

$$\begin{bmatrix} (1-3\alpha+\beta)/2 & (-3\gamma+\delta-1)/2 \\ 3\alpha & (1+3\gamma) \\ \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}$$

La matrice A a une infinité d'inverse à droite et aucun inverse à gauche.

Exercice 1.5. Soit le graphe orienté G suivant :



(a) Déterminer la matrice d'adjacence $M = M(G)$ de ce graphe.

(b) Calculer M^4 et vérifier que l'entrée à la ligne 5 et à la colonne 5 de M^4 correspond bien au nombre de chemins de longueur 4 allant du sommet 5 au sommet 5 dans le graphe G en énumérant tous ces chemins.

(c) Calculer M^6 et vérifier que l'entrée à la ligne 5 et à la colonne 2 de M^6 correspond bien au nombre de chemins de longueur 6 allant du sommet 5 au sommet 2 dans le graphe G en énumérant tous ces chemins.

Chapitre 2

Systèmes d'équations linéaires

Un problème que nous rencontrons souvent est celui de déterminer les solutions d'un système d'équations linéaires. Nous allons maintenant étudier ce problème.

Définition 2.1. Un **système de** m **équations linéaires à** n **inconnues** : $x_1, x_2, \dots, x_n$ est un système de la forme

$$(*) \quad \left\{ \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \right.$$

où les nombres

$$\left\{ \begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots & a_{1n}, & b_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots & a_{2n}, & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \dots & a_{mn}, & b_m \end{matrix} \right\} \quad \text{sont donnés}$$

et $x_1, \quad x_2, \quad \dots \quad x_n$ désignent des **inconnues** du système d'équations. Il nous faut déterminer les valeurs des inconnues qui font en sorte que les m équations linéaires du système sont satisfaites simultanément. Nous disons alors que ces valeurs constituent une **solution** de $(*)$

Exemple 2.1.

$$(*) \quad \left\{ \begin{aligned} 3x - y + 2z &= 14 \\ x + y - z &= -5 \\ 3y - z &= -8 \end{aligned} \right.$$

est un système de 3 équations linéaires à 3 inconnues : x, y, z. Pour ce système, $(x, y, z) = (1, -1, 5)$ est une solution. En effet, nous avons

$$(*) \quad \left\{ \begin{aligned} 3(1) - (-1) + 2(5) &= 14 \\ (1) + (-1) - (5) &= -5 \\ 3(-1) - (5) &= -8 \end{aligned} \right.$$

Dans le cas présent, c'est la seule et unique solution. Nous verrons plus tard comment obtenir toutes les solutions d'un tel système.

Définition 2.2. Le système d'équations linéaires $(*)$ peut s'écrire sous une **forme matricielle** de la façon suivante :

$$(*') \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \right.$$

Sous cette forme, alors

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

est la **matrice des coefficients** du système,

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

est la **matrice des constantes** du système, et finalement

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

est la **matrice des inconnues** du système. Une **solution** du système $AX = B$ est une matrice X_0 de format $n \times 1$ tel que $AX_0 = B$

Exemple 2.2. Si nous reprenons le système d'équations linéaires de l'exemple 2.1, alors ce système devient sous forme matricielle :

$$(\heartsuit) \qquad \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -5 \\ -8 \end{bmatrix}$$

et la matrice

$$X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

est une solution de $(\heartsuit)$.

Définition 2.3. Soit un système d'équations linéaires $AX = B$, où A est une matrice de format $m \times n$, B est une matrice de format $m \times 1$ et X est une matrice de format $n \times 1$. Alors nous dirons que ce système est **homogène** si B est la matrice nulle de format $m \times 1$, c'est-à-dire $B = 0_{m\times 1}$.

Notre objectif est d'obtenir toutes les solutions du système $AX = B$. C'est ce qui est le fait de **résoudre le système** $AX = B$. Il existe un algorithme pour obtenir toutes ces solutions, c'est l'**algorithme d'élimination de Gauss-Jordan**. Avant de décrire cet algorithme de façon générale, nous allons l'illustrer dans un exemple simple. Dans un premier temps, nous allons travailler qu'avec les équations, alors que dans un deuxième temps, nous allons travailler avec des matrices seulement. Il est possible de voir la similarité entre les deux approches et se convaincre que les matrices simplifient les calculs.

Exemple 2.3. Nous allons résoudre le système d'équations linéaires suivant

$$(\diamondsuit) \qquad \begin{cases} 2x - y = -5 \\ x + 3y = 8 \end{cases}$$

En divisant la première équation par 2, nous obtenons le système

$$\begin{cases} x - (1/2)y = -(5/2) \\ x + 3y = 8 \end{cases}$$

Cette division ne modifie pas l'ensemble des solutions de $(\diamondsuit)$. De la première équation, nous pouvons exprimer x en fonction de y et nous obtenons ainsi

$$\begin{cases} x = (1/2)y - (5/2) \\ x + 3y = 8 \end{cases}$$

Nous pouvons maintenant éliminer l'inconnue x de la seconde équation en remplaçant x par son expression obtenue de la première équation. Nous obtenons alors que

$$\begin{cases} x = (1/2)y - (5/2) \\ (1/2)y - (5/2) + 3y = 8 \end{cases}$$

Tout ceci est équivalent à

$$\begin{cases} x = (1/2)y - (5/2) \\ (7/2)y = 8 + (5/2) = 21/2 \end{cases}$$

en additionnant les termes correspondants. Nous obtenons

$$\begin{cases} x = (1/2)y - (5/2) \\ y = 3 \end{cases}$$

après avoir divisé l'équation 2 par $7/2$. Encore une fois les opérations précédentes ne modifient pas l'ensemble des solutions de $(\diamondsuit)$. De la seconde équation nous obtenons que $y = 3$ et en remplaçant dans la première équation, nous obtenons

$$\begin{cases} x = (1/2)(3) - (5/2) = -1 \\ y = 3 \end{cases}$$

et il y a une et une seule solution

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Nous allons maintenant reprendre ce système mais en utilisant les matrices cette fois. Nous débutons pour résoudre $(\diamondsuit)$ avec la matrice augmentée obtenue en juxtaposant la matrice des constantes à la droite de la matrice des coefficients.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 1 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

Nous pouvons diviser la première ligne par 2 et nous obtenons alors la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -5/2 \\ 1 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

En soustrayant la première ligne de la deuxième ligne, nous obtenons

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -5/2 \\ 0 & 7/2 & 21/2 \end{bmatrix}$$

et ensuite en divisant la deuxième ligne par 7/2, nous obtenons

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -5/2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Finalement en additionnant (1/2) fois la deuxième ligne à la première ligne, nous obtenons

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ces opérations sur les lignes de la matrice augmentée sont équivalentes à celles effectuées sur les équations ci-dessus. Elles ne modifient pas les solutions. La solution est obtenue des entrées dans la colonne de droite.

2.1 Opérations élémentaires de lignes

Définition 2.4. Une **opération élémentaire de lignes** sur une matrice A consiste à modifier la matrice A pour obtenir une nouvelle matrice A' pour laquelle toutes les lignes sont les mêmes sauf une ou deux lignes. Il y a trois opérations élémentaires :

1. Remplacer une ligne par un multiple non nul de celle-ci, plus exactement nous remplaçons la i ième ligne L_i par la i ième ligne L_i multiplié par le scalaire $\alpha \neq 0$. Nous noterons cette opération par $L_i \longleftarrow \alpha L_i$.

2. Intervertir deux lignes, plus exactement nous intervertissons la i ième ligne L_i et la j ième ligne L_j. Nous noterons cette opération par $L_i \longleftrightarrow L_j$.

3. Remplacer une ligne par cette ligne à laquelle nous avons ajouté un multiple d'une autre ligne, plus exactement nous remplaçons la i ième ligne L_i par la somme de la i ième ligne L_i et de α fois la j ième ligne L_j, où $i \neq j$. Nous noterons cette opération par $L_i \longleftarrow L_i + \alpha L_j$.

Nous allons maintenant illustrer ces opérations dans un exemple en effectuant une série d'opérations élémentaires de ligne

Exemple 2.4.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 9 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow (1/3)L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 4/3 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow (3/4)L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + (1/3)L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Notation 2.1. Étant donné un système de m équations linéaires avec n inconnues :

$$AX = B \quad \text{(sous forme matricielle)}$$

où A est la matrice de format $m \times n$ des coefficients, B est la matrice de format $m \times 1$ des constantes et X est la matrice de format $n \times 1$ des inconnues, nous pouvons former la **matrice augmentée** $[A|B]$ **du système** de format $m \times (n+1)$ obtenue en juxtaposant la colonne B à la droite de la matrice A.

Exemple 2.5. Pour le système d'équations linéaires suivant

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 5 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}}_{B},$$

la matrice augmentée sera

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 5 & 4 \\ 1 & -2 & 5 & 1 & 9 \end{bmatrix}}_{[A|B]}$$

Proposition 2.1. *Soit un système de m équations linéaires à n inconnues : $AX = B$, sa matrice augmentée $[A|B]$ et une matrice $[A'|B']$ obtenue de $[A|B]$ après une* *opération élémentaire de lignes, où A' est la matrice de format $m \times n$ obtenue en prenant la n premières colonnes de $[A'|B']$ et B' est la matrice de format $m \times 1$ obtenue en prenant la colonne la plus à droite de $[A'|B']$. Alors les solutions du système d'équations linéaires $AX = B$ sont les mêmes que celles du nouveau système d'équations linéaires $A'X = B'$.*

Preuve. Pour vérifier cette proposition, il suffit de considérer individuellement chacune des opérations élémentaires de ligne et vérifier que celle-ci ne modifie pas l'ensemble des solutions. Cette preuve n'est pas très difficile. Dans ce qui suivra, nous ferons celle-ci dans le cas où le système a deux équations et deux inconnues. Le cas général est traité de façon similaire.

Considérons le système suivant :

$$(\spadesuit) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{array} \right\}$$

Sous forme matricielle, nous avons

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}}_{B}$$

Nous formons la matrice augmentée du système

$$[A|B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{bmatrix}$$

Si nous effectuons maintenant l'opération élémentaire de lignes $L_1 \longleftarrow \alpha L_1$, où $\alpha \neq 0$, nous obtenons

$$[A|B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \longleftarrow \alpha L_1} \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{bmatrix} = [A'|B']$$

Il nous faut donc considérer les solutions du nouveau système

$$(\clubsuit) \qquad \left\{ \begin{array}{c} \alpha a_{11}x + \alpha a_{12}y = \alpha b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{array} \right\}$$

Maintenant si (x_0, y_0) est une solution de $(\spadesuit)$, alors

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 = b_1 \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 = b_2 \end{array} \right\}.$$

En multipliant la première équation par α, nous obtenons les deux équations suivantes

$$\left\{\begin{array}{c} \alpha a_{11}x_0 + \alpha a_{12}y_0 = \alpha b_1 \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 = b_2 \end{array}\right\}$$

et (x_0, y_0) est une solution de (♣). Réciproquement si (x_0', y_0') est une solution de (♣), alors

$$\left\{\begin{array}{c} \alpha a_{11}x_0' + \alpha a_{12}y_0' = \alpha b_1 \\ a_{21}x_0' + a_{22}y_0' = b_2 \end{array}\right\}.$$

Comme $\alpha \neq 0$, nous pouvons diviser par α. En divisant la première équation par $\alpha \neq 0$, nous obtenons les deux équations suivantes

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_0' + a_{12}y_0' = b_1 \\ a_{21}x_0' + a_{22}y_0' = b_2 \end{array}\right\}.$$

et (x_0', y_0') est une solution de (♠).

Si nous effectuons cette fois l'opération élémentaire de lignes $L_1 \longleftrightarrow L_2$, nous obtenons

$$[A|B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \longleftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{11} & a_{12} & b_1 \end{bmatrix} = [A'|B']$$

Il nous faut donc considérer les solutions du nouveau système

$$(♣') \qquad \left\{\begin{array}{c} a_{21}x + a_{22}y = b_2 \\ a_{11}x + a_{12}y = b_1 \end{array}\right\}$$

L'opération a tout simplement intervertit les deux équations et clairement les solutions de (♠) et (♣′) sont les mêmes.

Si nous considérons l'opération élémentaire de ligne $L_2 \longleftarrow L_2 + \alpha L_1$, nous obtenons

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{bmatrix}}_{[A|B]} \xrightarrow{L_2 \longleftarrow L_2 + \alpha L_1} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} + \alpha a_{11} & a_{22} + \alpha a_{12} & b_2 + \alpha b_1 \end{bmatrix}}_{[A'|B']}$$

Il nous faut donc considérer les solutions du nouveau système

$$(♣'') \qquad \left\{\begin{array}{c} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ (a_{21} + \alpha a_{11})x + (a_{22} + \alpha a_{12})y = (b_2 + \alpha b_1) \end{array}\right\}$$

Maintenant si (x_0, y_0) est une solution de (♠), alors

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 = b_1 \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 = b_2 \end{array} \right\}.$$

En multipliant la première équation par α et en ajoutant le résultat à la seconde, nous obtenons les deux équations suivantes

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 = b_1 \\ (a_{21} + \alpha a_{11})x_0 + (a_{22} + \alpha a_{12})y_0 = (b_2 + \alpha b_1) \end{array} \right\}$$

car nous avons en distribuant et en factorisant

$$(a_{21}x_0+a_{22}y_0)+\alpha(a_{11}x_0+a_{12}y_0) = (a_{21}+\alpha a_{11})x_0+(a_{22}+\alpha a_{12})y_0 = b_2+\alpha b_1.$$

De ceci, nous pouvons conclure que (x_0, y_0) est une solution de (♣″). Réciproquement si (x'_0, y'_0) est une solution de (♣″), alors

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{11}x'_0 + a_{12}y'_0 = b_1 \\ (a_{21} + \alpha a_{11})x'_0 + (a_{22} + \alpha a_{12})y'_0 = (b_2 + \alpha b_1) \end{array} \right\}$$

En multipliant la première équation par $-\alpha$ et en ajoutant le résultat à la seconde, nous obtenons les deux équations suivantes

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{11}x'_0 + a_{12}y'_0 = b_1 \\ a_{21}x'_0 + a_{22}y'_0 = b_2 \end{array} \right\}$$

car nous avons en distribuant et en factorisant

$$\begin{aligned} &((a_{21} + \alpha a_{11})x'_0 + (a_{22} + \alpha a_{12})y'_0) - \alpha(a_{11}x'_0 + a_{12}y'_0) \\ &\qquad = a_{21}x'_0 + a_{22}y'_0 = (b_2 + \alpha b_1) - \alpha b_1 = b_2. \end{aligned}$$

De ceci, nous avons que (x'_0, y'_0) est une solution de (♠).

□

Nous avons ainsi vu que les opérations élémentaires de ligne ne modifient pas l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires. Notre stratégie pour résoudre le système d'équations linéaires $AX = B$ est d'effectuer une série d'opérations élémentaires de lignes en débutant avec la matrice augmentée $[A|B]$ du système

$$[A|B] \rightsquigarrow \text{série d'opérations élémentaires de ligne} \rightsquigarrow [A'|B']$$

pour obtenir ultimement une matrice augmentée $[A'|B']$ d'un système d'équations linéaires $A'X = B'$ plus simple à résoudre.

Nous allons maintenant décrire dans la prochaine section les conditions sur la matrice augmentée $[A'|B']$ qui font en sorte que le système $A'X = B'$ est simple à résoudre et nous montrerons qu'il est toujours possible d'obtenir une telle matrice au moyen de l'algorithme d'élimination de Gauss-Jordan.

2.2 Algorithme d'élimination de Gauss-Jordan

L'algorithme n'est pas seulement utile pour résoudre des systèmes d'équations linéaires. Il sera aussi utiliser pour déterminer si une matrice est inversible et calculer son inverse, ainsi que pour le calcul du polynôme minimal d'une matrice carrée. **Il est donc très important de bien comprendre cet algorithme de façon générale.**

Définition 2.5. Soit $C = [c_{ij}]$ une matrice quelconque de format $m \times n$. (C n'est pas nécessairement la matrice augmentée d'un système d'équations linéaires.) Nous dirons que C est une **matrice réduite** si elle satisfait les trois conditions suivantes :

1. Toutes les lignes nulles sont en dessous des lignes non nulles de C.
2. Dans chacune des lignes non nulles, la première entrée non nulle lorsque nous lisons de la gauche vers la droite est 1. La colonne dans laquelle est située ce premier 1 est appelée **colonne pivot** et ce premier 1 est appelé le **1 pivot** de cette ligne non nulle.
3. Dans la colonne pivot d'une ligne non nulle, à l'exception du 1 pivot, toutes les autres entrées sont nulles.

La matrice C est dite **réduite échelonnée** si les colonnes pivots apparaissent en plus en ordre croissant, c'est-à-dire si les lignes i et $i+1$ sont toutes les deux non nulles et que j_i et j_{i+1} sont les colonnes pivots de ces deux lignes non nulles, alors $j_i < j_{i+1}$.

Exemple 2.6. Nous allons maintenant énumérer plusieurs matrices et indiquer si elles sont réduites ou encore réduites échelonnées.

– La matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

est réduite, mais elle n'est pas réduite échelonnée. Ses colonnes pivots sont $j_1 = 2$, $j_2 = 1$ et $j_3 = 4$.

– La matrice
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & 0 & 4 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
est réduite échelonnée. Ses colonnes pivots sont dans l'ordre $j_1 = 2$, $j_2 = 4$ et $j_3 = 7$.
– La matrice
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$
n'est pas réduite, parce que la condition 3 pour être réduite n'est pas vérifiée pour la troisième colonne.
– La matrice
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -1 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$
n'est pas réduite, parce que la condition 2 pour être réduite n'est pas vérifiée pour les lignes non nulles 2 et 3.

Nous voulons à partir d'une matrice C obtenir une matrice réduite échelonnée C' à la suite d'une série d'opérations élémentaires de ligne. Nous verrons plus tard que peu importe la série d'opérations élémentaires de ligne effectuées nous obtiendrons toujours la même matrice réduite échelonnée C' lorsque nous commençons avec la matrice C

Nous allons maintenant décrire l'**algorithme d'élimination de Gauss-Jordan**.

– Étape 1 : S'il y a une entrée non nulle dans la première colonne, disons à la ligne i, alors il faut effectuer l'opération élémentaire de ligne $L_1 \longleftrightarrow L_i$ de façon à obtenir une entrée non nulle à la première ligne. Si toutes les entrées de la première colonne sont nulles, il faut passer à la colonne 2 et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il y ait une colonne ayant une entrée non nulle et procéder comme ci-dessus de façon à obtenir une entrée non nulle à la première ligne.
– Étape 2 : Si la première entrée non nulle de la ligne 1 est $\alpha \neq 0$, alors il faut effectuer l'opération élémentaire de ligne $L_1 \longleftarrow \alpha^{-1}L_1$ et nous aurons ainsi que la première entrée non nulle de la première ligne sera 1. Ce sera le 1 pivot de la première ligne et la colonne pivot sera la colonne j_1.
– Étape 3 : Il faut maintenant utiliser ce 1 pivot pour annuler toutes les autres entrées non nulles dans la colonne pivot j_1 en effectuant des opérations élémentaires de ligne de la forme $L_i \longleftarrow L_i - a_{ij_1}L_1$, où a_{ij_1} est l'entrée non

nulle sur la ligne i. Après cette série d'opérations toutes les entrées sur la colonne pivot j_1 seront nulles sauf pour ce qui est du 1 pivot.

– Étape 4 : Il faut maintenant revenir à l'étape 1, mais cette fois en considérant toutes les lignes sauf celles contenant un 1 pivot et à l'étape 3, il faut annuler toutes les entrées d'une colonne pivot, celles au-dessus et en-dessous d'un 1 pivot. À la fin de tout ce processus, nous obtenons une matrice réduite échelonnée.

Exemple 2.7. Nous allons illustrer cet algorithme d'élimination de Gauss-Jordan.

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \longleftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \longleftarrow (1/2)L_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_5 \longleftarrow L_5 + 2L1]{\substack{L_3 \longleftarrow L_3 - L1 \\ L_4 \longleftarrow L_4 - 2L1}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \longleftarrow (1/3)L_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{L_1 \longleftarrow L_1 - (1/2)L2 \\ L_3 \longleftarrow L_3 + (1/2)L2 \\ L_5 \longleftarrow L_5 - 2L2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \longleftrightarrow L_4} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cette dernière matrice est l'unique matrice réduite échelonnée C'.

Remarque 2.1. Nous verrons plus tard que si nous effectuons une série d'opérations élémentaires débutant avec la matrice C et se terminant par une matrice réduite échelonnée C_1 :

$$C \rightsquigarrow \text{série d'opérations élémentaires de ligne} \rightsquigarrow C_1$$

et une autre série d'opérations élementaires débutant aussi avec la matrice C et se terminant par une matrice réduite échelonnée C_2 :

$$C \rightsquigarrow \text{série d'opérations élémentaires de ligne} \rightsquigarrow C_2,$$

alors $C_1 = C_2$. La preuve de ceci fait appel aux notions de combinaison linéaire de vecteurs et de base d'espace linéaire. Nous étudierons ces notions plus tard. Pour l'instant, nous allons accepter ce résultat d'unicité de matrice réduite échelonnée.

Définition 2.6. Étant donné une matrice C et l'unique matrice réduite échelonnée C' obtenue de C après une série d'opérations élementaires débutant avec la matrice C :

$$C \rightsquigarrow \text{série d'opérations élémentaires de ligne} \rightsquigarrow C'$$

alors le **rang** de C noté $rg(C)$ est le nombre de lignes non nulles de C' ou encore le nombre de 1 pivots. Comme C' est unique, le rang est bien défini.

Exemple 2.8. Si nous reprenons la matrice C de l'exemple 2.7, alors l'unique matrice réduite échelonnée C' obtenue de C après une série d'opérations élementaires débutant avec la matrice C est

$$C' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Celle-ci a trois lignes non nulles. Conséquemment le rang de C est

$$rg\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}\right) = 3.$$

2.3 Solutions d'un système d'équations linéaires

Nous avons maintenant tout ce qu'il nous faut pour déterminer la solution générale d'un système d'équations linéaires.

Considérons le système d'équations linéaires

$$AX = B \quad (*)$$

où
- A est la matrice des coefficients du système et est une matrice de format $m \times n$;
- B est la matrice des constantes du système et est une matrice de format $m \times 1$;
- X est la matrice des inconnues et est une matrice de format $n \times 1$.

Dans ce système, il y a m équations linéaires avec n inconnues. Pour résoudre $(*)$, nous formons la matrice augmentée $[A|B]$ du système $(*)$ et ensuite nous utilisons l'algorithme d'élimination de Gauss-Jordan

$$[A|B] \rightsquigarrow \text{opérations élémentaires de ligne} \rightsquigarrow [A'|B']$$

pour obtenir l'unique matrice réduite échelonnée $[A'|B']$. Nous pouvons maintenant décrire l'ensemble des solutions de $(*)$. C'est ce qui est fait dans la proposition suivante :

Proposition 2.2. (a) *Si le rang $rg(A)$ (c'est-à-dire le nombre de lignes non nulles de A') est strictement plus petit que le rang $rg([A|B])$ c'est-à-dire le nombre de lignes non nulles de $[A'|B']$, alors le système $AX = B$ n'a aucune solution. Dans ce cas, nous dirons que le système $(*)$ est inconsistant.*

(b) *Si le rang $rg(A)$ (c'est-à-dire le nombre de lignes non nulles de A') est égal au rang $rg([A|B])$ (c'est-à-dire le nombre de lignes non nulles de $[A'|B']$) et est aussi égal au nombre d'inconnues n, alors le système $AX = B$ a une et une seule solution. Nous obtenons facilement cette unique solution du système $A'X = B'$.*

(c) *Si le rang $rg(A)$ (c'est-à-dire le nombre de lignes non nulles de A') est égal au rang $rg([A|B])$ (c'est-à-dire le nombre de lignes non nulles de $[A'|B']$) et est strictement inférieur au nombre d'inconnues n, alors le système $AX = B$ a une infinité de solutions. Ces solutions peuvent être obtenues de $A'X = B'$ en séparant les inconnues en deux types : les inconnues ne correspondant pas aux colonnes pivots comme étant des variables libres et les autres inconnues, celles correspondant aux colonnes pivots comme étant des variables dépendantes. En utilisant le système $A'X = B'$, nous pouvons exprimer les variables dépendantes en fonction des variables libres et il est alors possible d'écrire la solution générale en fonction des variables libres seulement.*

Preuve. (a) Dans ce cas, parce que le rang $rg(A)$ est strictement plus petit que le rang $rg([A|B])$, ceci signifie que la matrice réduite échelonnée

$$[A'|B'] \text{ sera de la forme } \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire que la dernière ligne non nulle de la matrice $[A'|B']$ a comme colonne pivot : la dernière colonne de $[A'|B']$, c'est-à-dire B'. Si nous considérons maintenant le système d'équations linéaires $A'X = B'$. Ce système a le même ensemble de solutions que le système $AX = B$. De plus une de ces équations, celle correspondant à la dernière ligne non nulle sera $0 = 1$. Ceci est impossible et il n'y a donc aucune solution.

(b) Dans ce cas, parce que le rang $rg(A)$ est égal au rang $rg([A|B])$ et ces deux rangs sont égaux au nombre d'inconnues n, ceci signifie que la matrice réduite échelonnée

$$[A'|B'] \text{ sera de la forme } \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & & \dots & 0 & b'_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & b'_2 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 & \vdots & 0 & b'_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & b'_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si nous considérons maintenant le système d'équations linéaires $A'X = B'$. Ce système a le même ensemble de solutions que le système $AX = B$. Il est aussi égal à

$$(*') \quad \begin{cases} x_1 = b'_1 \\ x_2 = b'_2 \\ \vdots \\ x_i = b'_i \\ \vdots \\ x_n = b'_n \\ 0 = 0 \\ \vdots \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Donc la solution est unique et est obtenue de $A'X = B'$.

(c) Dans ce cas, parce que le rang $rg(A)$ est égal au rang $rg([A|B])$ et ces deux rangs sont strictement inférieurs au nombre d'inconnues n, ceci signifie que la matrice réduite échelonnée

$$[A'|B'] \text{ sera de la forme } \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & b'_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & b'_i \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & b'_r \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

Si nous considérons maintenant le système d'équations linéaires $A'X = B'$. Ce système a le même ensemble de solutions que le système $AX = B$. De plus à chacune des lignes non nulles de $[A'|B']$, disons la ligne i, nous obtenons une équation de la forme

$$x_{j_i} + \text{ équations linéaires ne contenant que des variables libres } = b'_i$$

où j_i est la colonne pivot de la ligne non nulle i. Nous pouvons donc exprimer les variables dépendantes en fonction des variables libres et il y a une infinité de solutions, une pour chacune des valeurs numériques possibles attribuées aux variables libres. $\square$

Nous allons maintenant illustrer la proposition 2.2 dans plusieurs exemples.

Exemple 2.9. Résoudre le système d'équations linéaires suivant

$$(*)\quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 = -7 \\ 2x_2 - x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 12 \end{cases}$$

Sous forme matricielle, nous avons

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 10 \\ -7 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix}}_{B}$$

Nous formons la matrice augmentée $[A|B]$ et ensuite nous appliquons l'algorithme de Gauss-Jordan à cette matrice pour obtenir une matrice réduite échelonnée.

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ -1 & -2 & -3 & -1 & -7 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_4 \longleftarrow L_4 - L1]{L_2 \longleftarrow L_2 + L1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \longleftarrow L_3 - 2L2]{L_1 \longleftarrow L_1 - 3L2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \longleftarrow L_2 + L3]{L_1 \longleftarrow L_1 - 5L3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{L_1 \longleftarrow L_1 + 4L4 \\ L_2 \longleftarrow L_2 - L4 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - L_4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Cette dernière matrice est réduite échelonnée et nous avons

$$\begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{A'} & \underbrace{\begin{matrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}}_{B'} \end{bmatrix}$$

Dans ce cas, nous avons que le rang $rg(A)$ de A est 4, le rang $rg([A|B])$ de $[A|B]$ est 4 et le nombre d'inconnues est aussi 4. Nous sommes donc dans la situation (b) de la proposition 2.2. Il y a donc une et une seule solution du système $(*)$. Pour obtenir cette solution, il nous faut considérer le système $A'X = B'$. Nous avons ainsi l'unique solution

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Exemple 2.10. Résoudre le système d'équations linéaires suivant

$$(*) \quad \begin{cases} x_3 - 3x_4 = -13 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 11x_4 = 51 \\ -3x_1 - 6x_2 + x_3 - 6x_4 = -31 \end{cases}$$

Sous forme matricielle, nous avons

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -3 & 11 \\ -3 & -6 & 1 & -6 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -13 \\ 6 \\ 51 \\ -31 \end{bmatrix}}_{B}$$

Nous formons la matrice augmentée $[A|B]$ et ensuite nous appliquons l'algorithme de Gauss-Jordan à cette matrice pour obtenir une matrice réduite échelonnée.

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 & -13 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & -3 & 11 & 51 \\ -3 & -6 & 1 & -6 & -31 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \longleftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -13 \\ 2 & 4 & -3 & 11 & 51 \\ -3 & -6 & 1 & -6 & -31 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_4 \longleftarrow L_4 + 3L1]{L_3 \longleftarrow L_3 - 2L1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & 39 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -13 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_4 \longleftarrow L_4 - L2]{L_3 \longleftarrow L_3 + 3L2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cette dernière matrice est réduite échelonnée et nous avons

$$\begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A'} & \underbrace{\begin{matrix} 6 \\ -13 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}}_{B'} \end{bmatrix}$$

Dans ce cas, nous avons que le rang $rg(A)$ de A est 2, le rang $rg([A|B])$ de $[A|B]$ est aussi égal à 2 et le nombre d'inconnues est 4. Nous sommes donc dans la situation (c) de la proposition 2.2. Il y a une infinité de solutions au système $(*)$. Les première et troisième colonnes sont les colonnes pivots et conséquemment les inconnues x_1 et x_3 sont les variables dépendantes, Les autres inconnues x_2 et x_4 sont les variables libres. Si nous écrivons le système $A'X = B'$, nous obtenons

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -13 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire

$$(*') \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 6 \\ x_3 - 3x_4 = -13 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Nous pouvons exprimer les variables dépendantes en fonction des variables libres

$$\begin{cases} x_1 = 6 - 2x_2 - x_4 \\ x_3 = -13 + 3x_4 \end{cases}$$

La solution générale du système $(*)$ est alors

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 - 2x_2 - x_4 \\ x_2 \\ -13 + 3x_4 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad \text{où } x_2, x_4 \text{ sont des nombres quelconques}$$

Comme x_2, x_4 peuvent prendre n'importe quelle valeur, il y a une infinité de solutions. Nous pouvons constater qu'il s'agit bien de solutions de $(*)$ en remplaçant dans les équations et en constatant que celles-ci sont toutes vérifiées. En effet,

$$(*) \qquad \begin{cases} (-13 + 3x_4) - 3x_4 = -13 \\ (6 - 2x_2 - x_4) + 2x_2 + x_4 = 6 \\ 2(6 - 2x_2 - x_4) + 4x_2 - 3(-13 + 3x_4) + 11x_4 = 51 \\ -3(6 - 2x_2 - x_4) - 6x_2 + (-13 + 3x_4) - 6x_4 = -31 \end{cases}$$

Exemple 2.11. Résoudre le système d'équations linéaires suivant

$$(*) \qquad \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 = -1 \\ -2x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$$

Sous forme matricielle, nous avons

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}}_{B}$$

Nous formons la matrice augmentée $[A|B]$ et ensuite nous appliquons l'algorithme de Gauss-Jordan à cette matrice pour obtenir une matrice réduite échelonnée.

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \longleftrightarrow (1/2)L_1} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 \\ 3 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \longleftarrow L_3+2L1]{L_2 \longleftarrow L_2-3L1} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 9/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \longleftarrow (2/9)L_2} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -5/9 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \longleftarrow L_1+(1/2)L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2/9 \\ 0 & 1 & -5/9 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \longleftarrow (1/5)L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2/9 \\ 0 & 1 & -5/9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_2 \longleftarrow L_2-(5/9)L3]{L_1 \longleftarrow L_1-(2/9)L3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cette dernière matrice est réduite échelonnée et nous avons

$$\begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}}_{A'} & \underbrace{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}}_{B'} \end{bmatrix}$$

Dans ce cas, nous avons que le rang $rg(A)$ de A est 2 et le rang $rg([A|B])$ de $[A|B]$ est égal à 3. Comme ces deux rangs sont distincts, nous sommes donc dans la situation (a) de la proposition 2.2 et le système $(*)$ n'a pas de solutions. Il est inconsistant.

Il est facile de vérifier que $(*)$ n'a pas de solution. En effet, une solution de $AX = B$ sera aussi une solution de $A'X = B'$. Mais si nous écrivons $A'X = B'$, nous obtenons

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire

$$(*') \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

Mais cette dernière équation est impossible.

Rappelons la définition 2.3. Un système de m équations linéaires $AX = B$ avec n inconnues est dit être **homogène** si et seulement si B est la matrice nulle $B = 0_{m\times 1}$, c'est-à-dire que toutes les entrées de B sont nulles.

Remarque 2.2. Tout système homogène d'équations linéaires $AX = 0_{m\times 1}$ a toujours la solution nulle $X = 0_{n\times 1}$ parmi ses solutions. Cette solution $X = 0_{n\times 1}$ est appelée la **solution triviale** du système homogène. En effet, $A0_{n\times 1} = 0_{m\times 1}$. Pour de tels systèmes, il n'y a que les possibilités (b) et (c) dans la proposition 2.2 qui peuvent se produire. En effet, comme il y a toujours au moins une solution, le cas (a) ne peut pas de produire pour les systèmes homogènes.

Conséquemment nous obtenons facilement le corollaire suivant à la proposition 2.2.

Corollaire 2.1. *Soit un système homogène de m équations linéaires $AX = 0_{m\times 1}$ avec n inconnues*

(a) *Si le rang $rg(A)$ (c'est-à-dire le nombre de lignes non nulles de A') est égal au nombre d'inconnues n, alors le système $AX = 0_{m\times 1}$ a une et une seule solution : la solution triviale $X = 0_{n\times 1}$.*

(b) *Si le rang $rg(A)$ (c'est-à-dire le nombre de lignes non nulles de A') est strictement inférieur au nombre d'inconnues n, alors le système homogène $AX = 0_{m\times 1}$ a une infinité de solutions. Ces solutions peuvent être obtenues de $A'X = 0_{m\times 1}$ en séparant les inconnues en deux types : les inconnues ne correspondant pas aux colonnes pivots comme étant des variables libres et les autres inconnues, celles correspondant aux colonnes pivots comme étant des variables dépendantes. En utilisant le système $A'X = 0_{m\times 1}$, nous pouvons exprimer les variables dépendantes en fonction des variables libres et il est alors possible d'écrire la solution générale en fonction des variables libres seulement.*

Nous allons maintenant illustrer ce corollaire dans des exemples.

Exemple 2.12. Résoudre le système d'équations linéaires suivant

$$(*) \quad \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_3 - 9x_4 = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 9x_4 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases}$$

Sous forme matricielle, nous avons

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \\ 4 & 4 & 3 & -9 \\ -1 & -1 & 2 & -6 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B}$$

Nous procédons comme dans le cas non homogène. Nous formons la matrice augmentée $[A|0_{m\times 1}]$ et ensuite nous appliquons l'algorithme de Gauss-Jordan à cette matrice pour obtenir une matrice réduite échelonnée.

$$[A|0] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & -9 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -6 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \longleftarrow (1/2)L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & -9 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_4 \longleftarrow L_4 + L1]{L_3 \longleftarrow L_3 - 4L1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & -9/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \longleftarrow (1/3)L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & -9/2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_4 \longleftarrow L_4 - (3/2)L_2]{\substack{L_1 \longleftarrow L_1 + (1/2)L2 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - 5L2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cette dernière matrice est réduite échelonnée et nous avons

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A'} \underbrace{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}}_{B'}$$

Dans ce cas, nous avons que le rang $rg(A)$ de A est 2 et le nombre d'inconnues est 4. Donc il y a une infinité de solutions. Les première et troisième colonnes sont les colonnes pivots et conséquemment les inconnues x_1 et x_3 sont les variables dépendantes. Les autres inconnues x_2 et x_4 sont les variables libres. Si nous écrivons le système $A'X = B'$, nous obtenons

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire

$$(*') \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 - 3x_4 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Nous pouvons exprimer les variables dépendantes en fonction des variables libres

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = 3x_4 \end{cases}$$

La solution générale du système $(*)$ est alors

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ 3x_4 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad \text{où } x_2, x_4 \text{ sont des nombres quelconques.}$$

Comme x_2, x_4 peuvent prendre n'importe quelle valeur, il y a une infinité de solutions. Il s'agit bien de solutions de $(*)$. Il suffit de remplaçer dans les équations et en constatant que celles-ci sont toutes vérifiées. En effet,

$$(*) \quad \begin{cases} 2(-x_2) + 2x_2 - (3x_4) + 3x_4 = 0 \\ 3(3x_4) - 9x_4 = 0 \\ 4(-x_2) + 4x_2 + 3(3x_4) - 9x_4 = 0 \\ -(-x_2) - x_2 + 2(3x_4) - 6x_4 = 0 \end{cases}$$

Exemple 2.13. Résoudre le système d'équations linéaires suivant

$$(*) \quad \begin{cases} 4x + y - z = 0 \\ -2x + 4y + 3z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$$

Sous forme matricielle, nous avons

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B}$$

Nous procédons comme dans le cas non homogène. Nous formons la matrice augmentée $[A|0_{m\times 1}]$ et ensuite nous appliquons l'algorithme de Gauss-Jordan à cette matrice pour obtenir une matrice réduite échelonnée.

$$[A|0] = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \longleftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \longleftarrow -L_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_4 \longleftarrow L_4 - 4L1]{L_2 \longleftarrow L_2 + 2L1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \longleftarrow (1/2) L_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \longleftarrow L_3 - 5L2]{L_1 \longleftarrow L_1 + L2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \longleftrightarrow (2) L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \longleftarrow L_2 - (1/2) L3]{L_1 \longleftarrow L_1 + (1/2) L3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Cette dernière matrice est réduite échelonnée et nous avons

$$\left[\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{A'} \; \underbrace{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}}_{B'}\right]$$

Dans ce cas, nous avons que le rang $rg(A)$ de A est 3 et est égal au nombre d'inconnues. Il y a donc une et une seule solution du système $(*)$, la solution triviale

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2.4 Interpolation d'une fonction

Pour terminer ce chapitre, nous allons présenter une application de la résolution de système d'équations linéaires : l'interpolation d'une fonction d'une seule variable par un polynôme.

Il arrive parfois que nous connaissions les valeurs d'une fonction d'une fonction qu'à un nombre fini de points et nous voulons évaluer cette fonction entre ces points, c'est ce qui est appelé **interpoler la fonction**. Rien nous indique que la valeur interpolée est égale à celle de la fonction, mais si la fonction n'est pas trop mauvaise, la valeur interpolée est approximativement égale à celle de la fonction. Il est aussi souvent possible de majorer l'erreur entre les valeurs interpolée et exacte de la fonction. Nous allons maintenant seulement décrire comment nous pouvons effectuer cette interpolation polynomiale au moyen d'un système d'équations linéaires.

Étant donné une fonction $f(x)$ pour laquelle nous connaissons $n+1$ valeurs : $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ aux $(n+1)$ points distincts : $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, nous cherchons à déterminer un polynôme $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ de degré n pour lequel $P(x_0) = f(x_0), P(x_1) = f(x_1), \ldots, P(x_n) = f(x_n)$. Une fois ce polynôme $P(x)$ obtenu, nous pouvons interpoler la fonction $f(x)$ au point $x = \alpha$ par $P(\alpha)$. Nous voulons donc déterminer les $(n+1)$ coefficients a_0, $a_1, \ldots, a_n$ tels que

$$(\spadesuit) \qquad \begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n = f(x_1) \\ \qquad \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n = f(x_0) \end{cases}$$

Il s'agit d'un système de $(n+1)$ equations linéaires avec $(n+1)$ inconnues : a_0, $a_1, \ldots, a_n$, les coefficients du polynôme $P(x)$. Il est possible de montrer, parce que les $(n+1)$ points $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont distincts, que le système $(\spadesuit)$ a une et une seule solution. Nous allons pour l'instant accepter ce résultat.

Nous allons maintenant illustrer ce processus d'interpolation.

Exemple 2.14. Supposons que nous avons une fonction $f(x)$ telle que $f(0) = 1$, $f(0{,}25) = 0{,}9689$, $f(0{,}50) = 0{,}8776$ et $f(0{,}75) = 0{,}7317$. Ici $f(x) = \cos(x)$, où x est mesuré en radian. Nous allons cependant ignorer cette information et nous aimerions évaluer approximativement $f(0{,}4)$. Il nous faut donc déterminer un polynôme de degré 3 : $P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ tel que

$$\begin{cases} P(0) = f(0) = 1; \\ P(0{,}25) = f(0{,}25) = 0{,}9689; \\ P(0{,}5) = f(0{,}5) = 0{,}8776; \\ P(0{,}75) = f(0{,}75) = 0{,}7317. \end{cases}$$

Nous pouvons réécrire ces 4 égalités en utilisant le fait que $P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$. Nous obtenons alors un système de 4 équations linéaires avec 4 inconnues :

a, b, c, d :

$$(\spadesuit) \quad \begin{cases} a = 1 \\ a + b(0{,}25) + c(0{,}25)^2 + d(0{,}25)^3 = 0{,}9689 \\ a + b(0{,}5) + c(0{,}5)^2 + d(0{,}5)^3 = 0{,}8776 \\ a + b(0{,}75) + c(0{,}75)^2 + d(0{,}75)^3 = 0{,}7317 \end{cases}$$

Sous forme matricielle, ce système devient

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & (0{,}25) & (0{,}25)^2 & (0{,}25)^3 \\ 1 & (0{,}5) & (0{,}5)^2 & (0{,}5)^3 \\ 1 & (0{,}75) & (0{,}75)^2 & (0{,}75)^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}9689 \\ 0{,}8776 \\ 0{,}7317 \end{bmatrix}$$

Nous ne ferons pas les calculs de l'algorithme d'élimination de Gauss-Jordan, mais nous obtenons en arrondissant que

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \text{ est approximativement égal à } \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}003\,466\,667 \\ -0{,}5264 \\ 0{,}059\,733\,333 \end{bmatrix}$$

Pour terminer si nous voulons interpoler la valeur $f(0{,}4)$, il nous faudrait évaluer

$$P(x) = 1 + 0{,}003\,466\,667x - 0{,}5264x^2 + 0{,}059\,733\,333x^3$$

à $0{,}4$. Si nous faisons ceci, alors

$$\begin{aligned} P(0{,}4) &= 1 + 0{,}003\,466\,667(0{,}4) - 0{,}5264(0{,}4)^2 + 0{,}059\,733\,333(0{,}4)^3 \\ &= 0{,}920\,985\,6. \end{aligned}$$

Noter que la valeur exacte est $f(0{,}4) = \cos(0{,}4) = 0{,}921\,060\,994$. Nous voyons que $P(0{,}4) \approx f(0{,}4)$. L'erreur est de l'ordre de 10^{-3}.

2.5 Exercices

Exercice 2.1. Pour chacune des matrices suivantes, indiquer si elle est réduite, réduite échelonnée.

(a)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 4 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(c)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 11 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

Exercice 2.2. Pour chacune des matrices suivantes, effectuer une série d'opérations élémentaires de ligne pour obtenir à la suite de celles-ci une matrice réduite échelonnée et de plus indiquer son rang. Il faut utiliser l'algorithme de Gauss-Jordan.

(a)

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 8 & -4 \\ 3 & 3 & 2 & 12 & -1 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -4 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & -5 & 16 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 2 & -1 & 12 & -1 \end{bmatrix}$$

(c)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Exercice 2.3. Résoudre chacun des systèmes d'équations linéaires suivants :

(a)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 15 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -16 \\ -5 \\ 11 \\ -13 \end{bmatrix}$$

(c)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

(d)

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -8 & 1 & -8 \\ 1 & -5 & -11 & -1 & -13 \\ 1 & 0 & -1 & 6 & -5 \\ 3 & -1 & -5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ -2 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Exercice 2.4. Soit une fonction $f(x)$ telle que ses valeurs aux points 0, 1, 2 et 3 sont les suivantes :

$$f(0) = 2, \quad f(1) = -1, \quad f(2) = 3 \quad \text{et} \quad f(3) = 5$$

(a) Déterminer l'unique polynôme d'interpolation

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

de degré 3 tel que

$$P(0) = f(0), \quad P(1) = f(1), \quad P(2) = f(2) \quad \text{et} \quad P(3) = f(3).$$

(b) Est-ce qu'il existe un polynôme $Q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$ de degré 2 tel que

$$Q(0) = f(0), \quad Q(1) = f(1), \quad Q(2) = f(2) \quad \text{et} \quad Q(3) = f(3).$$

Chapitre 3

Inversion de matrices

Dans ce chapitre, nous allons premièrement décrire un algorithme qui nous permet de déterminer si une matrice carrée est inversible et si elle l'est, quel est son inverse. Cet algorithme se fonde sur le fait qu'une opération élémentaire de ligne est tout simplement équivalent à multiplier à gauche par une matrice. Une fois cette observation faite, nous décrirons l'algorithme et le démontrerons. Ensuite nous verrons une application de l'inverse en analyse intersectorielle. Nous terminerons le chapitre avec une autre approche pour le calcul de l'inverse d'une matrice carrée au moyen de son polynôme minimal.

3.1 Matrices élémentaires

Il nous faudra faire deux observations sur les opérations élémentaires de ligne, la première concerne un lien entre ces opérations et la multiplication à gauche, alors que la seconde porte sur l'inversibilité de ces opérations.

Définition 3.1. Étant donné une opération élémentaire de ligne $\mathcal{O}p$, alors la **matrice élémentaire d'ordre** m associée à cette opération est la matrice carrée d'ordre m obtenue à partir de la matrice identité I_m en effectuant cette opération. Nous noterons par $E_m(\mathcal{O}p)$: cette matrice élémentaire. Nous avons donc

$$I_m \xrightarrow{\mathcal{O}p} E_m(\mathcal{O}p)$$

Nous avons illustré cette notion ci-dessous.

Exemple 3.1. – La matrice élémentaire d'ordre 4 associée à l'opération élémentaire de ligne $L_3 \longleftarrow L_3 + 2L_1$ est

$$E_4(L_3 \longleftarrow L_3 + 2L_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

parce que

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \longleftarrow L_3 + 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_4(L_3 \longleftarrow L_3 + 2L_1).$$

– La matrice élémentaire d'ordre 3 associée à l'opération élémentaire de ligne $L_1 \longleftrightarrow L_3$ est

$$E_3(L_1 \longleftrightarrow L_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

parce que

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \longleftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E_3(L_1 \longleftrightarrow L_3).$$

– La matrice élémentaire d'ordre 4 associée à l'opération élémentaire de ligne $L_3 \longleftarrow 5L_3$ est

$$E_4(L_3 \longleftarrow 5L_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

parce que

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \longleftarrow 5L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_4(L_3 \longleftarrow 5L_3).$$

Nous pouvons maintenant décrire le lien entre l'action d'opérations élémentaires de ligne sur une matrice et la multiplication à gauche par des matrices élémentaires sur cette même matrice.

Proposition 3.1. *Soit une matrice C de format $m \times n$ et C' la matrice obtenue de C à la suite de l'opération élémentaire de ligne $\mathcal{O}p$, c'est-à-dire*

$$C \xrightarrow{\mathcal{O}p} C',$$

alors

$$C' = E_m(\mathcal{O}p)C.$$

Ainsi C' est obtenue en multipliant C à gauche par la matrice élémentaire $E_m(\mathcal{O}p)$.

Preuve. Il suffit de vérifier ceci pour chacune des opérations élémentaires de ligne. Cette vérification est facile. Nous allons plutôt illustrer ceci par quelques exemples. $\square$

Exemple 3.2. Soit la matrice C de format 3×4 suivante :

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

– Si nous considérons l'opération élémentaire de ligne $L_3 \longleftarrow L_3 + 2L_2$, alors nous aurons

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \longleftarrow L_3+2L_2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 2 \\ 2 & -9 & 2 & 6 \end{bmatrix} = C'$$

Dans ce cas, la matrice élémentaire correspondante est

$$E_3(L_3 \longleftarrow L_3 + 2L_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

et nous avons que

$$\begin{aligned} E_3(L_3 \longleftarrow L_3 + 2L_2)C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 2 \\ 2 & -9 & 2 & 6 \end{bmatrix} = C' \end{aligned}$$

– Si nous considérons l'opération élémentaire de ligne $L_1 \longleftrightarrow L_3$, alors nous aurons

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \longleftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -4 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = C''$$

Dans ce cas, la matrice élémentaire correspondante est

$$E_3(L_1 \longleftrightarrow L_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et nous avons que

$$\begin{aligned} E_3(L_1 \longleftrightarrow L_3)C &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -4 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = C'' \end{aligned}$$

– Si nous considérons l'opération élémentaire de ligne $L_2 \longleftarrow 3L_2$, alors nous aurons

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \longleftarrow 3L_2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & -12 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = C'''$$

Dans ce cas, la matrice élémentaire correspondante est

$$E_3(L_2 \longleftarrow 3L_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et nous avons que

$$\begin{aligned} E_3(L_2 \longleftarrow 3L_2)C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & -12 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = C''' \end{aligned}$$

Il nous faut maintenant noter une seconde observation.

Proposition 3.2. *Soit $E = E_m(\mathcal{O}p)$, la matrice élémentaire d'ordre m associée à l'opération élémentaire de ligne $\mathcal{O}p$. Alors la matrice E est inversible et son inverse E^{-1} est la matrice élémentaire d'ordre m associée à l'opération élémentaire de ligne $\mathcal{O}p^{-1}$ inverse de $\mathcal{O}p$ énumérée dans le tableau ci-dessous*

$\mathcal{O}p$	$\mathcal{O}p^{-1}$
$L_i \longleftrightarrow L_j$	$L_i \longleftrightarrow L_j$
$L_i \longleftarrow cL_i$ avec $c \neq 0$	$L_i \longleftarrow c^{-1}L_i$
$L_i \longleftarrow L_i + cL_j$ avec $i \neq j$	$L_i \longleftarrow L_i - cL_j$

Preuve. Il suffit de vérifier ceci pour chacune des opérations élémentaires de ligne. Cette vérification est facile. Nous allons plutôt illustrer ceci par quelques exemples. □

Exemple 3.3. Considérons la matrice élémentaire $E = E_3(\mathcal{O}p)$ d'ordre 3 associée à l'opération élémentaire de ligne $\mathcal{O}p$. Alors nous allons calculer ci-dessous celle-ci pour différentes opérations $\mathcal{O}p$, ainsi que la matrice élémentaire $E_3(\mathcal{O}p^{-1})$ d'ordre 3 associée à l'opération élémentaire de ligne $\mathcal{O}p$ inverse et nous allons vérifier que $E_3(\mathcal{O}p^{-1})$ est bien l'inverse de $E_3(\mathcal{O}p)$, c'est-à-dire que

$$E_3(\mathcal{O}p)E_3(\mathcal{O}p^{-1}) = E_3(\mathcal{O}p^{-1})E_3(\mathcal{O}p) = I_3.$$

– Si $\mathcal{O}p$ est l'opération $L_3 \longleftarrow 4L_3$, alors l'opération inverse $\mathcal{O}p^{-1}$ sera l'opération $L_3 \longleftarrow (1/4)L_3$ et nous obtenons

$$E_3(\mathcal{O}p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad E_3(\mathcal{O}p^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1/4) \end{bmatrix}.$$

Nous obtenons facilement que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1/4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1/4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

– Si $\mathcal{O}p$ est l'opération $L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_1$, alors l'opération inverse $\mathcal{O}p^{-1}$ sera l'opération $L_3 \longleftarrow L_3 + 2L_1$ et nous obtenons

$$E_3(\mathcal{O}p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad E_3(\mathcal{O}p^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nous obtenons facilement que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

– Si $\mathcal{O}p$ est l'opération $L_1 \longleftrightarrow L_3$, alors l'opération inverse $\mathcal{O}p^{-1}$ sera l'opération $L_1 \longleftrightarrow L_3$ et nous obtenons

$$E_3(\mathcal{O}p) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad E_3(\mathcal{O}p^{-1}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nous obtenons facilement que

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.2 Inversion de matrices

Nous avons maintenant tout ce qu'il nous faut pour énoncer l'algorithme qui nous permet de déterminer si une matrice carrée est inversible et calculer son inverse, ainsi que démontrer la validité de cet algorithme.

Proposition 3.3. *Soit une matrice carrée A de format $n \times n$. Considérons la matrice augmentée $[A|I_n]$ de format $n \times 2n$ obtenue en juxtaposant la matrice identité I_n à la droite de A et notons par $[A'|B']$: l'unique matrice réduite échelonnée obtenue de $[A|I_n]$ après une série d'opérations élementaires*

$$[A|I_n] \rightsquigarrow \textit{série d'opérations élémentaires de ligne} \rightsquigarrow [A'|B']$$

où A' est la matrice consistant des n colonnes le plus à gauche de $[A'|B']$ et B' est la matrice consistant des n colonnes le plus à droite de $[A'|B']$.

(a) *Si $A' = I_n$, alors la matrice A est inversible et son inverse A^{-1} est $A^{-1} = B'$.*

(b) *Si $A' \neq I_n$, alors la matrice A n'est pas inversible.*

Preuve. L'algorithme consiste à effectuer une série d'opérations élémentaires de ligne à partir de la matrice augmentée $[A|I_n]$. Disons k opérations élémentaires.

$$[A|I_n] = [A_0, B_0] \xrightarrow{\mathcal{O}p_1} [A_1|B_1] \xrightarrow{\mathcal{O}p_2} [A_2|B_2] \xrightarrow{\mathcal{O}p_3} \dots \xrightarrow{\mathcal{O}p_k} [A_k|B_k] = [A'|B']$$

Notons par E_i : la matrice élémentaire d'ordre n associée à l'opération élémentaire de ligne $\mathcal{O}p_i$. Comme conséquence de la proposition 3.1, nous avons que les opérations élémentaires de ligne correspondent à multiplier à gauche par une matrice élémentaire et ainsi nous avons les égalités suivantes

$$[A_i|B_i] = E_i[A_{i-1}|B_{i-1}] \quad \text{pour } i = 1, 2, \ldots, k.$$

Donc

$$\begin{aligned}
[A_1|B_1] &= E_1[A|I_n], \\
[A_2|B_2] &= E_2[A_1|B_1] = E_2E_1[A|I_n] \\
[A_3|B_3] &= E_3[A_2|B_2] = E_3E_2E_1[A|I_n] \\
&\vdots \\
[A'|B'] &= [A_k|B_k] = E_k[A_{k-1}|B_{k-1}] = \cdots = E_kE_{k-1}\ldots E_2E_1[A|I_n].
\end{aligned}$$

Si nous considérons les n colonnes de droite de chacun des côtés de cette dernière équation, nous obtenons que

$$A' = E_kE_{k-1}\ldots E_2E_1A.$$

De la même façon, si nous considérons les n colonnes de gauche, nous obtenons que

$$B' = E_kE_{k-1}\ldots E_2E_1.$$

Rappelons que les matrices élémentaires sont inversibles comme nous l'avons vu à la proposition 3.2. Conséquemment en multipliant par ces inverses, nous obtenons

$$A = E_1^{-1}E_2^{-1}\ldots E_{k-1}^{-1}E_k^{-1}A'.$$

Si $A' = I_n$, alors $A = E_1^{-1}E_2^{-1}\ldots E_{k-1}^{-1}E_k^{-1}I_n = E_1^{-1}E_2^{-1}\ldots E_{k-1}^{-1}E_k^{-1}$ est un produit de matrices inversibles et par le fait même est inversible. Donc A est inversible et

$$\begin{aligned}
A^{-1} &= (E_1^{-1}E_2^{-1}\ldots E_{k-1}^{-1}E_k^{-1})^{-1} \\
&= (E_k^{-1})^{-1}(E_{k-1}^{-1})^{-1}\ldots(E_2^{-1})^{-1}(E_1^{-1})^{-1} \\
&= E_kE_{k-1}\ldots E_2E_1 = B'
\end{aligned}$$

Si $A' \neq I_n$, alors, parce que $[A'|B']$ est une matrice réduite échelonnée, A' a nécessairement une ligne nulle. Une matrice avec une ligne nulle ne peut pas être inversible. En effet, si M est une matrice carrée de format $n \times n$ dont une des lignes est nulle, disons la i^{e} ligne L_i, alors pour tout matrice carrée N de même format que M, nous aurons toujours que la i^{e} ligne du produit MN sera aussi nulle et nous ne pourrons pas obtenir que $MN = I_n$, car la i^{e} ligne de I_n n'est pas nulle. Donc A' n'est pas inversible. Nous avons que $A' = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A$. Si A était inversible, alors A' serait un produit de matrices inversibles étant donné que les matrices élémentaires sont inversibles comme nous l'avons vu à la proposition 3.2. Mais ceci est impossible parce que A' n'est pas inversible. Donc A n'est pas inversible.

$\square$

Exemple 3.4. Déterminons si la matrice carrée

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

est inversible et si elle l'est, calculons son inverse. Il nous faut donc former la matrice augmentée $[A|I_3]$ et ensuite d'utiliser l'algorithme d'élimination de Gauss-Jordan

$$[A|I_3] \rightsquigarrow \text{série d'opérations élémentaires de ligne} \rightsquigarrow [A'|B']$$

Nous avons

$$= \begin{bmatrix} -1 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \longleftarrow -L_1} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_1]{L_2 \longleftarrow L_2 - 4L_1} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & -2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \longleftarrow (1/11)L_2} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2/11 & 4/11 & 1/11 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \longleftarrow L_3 - 5L_2]{L_1 \longleftarrow L_1 + 4L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/11 & 5/11 & 4/11 & 0 \\ 0 & 1 & -2/11 & 4/11 & 1/11 & 0 \\ 0 & 0 & -1/11 & 2/11 & -5/11 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \longleftarrow -11L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/11 & 5/11 & 4/11 & 0 \\ 0 & 1 & -2/11 & 4/11 & 1/11 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 5 & -11 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_2 \longleftarrow L_2 + (2/11)L_3]{L_1 \longleftarrow L_1 - (3/11)L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 5 & -11 \end{bmatrix}$$

Cette dernière matrice est réduite échelonnée. Nous obtenons ainsi que

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 5 & -11 \end{bmatrix}.$$

Comme $A' = I_3$, alors A est inversible et son inverse est

$$A^{-1} = B' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 5 & -11 \end{bmatrix}$$

Nous pouvons facilement vérifier qu'il s'agit bien de l'inverse de A en calculant

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 5 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 5 & -11 \end{bmatrix} = I_3.$$

Exemple 3.5. Déterminons si la matrice carrée

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

est inversible et si elle l'est, calculons son inverse. Il nous faut donc former la matrice augmentée $[A|I_3]$ et ensuite d'utiliser l'algorithme d'élimination de Gauss-Jordan

$$[A|I_3] \rightsquigarrow \text{série d'opérations élémentaires de ligne} \rightsquigarrow [A'|B']$$

Nous avons

$$
\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \longleftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\xrightarrow{L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\xrightarrow{L_2 \longleftarrow -L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\xrightarrow{L_3 \longleftarrow L_3 - L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \\
&\xrightarrow{L_2 \longleftarrow L_2 + L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Cette dernière matrice est réduite échelonnée. Nous obtenons ainsi que

$$
A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.
$$

Comme $A' \neq I_3$, alors A n'est pas inversible

Remarque 3.1. Si A est une matrice carrée inversible de format $n \times n$ et que nous avons déterminé son inverse A^{-1}, il est alors facile de résoudre le système d'équations linéaires $AX = B$. En effet, en multipliant à gauche par A^{-1} les deux côtés de l'équation matricielle, nous obtenons

$$
A^{-1}AX = A^{-1}B \quad \Longrightarrow \quad X = I_n X = A^{-1}B.
$$

Dans ce cas, la solution est unique.

Nous avons illustré ceci dans l'exemple ci-dessous en reprenant la matrice de l'exemple 3.4.

Exemple 3.6. Nous voulons résoudre le système suivant :

$$
(*) \qquad \begin{bmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.
$$

Nous avons vu à l'exemple 3.4 que

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \text{ est inversible et son inverse est } \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 5 & -11 \end{bmatrix}$$

Donc l'unique solution du système $(*)$ est

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 5 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -7 \\ -42 \end{bmatrix}.$$

3.3 Analyse intersectorielle

Nous allons maintenant présenter une application de l'inversion de matrice en analyse intersectorielle en économie. Il est possible d'appliquer des techniques similaires dans d'autres domaines que l'économie. Cette approche a été développée par l'économiste américain Wassily Leontief dans les années 1930. L'économie peut être divisé en n secteurs de production. Pour produire des biens, chaque secteur utilise une certaine quantité de biens produits par les autres secteurs et même de son propre secteur. Une partie de la production d'un secteur est aussi destinée à la demande des ménages (demande externe). Toutes ces données sont présentées sous la forme d'un tableau intersectoriel. Nous allons maintenant illustrer ceci dans un exemple comportant trois secteurs : secteur primaire (agriculture, forêt, mine), secteur secondaire (industrie manufacturière, construction) et le secteur tertiaire (transports, services, commerce). Dans la pratique, il y a en général beaucoup plus de secteurs dans une telle analyse économique.

Exemple 3.7. Nous voulons analyser une économie comportant trois grands secteurs comme ci-dessus. Nous avons ainsi le tableau dans lequel l'entrée sur une

Secteurs fournisseurs	**Secteurs demandeurs**				**Production totale**
	Secteur primaire	secteur secondaire	secteur tertiaire	demande externe	
Sect. primaire	150	1000	50	800	2000
Sect. secondaire	500	7500	1000	11 000	20 000
Sect. tertiaire	800	2000	2200	5000	10000

Tableau 3.1 – Tableau intersectoriel

ligne indique ce que le secteur de cette ligne fournit en millions de dollars aux autres secteurs, ainsi qu'à la demande externe. À ces données, nous pouvons associer la **matrice des coefficients techniques de production**. S'il y a n secteurs, alors la matrice des coefficients techniques de production $A = [a_{ij}]$ est une matrice carrée de format $n \times n$ telle que

$$a_{ij} = \frac{\text{Demande que le secteur } i \text{ fournit au secteur } j}{\text{Production totale du secteur } j}$$

Dans notre exemple, nous avons que cette matrice des coefficients techniques de production est

$$A = \begin{bmatrix} \frac{150}{2000} & \frac{1000}{20000} & \frac{50}{10000} \\ \frac{500}{2000} & \frac{7500}{20000} & \frac{1000}{10000} \\ \frac{800}{2000} & \frac{2000}{20000} & \frac{2200}{10000} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}075 & 0{,}05 & 0{,}005 \\ 0{,}25 & 0{,}375 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}22 \end{bmatrix}$$

Si T est la matrice de format $n \times 1$ pour laquelle l'entrée à la ligne i est la production totale du secteur i et D est la matrice de format $n \times 1$ pour laquelle l'entrée à la ligne i est la demande externe du secteur i, alors nous aurons

$$T = AT + D \quad \Longrightarrow \quad (I_n - A)T = D \quad \Longrightarrow \quad T = (I_n - A)^{-1}D$$

si la matrice $(I_n - A)$ est inversible. Dans notre exemple, nous avons

$$T = \begin{bmatrix} 2000 \\ 20000 \\ 10000 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix} 800 \\ 11000 \\ 5000 \end{bmatrix}$$

L'intérêt économique de ceci est l'information que nous pouvons tirer de la matrice $(I_n - A)^{-1}$. Si nous modifions la demande externe, nous aimerions déterminer l'impact sur la production totale de chacun des secteurs. L'équation $T = (I_n - A)^{-1}D$ nous permet de déterminer cet impact. En effet, supposons que nous voulons déterminer l'impact sur la production totale si la demande externe passe de D à $D + \Delta D$, alors la production passera de $(I_n - A)^{-1}D$ à $(I_n - A)^{-1}(D + \Delta D)$. Ainsi la production totale sera modifée de la façon suivante :

$$\Delta T = (I_n - A)^{-1}(D + \Delta D) - (I_n - A)^{-1}(D) = (I_n - A)^{-1}(\Delta D)$$

Dans notre exemple,

$$I_3 - A = \begin{bmatrix} (1-0{,}075) & -0{,}05 & -0{,}005 \\ -0{,}25 & (1-0{,}375) & -0{,}1 \\ -0{,}4 & -0{,}1 & (1-0{,}22) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (0{,}925) & -0{,}05 & -0{,}005 \\ -0{,}25 & 0{,}625 & -0{,}1 \\ -0{,}4 & -0{,}1 & 0{,}78 \end{bmatrix}$$

Cette dernière matrice est inversible et si nous calculons son inverse, nous obtenons

$$(I_3 - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1{,}114\ 189\ 879 & 0{,}092\ 168\ 587 & 0{,}018\ 958\ 728 \\ 0{,}548\ 344\ 757 & 1{,}678\ 868\ 310 & 0{,}218\ 754\ 557 \\ 0{,}641\ 680\ 035 & 0{,}262\ 505\ 469 & 1{,}319\ 819\ 163 \end{bmatrix}$$

Comment interpréter les entrées de cette matrice $(I_3 - A)^{-1}$? Si nous devons augmenter d'une unité (ici un million de dollars) la demande externe du secteur primaire, alors il faudra augmenter la production totale du secteur primaire de 1,114 189 879 unité, celle du secteur secondaire de 0,548 344 757 unité et celle du secteur tertiaire de 0,641 680 035 unité. De même si nous devons augmenter d'une unité (ici un million de dollars) la demande externe du secteur secondaire, alors il faudra augmenter la production totale du secteur primaire de 0,092 168 587 unité, celle du secteur secondaire de 1,678 868 310 unité et celle du secteur tertiaire de 0,262 505 469 unité. Finalement si nous devons augmenter d'une unité (ici un million de dollars) la demande externe du secteur tertiaire, alors il faudra augmenter la production totale du secteur primaire de 0,018 958 728 unité, celle du secteur secondaire de 0,218 754 557 unité et celle du secteur tertiaire de 1,319 819 163 unité.

3.4 Polynôme minimal d'une matrice carrée.

Pour terminer ce chapitre, nous allons décrire une autre approche pour savoir si une matrice carrée A est inversible ou non et dans le cas où elle l'est comment déterminer l'inverse. Cette dernière approche est obtenue au moyen du polynôme minimal de A. Nous justifierons notre approche qu'un peu plus tard dans le recueil. Il faut faire appel aux notions d'indépendance linéaire et de polynôme caractéristique, mais l'algorithme lui-même pour calculer le polynôme minimal ne fait appel qu'à l'algorithme d'élimination de Gauss-Jordan.

Remarque 3.2. Rappelons qu'un **polynôme** $P(x)$ **de degré** d est une expression de la forme

$$P(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_{d-1}x^{d-1} + c_dx^d,$$

où $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_d$ sont des constantes avec $c_d \neq 0$ et x est une variable. Nous pouvons donc considérer $P(x)$ comme une fonction de x. Si $c_d = 1$, alors nous dirons que $P(x)$ est **monique**.

Exemple 3.8. $P(x) = x^5 - 10x^4 + 3x^2 - 7x + 8$ est un polynôme monique de degré 5 et $Q(x) = 11x^{10} + 7x^5 - 3x^2 + x$ est un polynôme de degré 10. Cependant $Q(x)$ n'est pas monique.

Notation 3.1. Étant donné une matrice carrée A de format $n \times n$ et un polynôme $P(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_{d-1}x^{d-1} + c_dx^d$, nous noterons par $P(A)$: la matrice obtenue en substituant A à la place de la variable x, plus précisément

$$P(A) = c_0I_n + c_1A + c_2A^2 + \cdots + c_{d-1}A^{d-1} + c_dA^d$$

Exemple 3.9. Soit le polynôme $P(x) = 2x^3 + 4x^2 - 6x + 3$ et la matrice carrée

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Alors

$$\begin{aligned} P(A) &= 2\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}^3 + 4\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}^2 - 6\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 2\begin{bmatrix} 20 & 7 \\ 21 & 6 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 59 & 16 \\ 48 & 27 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Proposition 3.4. *Étant donné une matrice carrée de format $n \times n$, alors il existe un polynôme monique $P(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_2x^2 + c_1x + c_0$ tel que $P(A)$ est la matrice nulle $0_{n\times n}$, c'est-à-dire $P(A) = 0_{n\times n}$. Nous dirons alors que la matrice A est un* **zéro** *de $P(x)$.*

Remarque 3.3. Il existe une façon simple de déterminer un tel polynôme : le polynôme caractéristique $P(x) = \det(A - xI_n)$. Il faut avoir défini le déterminant d'une matrice carrée pour définir cette notion de polynôme caractéristique. Nous allons pour l'instant admettre ce résultat.

Exemple 3.10. Si nous reprenons la matrice carrée de l'exemple précédent

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

et considérons le polynôme monique $P(x) = x^2 - 2x - 3$, alors

$$\begin{aligned} P(A) &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}^2 - 2\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Exemple 3.11. Soit la matrice carrée

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

et considérons le polynôme monique $P(x) = x^2 - (a+d)x + (ad - bc)$, alors

$$\begin{aligned} P(A) &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^2 - (a+d)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + (ad-bc)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (a^2+bc) & (ab+bd) \\ (ac+cd) & (bc+d^2) \end{bmatrix} - (a+d)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + (ad-bc)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Remarque 3.4. Soit une matrice carrée A de format $n \times n$. Parmi tous les polynômes moniques pour lesquels A est un zéro, alors il existe des polynômes de degré minimal. À cause de la proposition 3.4, nous savons que le degré d'un tel polynôme de degré minimal est $\leq n$. Si $M_1(x)$ et $M_2(x)$ sont deux polynômes moniques de degré minimal pour lesquels A est un zéro, alors $M_1(x) = M_2(x)$, c'est-à-dire le polynôme minimal est unique.

En effet, rappelons premièrement la division euclidienne. Étant donné deux polynômes $M(x)$, $P(x)$ tels que $P(x)$ n'est pas le polynôme nul, alors il existe des polynômes $Q(x)$ et $R(x)$ tels que $M(x) = P(x)Q(x) + R(x)$, où soit $R(x)$ est nul, soit le degré de $R(x)$ est strictement inférieur au degré de $P(x)$. C'est ce qui s'appelle la division euclidienne de polynômes.

Si nous utilisons la division euclidienne, alors il existe des polynômes $Q(x)$ et $R(x)$ tels que $M_2(x) = M_1(x)Q(x) + R(x)$. Si $R(x)$ n'est pas nul, alors $M_1(A) = M_2(A) = 0_{n\times n}$ et $M_2(A) = M_1(A)Q(A) + R(A) = 0_{n\times n}$ ont comme conséquence que $R(A) = 0_{n\times n}$. Cependant comme $R(x)$ n'est pas nul et son degré est strictement inférieur à celui de $M_1(x)$, nous obtenons un polynôme de degré inférieur au degré minimal. Ceci contredit le fait que $M_1(x)$ est de degré minimal. Donc $R(x)$ est nul et $M_2(x) = M_1(x)Q(x)$. Comme $M_1(x)$ et $M_2(x)$ ont le même degré et sont des polynômes moniques, nous avons que $Q(x) = 1$ et $M_1(x) = M_2(x)$.

Définition 3.2. Le **polynôme minimal** $P(x)$ d'une matrice carrée A est parmi tous les polynômes pour lesquels A est un zéro : l'unique polynôme monique de degré minimal.

Exemple 3.12. Si nous reprenons la matrice A de l'exemple 3.10, soit

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix},$$

nous avons vu que A est un zéro du polynôme monique $P(x) = x^2 - 2x - 3$. Montrons que A n'est pas un zéro d'un polynôme monique de degré < 2. Un polynôme monique de degré 1 est de la forme $c_0 + c_1 x$ avec $c_1 \neq 0$. Mais si nous substituons A à la place de x, nous obtenons

$$c_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (c_0 + 2c_1) & c_1 \\ 3c_1 & c_0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

car $c_1 \neq 0$. Un polynôme monique de degré 0 est le polynôme 1 et clairement A n'est pas un zéro de ce polynôme monique de degré 0. De tout ceci, nous pouvons conclure que $P(x) = x^2 - 2x - 3$ est le polynôme minimal de A.

Nous allons maintenant décrire un algorithme pour déterminer l'unique polynôme minimal d'une matrice carrée A de format $n \times n$.

Proposition 3.5. *Soit une matrice carrée A de format $n \times n$. Considérons la matrice B de format $n^2 \times (n+1)$ obtenue de la façon suivante : la colonne j de B est obtenue en écrivant les lignes de la matrice B^{j-1} sous forme d'une seule colonne (Ceci sera illustré dans un exemple) et B' l'unique matrice réduite échelonnée obtenue à partir de B à la suite d'une série d'opérations élémentaires de ligne :*

$$B \rightsquigarrow \textit{série d'opérations élémentaires de ligne} \rightsquigarrow B'$$

Notons le rang $rg(B)$ de B, c'est-à-dire le nombre de lignes non nulles de B', par m. Alors

(a) $m \leq n$

(b) *la matrice B' est de la forme*

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & c_1 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & c_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c_{m-1} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix}$$

Ici la matrice identité I_m est dans le coin supérieur gauche de B' et il y a au moins une colonne à la droite de cette matrice identité.

(c) *le polynôme minimal de A est le polynôme monique $P(x)$ de degré m suivant*

$$P(x) = x^m - c_{m-1}x^{m-1} - c_{m-2}x^{m-2} - \dots - c_2x^2 - c_1x - c_0.$$

En d'autres mots, la taille de la matrice identité nous donne le degré du polynôme minimal et la colonne à la droite de cette matrice identité nous permet d'écrire ce polynôme minimal.

Nous démontrerons cette proposition plus tard après avoir discuté des notions d'indépendance linéaire, de base et de polynôme caractéristique. Nous allons maintenant illustrer cette proposition et calculer le polynôme minimal de quelques matrices carrées. Commençons avec la matrice de l'exemple 3.10.

Exemple 3.13. Soit la matrice carrée A de format 2×2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il nous faut former la matrice B de format 4×3 obtenue des matrices puissances de A

$$A^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

en écrivant les lignes de ces matrices sous forme de colonne : la première colonne correspond à A^0, la deuxième colonne correspond à A^1 et la troisième colonne correspond à A^2. Ainsi

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Il nous faut maintenant utiliser l'algorithme d'élimination de Gauss-Jordan pour obtenir B' à partir de B.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_4 \longleftarrow L_4 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_4 \longleftarrow L_4 + 2L_2]{\substack{L_1 \longleftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B'$$

Donc le rang $rg(B)$ de B est $rg(B) = 2$ et conséquemment le polynôme minimal de A est de degré 2. Le polynôme minimal de A est alors $P(x) = x^2 - 2x - 3$. C'est ce que nous avions obtenu à l'exemple 3.12.

Exemple 3.14. Soit la matrice carrée A de format 3×3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il nous faut former la matrice B de format 9×4 obtenue des matrices puissances de A

$$A^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ainsi

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Il nous faut maintenant utiliser l'algorithme d'élimination de Gauss-Jordan pour obtenir B' à partir de B.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_9 \longleftarrow L_9 - L_1]{L_5 \longleftarrow L_5 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \longleftarrow (1/2)L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \longleftarrow L_3 + 2L_2]{L_1 \longleftarrow L_1 - L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B'$$

Donc le rang $rg(B)$ de B est $rg(B) = 2$ et conséquemment le polynôme minimal de A est de degré 2. Le polynôme minimal de A est alors $P(x) = x^2 - 2x + 1$.

Nous pouvons vérifier que A est bien un zéro de $P(x) = x^2 - 2x + 1$. En effet,

$$\begin{aligned} P(A) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^2 - 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Un dernier exemple pour lequel nous laisserons au lecteur le soin de vérifier les calculs.

Exemple 3.15. Soit la matrice carrée A de format 3×3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Il nous faut former la matrice B de format 9×4 obtenue des matrices puissances de A

$$A^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}, A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A^3 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ainsi

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si nous utilisons l'algorithme d'élimination de Gauss-Jordan, nous aurons

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \text{série d'opérations} \\ \text{élémentaires de ligne} \end{array} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B'$$

Donc le rang $rg(B)$ de B est $rg(B) = 3$ et conséquemment le polynôme minimal de A est de degré 3. Le polynôme minimal de A est alors $P(x) = x^3 - x^2$. Des calculs ci-dessus, il est facile de vérifier que A est un zéro de $x^3 - x^2$, car $A^3 = A^2$.

Au moyen du polynôme minimal, nous pouvons déterminer si une matrice carrée A est inversible et si c'est le cas, comment calculer l'inverse. Ceci est énoncé dans la proposition suivante.

Proposition 3.6. *Soit une matrice carrée A de format $n \times n$ et dont le polynôme minimal est le polynôme de degré*

$$P(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Alors A est inversible si et seulement si $a_0 \neq 0$. Dans ce dernier cas, l'inverse est alors

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0}\left(A^{m-1} + a_{m-1}A^{m-2} + \cdots + a_2A + a_1I_n\right).$$

Preuve. Si A est inversible, il nous faut montrer que $a_0 \neq 0$. Supposons le contraire, c'est-à-dire que $a_0 = 0$. Alors parce que A est un zéro du polynôme minimal, nous avons

$$A^m + a_{m-1}A^{m-1} + a_{m-2}A^{m-2} + \cdots + a_2A^2 + a_1A = 0_{n\times n}.$$

Nous pouvons factoriser A dans cette dernière équation et nous obtenons

$$A(A^{m-1} + a_{m-1}A^{m-2} + a_{m-2}A^{m-3} + \cdots + a_2A + a_1I_n) = 0_{n\times n}.$$

Comme A est inversible, A^{-1} existe et nous pouvons multiplier les deux côtés de cette dernière équation par A^{-1}. Nous obtenons alors

$$(A^{m-1} + a_{m-1}A^{m-2} + a_{m-2}A^{m-3} + \cdots + a_2A + a_1I_n) = 0_{n\times n}.$$

Ceci signifie que la matrice A est un zéro du polynôme de degré $(m-1)$:

$$x^{m-1} + a_{m-1}x^{m-2} + a_{m-2}x^{m-3} + \cdots + a_2x + a_1.$$

Mais ceci contredit le fait que le polynôme minimal est de degré m. Donc $a_0 \neq 0$.

Si $a_0 \neq 0$, il nous faut montrer que A est inversible. Considérons la matrice

$$-\frac{1}{a_0}\left(A^{m-1} + a_{m-1}A^{m-2} + \cdots + a_2A + a_1I_n\right)$$

Celle-ci est bien définie car nous pouvons diviser par $a_0 \neq 0$. Nous allons maintenant vérifier que cette dernière matrice est l'inverse de A. En effet,

$$\begin{aligned} A\left[-\frac{1}{a_0}\left(A^{m-1} + a_{m-1}A^{m-2} + \cdots + a_2A + a_1I_n\right)\right] \\ = -\frac{1}{a_0}\left(A^m + a_{m-1}A^{m-1} + \cdots + a_2A^2 + a_1A\right) \\ = -\frac{1}{a_0}(-a_0I_n) = I_n \end{aligned}$$

parce que, A étant le zéro du polynôme minimal, nous avons

$$A^m + a_{m-1}A^{m-1} + a_{m-2}A^{m-2} + \cdots + a_2A^2 + a_1A = -a_0I_n$$

De la même façon, nous obtenons que

$$\left[-\frac{1}{a_0}\left(A^{m-1} + a_{m-1}A^{m-2} + \cdots + a_2A + a_1I_n\right)\right] A = I_n.$$

Nous avons ainsi que A est inversible et son inverse est bien

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0}\left(A^{m-1} + a_{m-1}A^{m-2} + \cdots + a_2A + a_1I_n\right)$$

□

Exemple 3.16. Nous allons considérer chacun des matrices des exemples présentés dans cette section et vérifier comment cette dernière proposition peut être utilisée.

(a) Pour la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix},$$

son polynôme minimal est $x^2 - 2x - 3$. Par la proposition précédente, nous avons que A est inversible et son inverse est alors

$$A^{-1} = -\frac{1}{-3}(A - 2I_2) = \frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & -2/3 \end{bmatrix}.$$

(b) Pour la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

son polynôme minimal est $x^2 - 2x + 1$. Par la proposition précédente, nous avons que A est inversible et son inverse est alors

$$A^{-1} = -\frac{1}{1}(A - 2I_3) = -\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Pour la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$
son polynôme minimal est $x^3 - x^2$. Par la proposition précédente, nous avons que A n'est pas inversible.

Remarque 3.5. Il est possible d'utiliser le polynôme minimal d'une matrice carrée pour évaluer les puissances de A. Si
$$P(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$
est le polynôme minimal de A, alors
$$A^m = -\left(a_{m-1}Ax^{m-1} + a_{m-2}A^{m-2} + \cdots + a_2A^2 + a_1A + a_0I_n\right)$$
et nous pouvons utiliser plusieurs fois cette dernière équation pour exprimer une puissance de A en terme des matrices : I_n, A, $A^2, \ldots, A^{m-1}$. Nous allons illustrer ceci avec la matrice A de l'exemple 3.10. Dans ce cas,
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix},$$
a comme polynôme minimal $x^2 - 2x - 3$. Ainsi
$$A^2 = 2A + 3I_2$$
Si nous voulons calculer A^{10}, nous aurons les équations suivantes :
$$\begin{aligned} A^4 &= (A^2)^2 = (2A + 3I_2)^2 = 4A^2 + 12A + 9I_2 \\ &= 4(2A + 3I_2) + 12A + 9I_2 = 20A + 21I_2 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} A^8 &= (A^4)^2 = (20A + 21I_2)^2 = 400A^2 + 840A + 441I_2 \\ &= 400(2A + 3I_2) + 840A + 441I_2 = 1640A + 1641I_2 \end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned} A^{10} &= (A^8)(A^2) = (1640A + 1641I_2)(2A + 3I_2) = 3280A^2 + 8202A + 4923I_2 \\ &= 3280(2A + 3I_2) + 8202A + 4923I_2 = 14762A + 14763I_2 \end{aligned}$$
Donc
$$A^{10} = 14762 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + 14763 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44287 & 14762 \\ 44286 & 14763 \end{bmatrix}.$$

3.5 Exercices

Exercice 3.1. Pour chacune des matrices carrées suivantes, déterminer si elle est inversible ou pas et si elle est inversible, calculer son inverse.

(a)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 7 \\ 1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

(c)

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(d)

$$\begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 3.2. À partir de la matrice des transactions intersectorielles donnée dans le tableau ci-dessous pour une économie constituée de 3 secteurs :

Vente au du	Secteur 1	Secteur 2	Secteur 3	Demande des des ménages	Ventes totales
Secteur 1	20	30	10	40	100
Secteur 2	10	50	40	100	200
Secteur 3	20	80	50	50	200

(a) Calculer la matrice des coefficients techniques A.

(b) Calculer la matrice $E = (I_3 - A)^{-1}$ des effets.

(c) Évaluer l'effet d'un accroissement de 1 unité la demande des ménages pour chacun des secteurs sur les ventes totales.

Exercice 3.3. Soit les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & 4 & 12 \end{bmatrix}.$$

(a) Calculer le polynôme minimal de chacune de ces matrices.

(b) En utilisant ce polynôme minimal, indiquer si ces matrices sont inversibles. Si oui, calculer l'inverse.

(c) Calculer les puissances suivantes : A^8, A_1^{10}, A_2^6 en utilisant le polynôme minimal.

Exercice 3.4. Soit la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}$$
Calculer la polynôme minimal de A.

Chapitre 4

Déterminants

Nous voulons associer à toute matrice carrée A : un nombre qui nous donne de l'information sur cette matrice. Ce nombre sera son déterminant. Nous avons déjà rencontré le déterminant de matrice de format 2×2 à l'exemple 1.19 du chapitre 1. Nous avions vu alors que si A est la matrice carrée

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

et que $ad - bc \neq 0$, alors A avait un inverse et nous donnions une formule pour cet inverse, à savoir

$$A^{-1} = \frac{1}{(ad - bc)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

L'expression $(ad - bc)$ est justement la formule du déterminant d'une matrice de format 2×2 et nous obtiendrons aussi une formule pour l'inverse d'une matrice en fonction du déterminant si celle-ci est inversible.

4.1 Définition et propriétés élémentaires

Pour définir le déterminant d'une matrice de format $n \times n$, il nous faut préalablement parler de permutations et de leurs signatures. Ce sont des ingrédients dans la définition.

Définition 4.1. Une **permutation** de l'ensemble $E = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ est une bijection (correspondance biunivoque) de E vers lui-même :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & (n-1) & n \\ \downarrow & \downarrow & \ldots & \downarrow & \downarrow \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n-1) & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Nous écrirons une bijection σ sous la forme d'un tableau

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & (n-1) & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n-1) & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Nous dirons aussi une **permutation de** n plutôt que de E. Parmi toutes ces permutations, une de celles-ci s'appelle la **permutation identité**

$$Id_E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix}.$$

Il s'agit donc de la permutation σ telle que $\sigma(i) = i$ pour tout $i \in E$.

Exemple 4.1. Nous pouvons décrire l'ensemble des permutations sur $E = \{1, 2, 3\}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Définition 4.2. Nous noterons l'ensemble de permutations de l'ensemble $E = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ par $\mathfrak{S}_n$.

Remarque 4.1. La cardinalité de $\mathfrak{S}_n$, c'est-à-dire que le nombre de permutations de E est

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \quad \text{pour } n > 0.$$

En effet, il y a n choix pour la valeur de $\sigma(1)$. Pour chacun de ces choix, il y a $(n-1)$ choix pour $\sigma(2)$: tous les éléments de E sauf $\sigma(1)$. Une fois $\sigma(1)$ et $\sigma(2)$ fixés, il y a $(n-2)$ choix pour $\sigma(3)$: tous les éléments de E sauf $\sigma(1)$ et $\sigma(2)$. Nous poursuivons ainsi et nous obtenons donc $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ permutations.

Exemple 4.2. Pour $n = 3$, alors $\mathfrak{S}_3$ a $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ permutations, alors que, pour $n = 4$, $\mathfrak{S}_4$ a $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ permutations.

Définition 4.3. Étant donné une permutation de n :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & (n-1) & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n-1) & \sigma(n) \end{pmatrix},$$

alors nous définissons sa **longueur**, notée $\ell(\sigma)$, comme étant son nombre d'inversions, plus précisément une inversion de σ est une paire d'éléments (i, j) de $E = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ telle que $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$ et

$$\ell(\sigma) = |\{(i, j) \in E \times E \mid i < j \quad \text{et} \quad \sigma(i) > \sigma(j)\}|.$$

Le **signe** d'une permutation σ est noté $sgn(\sigma)$ et est égal à $sgn(\sigma) = (-1)^{\ell(\sigma)}$.

Remarque 4.2. En informatique, il faut souvent réordonner une liste, par exemple une liste de noms qu'il faut écrire en ordre lexicographique (alphabétique). La liste initiale correspond à une permutation et nous voulons la réordonner. Si, pour réordonner la liste, nous pouvons seulement intervertir des éléments consécutifs dans la liste, alors le nombre nécessaire de interversions d'éléments consécutifs sera la longueur de la permutation.

Exemple 4.3. Considérons la permutation σ de $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ suivante :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Nous avons encadré ci-dessous chacune des paires d'entiers (i, j) tels que $1 \leq i < j \leq 6$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 & \boxed{5} & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 & 5 & \boxed{6} \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & 3 & 4 & \boxed{5} & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & 3 & 4 & 5 & \boxed{6} \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \boxed{3} & \boxed{4} & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & \boxed{3} & 4 & \boxed{5} & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \boxed{3} & 4 & 5 & \boxed{6} \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \boxed{4} & \boxed{5} & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \boxed{4} & 5 & \boxed{6} \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donc la longueur $\ell(\sigma)$ de σ est 9 et son signe est $(-1)^{\ell(\sigma)} = (-1)^9 = -1$.

Nous avons tout ce qu'il nous faut maintenant pour définir le déterminant d'une matrice carrée.

Définition 4.4. Étant donné une matrice carrée de format $n \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

son déterminant noté $\det(A)$ ou encore

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

est

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

Ici $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n}$ signifie la somme sur toutes les permutations de n.

Exemple 4.4. Soit A est une matrice carrée de format 2×2 notée

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Dans ce cas, il y a deux permutations de $n = 2$, à savoir

$$\mathfrak{S}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Donc le déterminant de A est

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = sgn \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} a_{11}a_{22} + sgn \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

parce que

$$\ell \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 0, \qquad \ell \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Ceci est bien ce que nous avions à l'exemple 1.19 du chapitre 1.

Exemple 4.5. Soit A est une matrice carrée de format 3×3 notée

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Dans ce cas, il y a six permutations de $n = 3$, à savoir

$$\mathfrak{S}_3 = \left\{ \begin{array}{lll} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

Donc le déterminant de A est

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} sgn\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} a_{11}a_{22}a_{33} + sgn\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} a_{11}a_{23}a_{32} \\ + sgn\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} a_{12}a_{21}a_{33} + sgn\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} a_{12}a_{23}a_{31} \\ + sgn\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} a_{13}a_{21}a_{32} + sgn\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} a_{13}a_{22}a_{31} \end{bmatrix}.$$

Parce que

$$\begin{aligned} &\ell\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 0, \quad \ell\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 1, \quad \ell\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 1, \\ &\ell\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 2, \quad \ell\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2, \quad \ell\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 3, \end{aligned}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\ \\ + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ \\ - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31}) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Remarque 4.3. Il existe un moyen simple de se souvenir de cette dernière formule pour le déterminant d'une matrice carrée de format 3×3. Il suffit de répéter à la droite de A ses deux premières colonnes et ensuite de considérer les produits des entrées sur les diagonales comme dans les diagrammes suivants avec le signe approprié :

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{11} & & a_{12} \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & & & \\ a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{21} & & a_{22} \\ & & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{31} & & a_{32} \end{array}$$

correspond à la somme : $(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32})$, alors que

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{11} & & a_{12} \\
 & & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{21} & & a_{22} \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & & \\
a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{31} & & a_{32}
\end{array}$$

correspond à la somme : $-(a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31})$.

Remarque 4.4. Pour une matrice carrée de format 4×4, il y aura $4! = 24$ termes à additionner et une formule avec les diagonales comme celle pour les matrices de format 3×3 n'est pas valable pour ces matrices

Exemple 4.6. Avec les formules développées précédemment, nous obtenons que

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = (2)(5) - (-3)(4) = 22,$$

$$\begin{vmatrix} 7 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \left(\begin{array}{c} \Big((7)(2)(1) + (-3)(5)(-1) + (1)(0)(4)\Big) \\ \\ - \Big((1)(2)(-1) + (7)(5)(4) + (-3)(0)(1)\Big) \end{array} \right) = -109.$$

Proposition 4.1. *Soit une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure)*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

alors le déterminant $\det(A)$ *de* A *est le produit des entrées sur la diagonale principale, c'est-à-dire* $\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

Preuve. Supposons premièrement que la matrice A est triangulaire supérieure, c'est-à-dire que $a_{ij} = 0$ si $i > j$, nous voulons montrer que dans la somme définissant le déterminant $\det(A)$ de A, la seule permutation qui peut contribuer un terme non nul au déterminant est la permutation identité

$$Id_E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix}$$

Ainsi si $\sigma \neq Id_E$, alors il existe un entier i tel que $1 \leq i \leq n$ et $i > \sigma(i)$. En effet, il suffit de prendre le plus grand entier i de E tel que $\sigma(i) \neq i$. Pour cet entier i, nous aurons $i > \sigma(i)$, car

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & i & (i+1) & \dots & n-1 & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(i) & (i+1) & \dots & n-1 & n \end{pmatrix}$$

Mais alors $a_{i\sigma(i)} = 0$, parce que A est une matrice triangulaire supérieure, et conséquemment $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} = 0$ lorsque $\sigma \neq Id_E$. Il nous reste donc dans la somme que la permutation identité et ainsi $\det(A) = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$.

Supposons maintenant que la matrice A est triangulaire inférieure, c'est-à-dire $a_{ij} = 0$ si $i < j$, nous voulons aussi montrer que, dans la somme définissant le déterminant $\det(A)$ de A, la seule permutation qui peut contribuer un terme non nul au déterminant est la permutation identité

$$Id_E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix}$$

Ainsi si $\sigma \neq Id_E$, alors il existe un entier i tel que $1 \leq i \leq n$ et $i < \sigma(i)$. En effet, il suffit de prendre le plus petit entier i de E tel que $\sigma(i) \neq i$. Pour cet entier i, nous aurons $i < \sigma(i)$, car

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & i-1 & i & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & i-1 & \sigma(i) & \dots & \sigma(n-1) & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Mais alors $a_{i\sigma(i)} = 0$, parce que A est une matrice triangulaire inférieure, et conséquemment $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} = 0$ lorsque $\sigma \neq Id_E$. Il nous reste donc dans la somme que la permutation identité et ainsi $\det(A) = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$.

$\square$

Exemple 4.7. Nous avons

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -70 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 5 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 180$$

Définition 4.5. Étant donné une permutation σ de n

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & (n-1) & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n-1) & \sigma(n) \end{pmatrix},$$

alors la permutation inverse de σ, notée σ^{-1}, est l'unique permutation tel que $\sigma^{-1}(i) = j$ si et seulement si $\sigma(j) = i$. En d'autres mots, la permutation σ^{-1} est obtenue en lisant de la ligne du bas vers celle du haut la permutation σ.

Exemple 4.8.

Si $\quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 2 & 6 & 7 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad$ alors $\quad \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 3 & 1 & 7 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$

Proposition 4.2. *Soit une matrice carrée A et sa matrice transposée A^T. Alors*

$$\det(A) = \det(A^T).$$

Preuve. Écrivons les matrices en jeu

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

et

$$A^T = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{où } b_{ij} = a_{ji} \text{ pour tout } i, j.$$

Si nous calculons le déterminant $\det(A^T)$ de la matrice transposée A^T, alors

$$\begin{aligned} \det(A^T) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} sgn(\sigma) b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} \cdots b_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} sgn(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} sgn(\sigma) a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)} \end{aligned}$$

Il faut noter que $\ell(\sigma) = \ell(\sigma^{-1})$ et $sgn(\sigma) = sgn(\sigma^{-1})$. En effet, s'il y a une inversion $i < j$ dans σ, alors il y a une inversion $\sigma(j) < \sigma(i)$ dans σ^{-1}, car nous avons

$$\sigma = \begin{pmatrix} \dots & i & < & j & \dots \\ \dots & \sigma(i) & > & \sigma(j) & \dots \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \dots & \sigma(j) & < & \sigma(i) & \dots \\ \dots & j & > & i & \dots \end{pmatrix}$$

Donc
$$\begin{aligned}\det(A^T) &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} sgn(\sigma^{-1}) a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)} \\ &= \sum_{\sigma^{-1}\in\mathfrak{S}_n} sgn(\sigma^{-1}) a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)} \\ &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \det(A).\end{aligned}$$

□

4.2 Opérations élémentaires de ligne ou colonne.

Nous allons maintenant décrire l'effet des opérations élémentaires de ligne et de colonne sur le déterminant de la matrice A. Nous avons décrit les opérations élémentaires de ligne à la définition 2.4 au chapitre 2. Celles-ci étaient nécessaires pour résoudre les systèmes d'équations linéaires. Pour le calcul du déterminant, il est aussi possible d'utiliser des opérations élémentaires de colonne.

Définition 4.6. Une **opération élémentaire de colonne** sur une matrice A consiste à modifier la matrice A pour obtenir une nouvelle matrice A' pour laquelle toutes les colonnes sont les mêmes sauf une ou deux colonnes. Il y a trois opérations élémentaires :

1. Remplacer une colonne par un multiple non nul de celle-ci, plus exactement nous remplaçons la i ième colonne C_i par la i ième colonne C_i multiplié par le scalaire $\alpha \neq 0$. Nous noterons cette opération par $C_i \longleftarrow \alpha C_i$.
2. Intervertir deux colonnes, plus exactement nous intervertissons la i ième colonne C_i et la j ième colonne C_j. Nous noterons cette opération par $C_i \longleftrightarrow C_j$.
3. Remplacer une colonne par cette colonne à laquelle nous avons ajouté un multiple d'une autre colonne, plus exactement nous remplaçons la i ième colonne C_i par la somme de la i ième colonne C_i et de α fois la j ième colonne C_j, où $i \neq j$. Nous noterons cette opération par $C_i \longleftarrow C_i + \alpha C_j$.

Nous pouvons maintenant énoncer l'effet d'une opération élémentaire sur le déterminant.

Proposition 4.3. *Soit une matrice carrée A et la matrice A' obtenue de A après l'opération élémentaire de ligne ou de colonne $\mathcal{O}p$*

$$A \xrightarrow{\mathcal{O}p} A'.$$

Alors la relation entre les déterminants de A et A' est présentée dans le tableau suivant :

Opération élémentaire	$\det(A')$ est égal à	$\det(A)$ est égal à
$L_i \longleftrightarrow L_j$, où $i \neq j$	$-\det(A)$	$-\det(A')$
$C_i \longleftrightarrow C_j$, où $i \neq j$	$-\det(A)$	$-\det(A')$
$L_i \longleftarrow \alpha L_i$, où $\alpha \neq 0$	$\alpha \det(A)$	$(1/\alpha)\det(A')$
$C_i \longleftarrow \alpha C_i$, où $\alpha \neq 0$	$\alpha \det(A)$	$(1/\alpha)\det(A')$
$L_i \longleftarrow L_i + \alpha L_j$, où $i \neq j$	$\det(A)$	$\det(A')$
$C_i \longleftarrow C_i + \alpha C_j$, où $i \neq j$	$\det(A)$	$\det(A')$

Tableau 4.1 – Déterminants et opérations élémentaires

Remarque 4.5. Nous ne démontrerons pas cette proposition, mais nous allons seulement indiquer ce qui est en jeu dans la preuve. À cause de la proposition 4.2, il suffit de démontrer la proposition pour les opérations élémentaires de ligne et les formules pour les opérations élémentaires de colonne découlent de celles-ci.

L'élément essentiel dans la preuve du fait que $\det(A') = -\det(A)$ lorsque nous effectuons l'opération $L_i \longleftrightarrow L_j$ est que si nous considérons une permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & (n-1) & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(i) & \dots & \sigma(j) & \dots & \sigma(n-1) & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

et la permutation

$$\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & (n-1) & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(j) & \dots & \sigma(i) & \dots & \sigma(n-1) & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

obtenue en transposant les valeurs $\sigma(i)$ et $\sigma(j)$ de σ, alors $(\ell(\sigma') - \ell(\sigma))$ est un entier impair et $sgn(\sigma') = -sgn(\sigma)$. Par exemple si $i = 3$, $j = 8$,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 8 & 2 & 10 & 9 & 1 & 3 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix},$$

et

$$\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 8 & 6 & 10 & 9 & 1 & 3 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

alors $\ell(\sigma) = 22$ et $\ell(\sigma') = 25$, ainsi $\ell(\sigma') - \ell(\sigma) = 3$ est impair, $sgn(\sigma) = 1$ et $sgn(\sigma') = -1$.

L'élément essentiel dans la preuve du fait que $\det(A') = \alpha \det(A)$ lorsque nous effectuons l'opération $L_i \longleftarrow \alpha L_i$ est que chacun des termes

$$a'_{1\sigma(1)} a'_{2\sigma(2)} \cdots a'_{n\sigma(n)}$$

apparaissant dans la somme définissant le déterminant $\det(A')$ contient une seule entrée de la ligne L_i et celle-ci est l'entrée correspondante de A multipliée par α.

Finalement l'élément essentiel dans la preuve du fait que $\det(A') = \det(A)$ lorsque nous effectuons l'opération $L_i \longleftarrow L_i + \alpha L_j$ est qu'une matrice carrée M ayant deux lignes identiques a un déterminant nul. En effet, il suffit d'interchanger ces deux lignes identiques, alors la matrice M demeure inchangée, mais son déterminant $\det(M)$ est multiplié par -1 par ce que nous avons obtenu précédemment. Donc $\det(M) = -\det(M)$ et ceci est possible seulement si $\det(M) = 0$.

Nous pouvons utiliser la proposition 4.3 pour calculer le déterminant d'une matrice en effectuant des opérations élémentaires de ligne ou de colonne pour obtenir une matrice triangulaire supérieure ou inférieure. Pour chacune de ces opérations nous savons l'effet sur le déterminant, cet effet est donné par la colonne de droite du tableau 4.1. À cause de la proposition 4.1, nous savons calculer le déterminant d'une matrice triangulaire et nous complétons ainsi notre calcul.

Nous allons maintenant illustrer ceci dans des exemples.

Exemple 4.9. Calculons le déterminant de la matrice A :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 10 & -5 \\ 1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nous avons

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 10 & -5 \\ 1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 10 & -5 \\ 2 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

par l'opération $L_1 \longleftrightarrow L_3$. Cette opération change le signe du déterminant.

$$\det(A) = - \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 10 & -5 \\ 0 & 9 & 0 & -11 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

par l'opération $L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_1$. Cette opération ne modifie pas le déterminant.

$$\det(A) = -5 \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 9 & 0 & -11 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

par l'opération $L_2 \longleftarrow (1/5)L_2$. Cette opération modifie le déterminant et pour préserver l'égalité, il faut multiplier celui-ci par $(1/5)^{-1} = 5$.

$$\det(A) = -5 \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -18 & -2 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

par l'opération $L_3 \longleftarrow L_3 - 9L_2$. Cette opération ne modifie pas le déterminant.

$$\det(A) = -5 \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -18 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix}$$

par l'opération $L_4 \longleftarrow L_4 - 4L_2$. Cette opération ne modifie pas le déterminant.

$$\det(A) = -5 \begin{vmatrix} 1 & -3 & -36 & 4 \\ 0 & 1 & 11 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -41 & 4 \end{vmatrix}$$

par l'opération $C_3 \longleftarrow C_3 - 9C_4$. Cette opération ne modifie pas le déterminant.

$$\det(A) = (-5)(-1)\begin{vmatrix} 1 & -3 & -36 & 4 \\ 0 & 1 & 11 & -1 \\ 0 & 0 & -41 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

par l'opération $L_3 \longleftrightarrow L_4$. Cette opération change le signe du déterminant. Nous avons une matrice triangulaire. Donc $\det(A) = (-5)(-1)(1)(1)(-41)(-2) = 410$.

Exemple 4.10. Calculons le déterminant de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -4 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nous avons

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -4 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -4 & 0 \\ -3 & 7 & -7 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

par l'opération $L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_4$. Cette opération ne modifie pas le déterminant.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -4 & 0 \\ -3 & 49 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

par l'opération $L_2 \longleftarrow L_2 + 7L_3$. Cette opération ne modifie pas le déterminant.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 28 & 0 & 0 \\ -3 & 49 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

par l'opération $L_1 \longleftarrow L_1 + 4L_3$. Cette opération ne modifie pas le déterminant.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 91 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \\ 3 & -43 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

par l'opération $C_2 \longleftarrow C_2 - 14C_1$. Cette opération ne modifie pas le déterminant. Nous avons une matrice triangulaire. Donc $\det(A) = (2)(91)(1)(1) = 182$.

4.3 Développement de Laplace

Il existe d'autres approches pour calculer le déterminant d'une matrice carrée. Une de celles-ci est le développement de Laplace du déterminant.

Définition 4.7. Étant donné une matrice carrée A de format $n \times n$ et i, j deux entiers tels que $1 \leq i, j \leq n$. Alors le **mineur de** A **à la position** (i, j) est la sous-matrice de A de format $(n-1) \times (n-1)$ obtenue de A en enlevant la ligne i et la colonne j. Nous noterons ce mineur par $M_{ij}(A)$. Le **cofacteur de** A **d'indice** (i, j) est le nombre $\alpha_{ij}(A) = (-1)^{i+j} \det(M_{ij}(A))$.

Exemple 4.11. Si A est la matrice de format 3×3 suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & 0 & 7 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

alors le mineur de A à la position $(2, 3)$ est la matrice de format 2×2

$$M_{23}(A) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

et le cofacteur de A d'indice $(2, 3)$ est

$$\alpha_{23}(A) = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -((2)(-2) - (-1)(3)) = 1$$

Nous pouvons maintenant présenter une autre approche pour le calcul du déterminant.

Proposition 4.4. *(***Développement de Laplace***) Soit une matrice carrée A de format $n \times n$.*

(a) *(***selon la ligne** L_i*) Si i est un entier tel que $1 \leq i \leq n$, alors*

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{i1}\alpha_{i1}(A) + a_{i2}\alpha_{i2}(A) + \cdots + a_{in}\alpha_{in}(A) \\ &= (-1)^{i+1} a_{i1} \det(M_{i1}(A)) + (-1)^{i+2} a_{i2} \det(M_{i2}(A)) \\ &\quad + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} \det(M_{in}(A)) \end{aligned}$$

(b) *(***selon la colonne** C_j*) Si j est un entier tel que $1 \leq j \leq n$, alors*

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{1j}\alpha_{1j}(A) + a_{2j}\alpha_{2j}(A) + \cdots + a_{nj}\alpha_{nj}(A) \\ &= (-1)^{1+j} a_{1j} \det(M_{1j}(A)) + (-1)^{2+j} a_{2j} \det(M_{2j}(A)) \\ &\quad + \cdots + (-1)^{n+j} a_{nj} \det(M_{nj}(A)) \end{aligned}$$

Preuve. Nous allons seulement illustrer ce qui est en jeu dans la preuve. Rappelons que si A est la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

alors son déterminant $\det(A)$ est

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

Pour démontrer (a), il nous faut regrouper les permutations σ selon la valeur de $\sigma(i)$. Donc

$$\begin{aligned} &\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &\quad = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \sigma(i)=j}} sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{(i-1)\sigma(i-1)} a_{(i+1)\sigma(i+1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \end{aligned}$$

Pour conclure la preuve, il faut vérifier que la somme

$$\sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \sigma(i)=j}} sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{(i-1)\sigma(i-1)} a_{(i+1)\sigma(i+1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

est à un signe près le déterminant d'une matrice. Pour cette dernière preuve, il faut associer à une permutation $\sigma \in\in \mathfrak{S}_n$ telle que $\sigma(i) = j$: une permutation $\sigma' \in \mathfrak{S}_{n-1}$ et comparer le signe de ces deux permutations. Nous allons illustrer ceci dans des exemples. Il s'agit de permuter des images de σ de façon circulaire pour obtenir une permutation $\bar{\sigma}$ telle que $\bar{\sigma}(j) = j$ et ensuite, en notant que $n-1$ élements sont permutés par $\bar{\sigma}$, à savoir $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{j\}$, d'associer à $\bar{\sigma}$: une permutation $\sigma' \in \mathfrak{S}_{n-1}$. Cette association est telle que $sgn(\sigma) = (-1)^{i+j} sgn(\sigma')$. Dans ce qui suivra $i = 5$ et nous considérons différentes valeurs de j.

Si $j = 1$,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 6 & 4 & 1 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

alors la permutation

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 8 & 6 & 4 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

et est obtenue en décalant d'une colonne vers la droite les images de σ pour le sous-ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ et en posant l'image $\sigma(5) = 1$ de 5 sous 1. Alors

$$\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 5 & 3 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

en posant $\sigma'(i) = \bar{\sigma}(i+1) - 1$ pour $i = 1, 2, \dots, 7$. Dans ce cas, $\ell(\sigma) = 14$, $\ell(\sigma') = 10$ et $sgn(\sigma) = 1$, $sgn(\sigma') = 1$ et $sgn(\sigma) = 1 = (-1)^{1+5} sgn(\sigma')$.

Si $j = 3$,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 2 & 4 & 5 & 3 & 1 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

alors la permutation

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

et est obtenue en décalant d'une colonne vers la droite les images de σ pour le sous-ensemble $\{3, 4\}$ et en posant l'image $\sigma(5) = 3$ de 5 sous 3. Alors

$$\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 2 & 3 & 4 & 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

en posant

$$\sigma'(i) = \begin{cases} \bar{\sigma}(i), & \text{si } i < 3 \text{ et } \bar{\sigma}(i) < 3\,; \\ \bar{\sigma}(i) - 1, & \text{si } i < 3 \text{ et } \bar{\sigma}(i) > 3\,; \\ \bar{\sigma}(i+1), & \text{si } i \geq 3 \text{ et } \bar{\sigma}(i+1) < 3\,; \\ \bar{\sigma}(i+1) - 1, & \text{si } i \geq 3 \text{ et } \bar{\sigma}(i+1) > 3. \end{cases}$$

Dans ce cas, $\ell(\sigma) = 13$, $\ell(\sigma') = 7$ et $sgn(\sigma) = -1$, $sgn(\sigma') = -1$ et $sgn(\sigma) = -1 = (-1)^{3+5} sgn(\sigma')$.

Si $j = 8$,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 8 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

alors la permutation

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

et est obtenue en décalant d'une colonne vers la gauche les images de σ pour le sous-ensemble $\{6, 7, 8\}$ et en posant l'image $\sigma(5) = 8$ de 5 sous 8. Alors

$$\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

en posant $\sigma'(i) = \sigma(i)$ pour $i = 1, 2, \dots, 7$. Dans ce cas, $\ell(\sigma) = 7$, $\ell(\sigma') = 4$ et $sgn(\sigma) = -1$, $sgn(\sigma') = 1$ et $sgn(\sigma) = -1 = (-1)^{8+5} sgn(\sigma')$.

□

Exemple 4.12. Soit la matrice carrée

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & -3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calculons le déterminant $\det(A)$ de A en utilisant le développement de Laplace selon la deuxième colonne. Donc

$$\begin{aligned} \det(A) = 0 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \times (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ + 5 \times (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \times (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

par ce développement de Laplace.

$$\det(A) = 2 \times (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 5 \times (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Nous avons vu comment calculer le déterminant de matrice de format 3×3 à l'exemple 4.5. Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} &= ((3)(-3)(2) + (2)(4)(-2) + (-3)(1)(1)) \\ &\quad - ((-3)(-3)(-2) + (3)(4)(1) + (2)(1)(2)) \\ &= -35 \end{aligned}$$

et

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = ((3)(0)(2) + (2)(3)(-2) + (-3)(-1)(1))$$

$$- ((-3)(0)(-2) + (3)(3)(1) + (2)(-1)(2))$$

$$= -14$$

Finalement nous obtenons que

$$\det(A) = 2 \times (-35) + 5 \times (-1)(-14) = 0.$$

Nous pouvons évaluer le déterminant d'une matrice en utilisant à la fois des opérations élémentaires de ligne et/ou de colonne et le développement de Laplace. C'est ce que nous allons maintenant illustrer.

Exemple 4.13.

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & -5 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 2 & -7 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 2 & 4 \\ 6 & -1 & 2 & -11 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

par les opérations $C_1 \longleftarrow C_1 + 2C_3$ et $C_4 \longleftarrow C_4 - 3C_3$. Ces opérations ne modifient pas le déterminant. Si nous utilisons le développement de Laplace selon la première ligne, nous obtenons alors

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 2 & -7 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 2 & 4 \\ 6 & -1 & 2 & -11 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} = (1)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 8 & 3 & -7 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 4 \\ 6 & -1 & -11 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

Nous pouvons poursuivre en effectuant des opérations élémentaires de ligne.

$$(1)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 8 & 3 & -7 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 4 \\ 6 & -1 & -11 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 3 & -7 & 0 \\ 29 & -5 & -42 & 0 \\ 6 & -1 & -11 & -1 \\ 37 & -3 & -65 & 0 \end{vmatrix}$$

par les opérations $L_2 \longleftarrow L_2 + 4L_3$ et $L_4 \longleftarrow L_4 + 6L_3$. Ces opérations ne modifient pas le déterminant. Si nous utilisons le développement de Laplace selon la quatrième colonne, nous obtenons alors

$$\begin{vmatrix} 8 & 3 & -7 & 0 \\ 29 & -5 & -42 & 0 \\ 6 & -1 & -11 & -1 \\ 37 & -3 & -65 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 8 & 3 & -7 \\ 29 & -5 & -42 \\ 37 & -3 & -65 \end{vmatrix}$$

Nous avons vu comment calculer le déterminant de matrice de format 3×3 à l'exemple 4.5. Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & -5 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} &= \Big((8)(-5)(-65) + (3)(-42)(37) + (-7)(29)(-3)\Big) \\ &\quad - \Big((-7)(-5)(37) + (8)(-42)(-3) + (3)(29)(-65)\Big) \\ &= 1899 \end{aligned}$$

4.4 Déterminant et inverse

Dans cette section, nous voulons étudier la relation entre le déterminant d'une matrice carrée et le fait qu'elle soit inversible. Il nous faut premièrement noter que le déterminant d'un produit de matrices carrées est le produit des déterminants de ces facteurs. Ensuite nous serons en mesure de vérifier que si une matrice carrée A est inversible alors son déterminant $\det(A)$ n'est pas nul. Nous verrons par la suite que ceci caractérise les matrices inversibles.

Proposition 4.5. *Soit M_1 et M_2 deux matrices carrées de même format. Alors $\det(M_1M_2) = \det(M_1)\det(M_2)$.*

Preuve. Nous allons illustrer une preuve de ce résultat dans le cas où les matrices sont de format 2×2, mais cet argument peut facilement être généralisé. Soit

$$M_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

Il faut premièrement noter que $\det(M) = \det(M_1)\det(M_2)$. Premièrement notons

$$M = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}.$$

Si nous considérons une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_4$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) \end{pmatrix}$$

alors, à cause des entrées qui s'annulent dans M, nous aurons $c_{1\sigma(1)}c_{2\sigma(2)}c_{3\sigma(3)}c_{4\sigma(4)} = 0$ sauf si $\sigma(1) \in \{1, 2\}$, $\sigma(2) \in \{1, 2\}$, $\sigma(3) \in \{3, 4\}$ et $\sigma(4) \in \{3, 4\}$. Donc pour calculer le déterminant de M, il y a seulement 4 permutations à considérer

$$\sigma \in S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Si nous notons

$$S' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \right\}$$

et

$$S'' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

S peut être vu comme le produit cartésien $S' \times S''$ de la façon suivante : si $\sigma' \in S'$ et $\sigma'' \in S''$ alors

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \sigma'(1) & \sigma'(2) & \sigma''(3) & \sigma''(4) \end{pmatrix} = \sigma' \times \sigma'' \in S$$

et réciproquement si $\sigma \in S$, alors

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & 3 & 4 \end{pmatrix} \in S' \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & \sigma(3) & \sigma(4) \end{pmatrix} \in S''$$

Cette association $(\sigma', \sigma'') \mapsto \sigma' \times \sigma'' \in S$ est une bijection (correspondance un-à-un des éléments des deux ensembles). Il est facile de vérifier que $sgn(\sigma' \times \sigma'') =$

$sgn(\sigma')sgn(\sigma'')$. Nous obtenons que

$$\begin{aligned}
\det(M) &= \sum_{\sigma\in S} sgn(\sigma)c_{1\sigma(1)}c_{2\sigma(2)}c_{3\sigma(3)}c_{4\sigma(4)} \\
&= \sum_{\sigma'\in S',\sigma''\in S''} sgn(\sigma'\times\sigma'')c_{1\sigma'(1)}c_{2\sigma'(2)}c_{3\sigma''(3)}c_{4\sigma''(4)} \\
&= \sum_{\sigma'\in S'}\sum_{\sigma''\in S''} sgn(\sigma')sgn(\sigma'')a_{1\sigma'(1)}a_{2\sigma'(2)}b_{3\sigma''(3)}b_{4\sigma''(4)} \\
&= \sum_{\sigma'\in S'} sgn(\sigma')a_{1\sigma'(1)}a_{2\sigma'(2)} \sum_{\sigma''\in S''} sgn(\sigma'')b_{3\sigma''(3)}b_{4\sigma''(4)}
\end{aligned}$$
$$= \det(M_1)\det(M_2)$$

Mais nous pouvons aussi calculer le déterminant de M en effectuant des opérations élémentaires de ligne. Si nous effectuons les 4 opérations suivantes : $L_1 \longleftarrow L_1 + a_{11}L_3$, $L_2 \longleftarrow L_2 + a_{21}L_3$, $L_1 \longleftarrow L_1 + a_{12}L_4$ et $L_2 \longleftarrow L_2 + a_{22}L_4$. Ces quatre opérations élémentaires ne modifient pas le déterminant. Donc

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}) & (a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}) \\ 0 & 0 & (a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}) & (a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}) \\ -1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

Si nous notons

$$M_1M_2 = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}) & (a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}) \\ (a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}) & (a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}) \end{bmatrix}$$

nous avons utilisant le développement de Laplace à deux reprises par rapport à la première colonne à chaque fois que

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & d_{11} & d_{12} \\ 0 & 0 & d_{21} & d_{22} \\ -1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 0 & d_{11} & d_{12} \\ 0 & d_{21} & d_{22} \\ -1 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)(-1) \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{vmatrix} = \det(M_1 M_2)$$

Donc $\det(M_1 M_2) = \det(M_1)\det(M_2)$. □

Nous avons alors comme conséquence de ce dernier résultat le corollaire suivant.

Corollaire 4.1. *Soit une matrice carrée A. Si A est inversible, alors son déterminant $\det(A)$ ne s'annule pas, c'est-à-dire que $\det(A) \neq 0$ et le déterminant $\det(A^{-1})$ de son inverse A^{-1} est*

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Preuve. En effet, si A est inversible, alors il existe une matrice carrée A^{-1} telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$, où A est de format $n \times n$. Par la proposition précédente, nous avons $\det(A)\det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I_n) = 1$, car I_n est une matrice triangulaire dont les entrées sur la diagonale principale sont toutes égales à 1. Donc $\det(A) \neq 0$ et $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$. C'est ce que nous voulions montrer. □

Exemple 4.14. Le déterminant de la matrice A

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & -3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

calculé à l'exemple 4.12 est nul. Conséquemment A n'est pas inversible

Nous allons maintenant montrer la réciproque, c'est-à-dire que si le déterminant $\det(A)$ de A est différent de 0, alors A est inversible. De plus nous donnerons une formule pour l'inverse comme nous l'avions fait à l'exemple 1.19 du chapitre 1 pour les matrices de format 2×2.

Définition 4.8. Soit une matrice carrée A de format $n \times n$. La **matrice adjointe** de A, notée $adj(A)$ est définie comme étant la transposée de la matrice des cofacteurs de A, c'est-à-dire

$$adj(A) = \begin{bmatrix} \alpha_{11}(A) & \alpha_{12}(A) & \dots & \alpha_{1n}(A) \\ \alpha_{21}(A) & \alpha_{22}(A) & \dots & \alpha_{2n}(A) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1}(A) & \alpha_{n2}(A) & \dots & \alpha_{nn}(A) \end{bmatrix}^T .$$

Rappelons que $\alpha_{ij}(A) = (-1)^{i+j} \det(M_{ij}(A))$.

Exemple 4.15. Si A est la matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & 0 & 7 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

alors sa matrice adjointe est définie par

$$adj(A) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\[2ex] -\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\[2ex] \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 14 & 17 & -8 \\ -9 & -13 & 1 \\ -7 & 6 & 4 \end{bmatrix}^T .$$

Donc

$$adj(A) = \begin{bmatrix} 14 & -9 & -7 \\ 17 & -13 & 6 \\ -8 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Nous pouvons observer que

$$A\, adj(A) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & 0 & 7 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 & -9 & -7 \\ 17 & -13 & 6 \\ -8 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -29 & 0 & 0 \\ 0 & -29 & 0 \\ 0 & 0 & -29 \end{bmatrix}$$

et que

$$adj(A)\,A = \begin{bmatrix} 14 & -9 & -7 \\ 17 & -13 & 6 \\ -8 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & 0 & 7 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -29 & 0 & 0 \\ 0 & -29 & 0 \\ 0 & 0 & -29 \end{bmatrix}$$

De plus le déterminant de A est

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & 0 & 7 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} &= ((2)(0)(1) + (-1)(7)(3) + (5)(4)(-2)) \\ &\quad - ((5)(0)(3) + (2)(7)(-2) + (-1)(4)(1)) \\ &= -29 \end{aligned}$$

Dans cet exemple, nous avons donc que $A\,adj(A) = adj(A)\,A = \det(A)I_3$. Ceci est un fait général.

Proposition 4.6. *Soit A une matrice carrée de format $n \times n$. Alors*

$$A\,adj(A) = adj(A)\,A = \det(A)I_n$$

Preuve. Après avoir multiplié $A\,adj(A)$, il faut noter que les entrées du produit sont des déterminants en utilisant le développement de Laplace. Pour les entrées qui ne sont pas sur la diagonale principale, il s'agit de déterminants de matrice ayant deux lignes ou colonnes identiques. Nous allons démontrer ce résultat pour $n = 3$.

Si A est la matrice

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

alors

$$adj(A) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ & & \\ -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ & & \\ \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

Donc $A\,adj(A)$ est égal à

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

et cette dernière matrice est $\det(A)I_3$. Nous pouvons illustrer pourquoi par exemple les entrées sur la ligne 1 aux colonnes 1 et 2 sont bien celles ci-dessus. Les autres sont obtenues de façon similaire.

Pour l'entrée à la ligne 1 et colonne 1 du produit $A\,adj(A)$, nous aurons

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

en utilisant le développement de Laplace selon la ligne L_1.

Pour l'entrée à la ligne 1 et colonne 2 du produit $A\,adj(A)$, nous aurons

$$-a_{11}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

en utilisant le développement de Laplace selon la ligne L_2.

Tous les déterminants qui ne sont pas sur la diagonale principale sont ceux de matrices ayant une ligne apparaissant deux fois et conséquemment sont nuls.

□

Conséquemment nous avons

Corollaire 4.2. *Soit une matrice carrée A de format $n \times n$. Si le déterminant $\det(A) \neq 0$, alors A est inversible et son inverse A^{-1} est*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}adj(A).$$

Preuve. En effet, $A\,adj(A) = adj(A)\,A = \det(A)I_n$ et

$$A\frac{1}{\det(A)}adj(A) = \frac{1}{\det(A)}adj(A)\,A = I_n.$$

Ceci montre que A est inversible et son inverse est bien

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}adj(A).$$

□

Exemple 4.16. La matrice A

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & 0 & 7 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

de l'exemple 4.15 a comme déterminant $(-29) \neq 0$ et elle est alors inversible. Nous avons déjà calculé sa matrice adjointe et ainsi l'inverse de A est

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}adj(A) = \frac{1}{-29}\begin{bmatrix} 14 & -9 & -7 \\ 17 & -13 & 6 \\ -8 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Corollaire 4.3. *(***Règle de Cramer***) Soit une matrice carrée A de format $n \times n$ dont le déterminant $\det(A) \neq 0$ et une matrice B de format $n \times 1$. Alors le système de n équations linéaires à n inconnues : x_1, $x_2, \ldots, x_n$ suivant*

$$AX = B \quad \textit{où} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

a une et une seule solution

$$X_0 = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}$$

où

$$s_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$$

où A_j est la matrice obtenue de A en remplaçant la $j^{\text{ième}}$ colonne de A par B.

Preuve. En effet, parce que $\det(A) \neq 0$, alors A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A).$$

Comme A est inversible, le système $AX = B$ a une et une seule solution

$$\begin{aligned} X_0 = A^{-1}B &= \frac{1}{\det(A)} adj(A)B \\ &= \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} \alpha_{11}(A) & \alpha_{12}(A) & \dots & \alpha_{1n}(A) \\ \alpha_{21}(A) & \alpha_{22}(A) & \dots & \alpha_{2n}(A) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1}(A) & \alpha_{n2}(A) & \dots & \alpha_{nn}(A) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Nous obtenons donc que

$$s_j = \frac{\alpha_{1j}(A)b_1 + \alpha_{2j}(A)b_2 + \cdots + \alpha_{nj}b_n}{\det(A)} = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$$

en utilisant le développement de Laplace selon la $j^{\text{ième}}$ colonne pour le calcul du déterminant de A_j.

□

Exemple 4.17. Considérons le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}. \qquad (*)$$

Ici le déterminant

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} &= \Big((1)(1)(2) + (4)(0)(0) + (-5)(-2)(3)\Big) \\ &\quad - \Big((-5)(1)(0) + (1)(0)(3) + (4)(-2)(2)\Big) \\ &= 48 \end{aligned}$$

Donc $(*)$ a une et une seule solution

$$X_0 = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}$$

où

$$s_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 4 & -5 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{48} = \frac{-69}{48}$$

$$s_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & -5 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{48} = \frac{6}{48}$$

et

$$s_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{48} = \frac{-57}{48}$$

Nous pouvons facilement vérifier que X_0 est bien une solution. En effet,

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -69/48 \\ 6/48 \\ -57/48 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-69+24+285)/48 \\ (138+6)/48 \\ (18-114)/48 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Nous pouvons conclure cette section avec une application de la règle de Cramer au problème d'interpolation présenté à la section 2.4 du chapitre 2. Rappelons de quoi il s'agit.

Étant donné une fonction $f(x)$ pour laquelle nous connaissons $n+1$ valeurs : $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ aux $(n+1)$ points distincts : $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, nous cherchons à déterminer un polynôme $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ de degré n pour lequel $P(x_0) = f(x_0), P(x_1) = f(x_1), \ldots, P(x_n) = f(x_n)$. Une fois ce polynôme $P(x)$ obtenu, nous pouvons interpoler la fonction $f(x)$ au point $x = \alpha$ par $P(\alpha)$. Nous voulons donc déterminer les $(n+1)$ coefficients a_0, $a_1, \ldots, a_n$ tels que

$$(\spadesuit) \quad \left\{ \begin{aligned} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n &= f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n &= f(x_1) \\ &\vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n &= f(x_0) \end{aligned} \right.$$

Proposition 4.7. *Soit $(n+1)$ points distincts : $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$. Alors le déterminant de la matrice*

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{bmatrix}$$

est égal au produit

$$(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)\ldots(x_n - x_0)(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\ldots(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1}).$$

Ceci est écrit sous la forme abrégée

$$\prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

où $\prod_{0 \leq i < j \leq n}(x_j - x_i)$ signifie faire le produit des $(x_j - x_i)$ sur toutes les paires (i, j) telles que $0 \leq i < j \leq n$. De plus ce déterminant est $\neq 0$.

Preuve. Il suffit d'effectuer les opérations élémentaires $C_j \longleftarrow C_j - x_0 C_{j-1}$ en débutant avec C_{n+1} jusqu'à la colonne C_2. Ces opérations ne modifient pas le déterminant. Nous obtenons donc

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & x_1(x_1 - x_0) & \ldots & x_1^{n-1}(x_1 - x_0) \\ 1 & x_2 - x_0 & x_2(x_2 - x_0) & \ldots & x_2^{n-1}(x_2 - x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & x_n - x_0 & x_n(x_n - x_0) & \ldots & x_n^{n-1}(x_n - x_0) \end{vmatrix}$$

Maintenant en utilisant le développement de Laplace selon la première ligne et ensuite les opérations élémentaires de lignes $L_i \longleftarrow (x_i - x_0)^{-1} L_i$, nous obtenons

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{vmatrix} =$$

$$(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)\ldots(x_n - x_0) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Par récurrence nous connaissons le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

et nous complétons ainsi la preuve. Le déterminant est $\neq 0$, car les $(n+1)$ points $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ sont distincts. □

Nous pouvons maintenant déterminer l'unique polynôme $P(x)$ tel que $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ de degré n pour lequel $P(x_0) = f(x_0), P(x_1) = f(x_1), \dots, P(x_n) = f(x_n)$. En effet, comme les $n+1$ points sont distincts, nous avons que

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i) \neq 0$$

et alors le système (♠) a une et une seule solution et le coefficient a_j de la puissance x^j apparaissant dans le polynôme $P(x)$ sera

$$a_j = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^{j-1} & f(x_0) & x_0^{j+1} & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{j-1} & f(x_1) & x_1^{j+1} & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{j-1} & f(x_2) & x_2^{j+1} & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{j-1} & f(x_n) & x_n^{j+1} & \dots & x_n^n \end{vmatrix}}{\prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i)}$$

par la règle de Cramer.

Exemple 4.18. Si nous reprenons l'exemple 2.14 du chapitre 2, nous voulons trouver l'unique polynôme $P(x)$ de degré 3 tel que

$$\begin{cases} P(0) = f(0) = 1; \\ P(0{,}25) = f(0{,}25) = 0{,}9689; \\ P(0{,}5) = f(0{,}5) = 0{,}8776; \\ P(0{,}75) = f(0{,}75) = 0{,}7317. \end{cases}$$

Ici le déterminant de la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & (0{,}25) & (0{,}25)^2 & (0{,}25)^3 \\ 1 & (0{,}5) & (0{,}5)^2 & (0{,}5)^3 \\ 1 & (0{,}75) & (0{,}75)^2 & (0{,}75)^3 \end{bmatrix}$$

est égal à

$$(0{,}25-0)(0{,}5-0)(0{,}75-0)(0{,}5-0{,}25)(0{,}75-0{,}25)(0{,}75-0{,}5) = \frac{3}{2^{10}} = \frac{3}{1024}$$

De ce qui précède, ce polynôme sera de la forme $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ et nous avons par la règle de Cramer

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}9689 & (0{,}25) & (0{,}25)^2 & (0{,}25)^3 \\ 0{,}8776 & (0{,}5) & (0{,}5)^2 & (0{,}5)^3 \\ 0{,}7317 & (0{,}75) & (0{,}75)^2 & (0{,}75)^3 \end{vmatrix}}{3/1024} = 1$$

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0{,}9689 & (0{,}25)^2 & (0{,}25)^3 \\ 1 & 0{,}8776 & (0{,}5)^2 & (0{,}5)^3 \\ 1 & 0{,}7317 & (0{,}75)^2 & (0{,}75)^3 \end{vmatrix}}{3/1024} = \frac{0{,}01}{3} = 0{,}003333333$$

$$a_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & (0{,}25) & 0{,}9689 & (0{,}25)^3 \\ 1 & (0{,}5) & 0{,}8776 & (0{,}5)^3 \\ 1 & (0{,}75) & 0{,}7317 & (0{,}75)^3 \end{vmatrix}}{3/1024} = -\frac{1{,}572}{3} = -0{,}524$$

$$a_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & (0{,}25) & (0{,}25)^2 & 0{,}9689 \\ 1 & (0{,}5) & (0{,}5)^2 & 0{,}8776 \\ 1 & (0{,}75) & (0{,}75)^2 & 0{,}7317 \end{vmatrix}}{3/1024} = \frac{0{,}1792}{3} = 0{,}059733333$$

Noter que les résultats ici sont légèrement différents de ceux obtenus à l'exemple 2.14 du chapitre 2. La raison est que dans ce dernier cas, nous avions arrondi nos résultats dans les calculs et cette approximation modifiait nos résultats.

Nous aurions pu procéder autrement pour obtenir le polynôme $P(x)$. Nous pouvons regrouper les puissances de x apparaissant avec le coefficient $f(x_i)$, c'est-à-dire que nous pouvons exprimer $P(x)$ sous la forme suivante :

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)P_i(x).$$

Il nous reste à déterminer $P_i(x)$. Nous allons illustrer ceci dans le cas où il y a 3 points : x_0, x_1 et x_2, c'est-à-dire $n = 2$. Par ce qui précède, nous avons

$$P(x) = \frac{\begin{vmatrix} f(x_0) & x_0 & x_0^2 \\ f(x_1) & x_1 & x_1^2 \\ f(x_2) & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix}}{\prod_{0\leq i<j\leq n}(x_j - x_i)} + x\frac{\begin{vmatrix} 1 & f(x_0) & x_0^2 \\ 1 & f(x_1) & x_1^2 \\ 1 & f(x_2) & x_2^2 \end{vmatrix}}{\prod_{0\leq i<j\leq n}(x_j - x_i)} + x^2\frac{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & f(x_0) \\ 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \end{vmatrix}}{\prod_{0\leq i<j\leq n}(x_j - x_i)}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{f(x_0)}{\prod_{0\leq i<j\leq n}(x_j - x_i)}\left[\begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 \\ x_2 & x_2^2 \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} 1 & x_1^2 \\ 1 & x_2^2 \end{vmatrix} + x^2\begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix}\right] \\ &\quad + \frac{f(x_1)}{\prod_{0\leq i<j\leq n}(x_j - x_i)}\left[-\begin{vmatrix} x_0 & x_0^2 \\ x_2 & x_2^2 \end{vmatrix} + x\begin{vmatrix} 1 & x_0^2 \\ 1 & x_2^2 \end{vmatrix} - x^2\begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix}\right] \\ &\quad + \frac{f(x_2)}{\prod_{0\leq i<j\leq n}(x_j - x_i)}\left[\begin{vmatrix} x_0 & x_0^2 \\ x_1 & x_1^2 \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} 1 & x_0^2 \\ 1 & x_1^2 \end{vmatrix} + x^2\begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix}\right] \end{aligned}$$

En utilisant le développement de Laplace selon la bonne ligne, nous obtenons que les sommes apparaissant entre les crochets sont des déterminants de matrice de format 3×3. Nous obtenons alors que

$$\begin{aligned} P(x) = &\frac{f(x_0)}{\prod_{0\leq i<j\leq n}(x_j - x_i)}\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix} \\ &+ \frac{f(x_1)}{\prod_{0\leq i<j\leq n}(x_j - x_i)}\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix} \\ &+ \frac{f(x_2)}{\prod_{0\leq i<j\leq n}(x_j - x_i)}\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x & x^2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Nous pouvons généraliser ce que nous avons fait précédemment et nous obtenons la proposition suivante.

Proposition 4.8. *Étant donné une fonction $f(x)$ pour laquelle nous connaissons $n+1$ valeurs : $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ aux $(n+1)$ points distincts : $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, alors il existe un et un seul polynôme $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ de degré n pour lequel $P(x_0) = f(x_0), P(x_1) = f(x_1), \dots, P(x_n) = f(x_n)$. Ce polynôme est égal à*

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_{i-1} & x_{i-1}^2 & \dots & x_{i-1}^n \\ 1 & x & x^2 & \dots & x^n \\ 1 & x_{i+1} & x_{i+1}^2 & \dots & x_{i+1}^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}}$$

Remarque 4.6. Si nous utilisons la proposition 4.7 sur chacun des déterminants apparaissant dans la dernière somme, nous obtenons une expression pour $P(x)$ appelée la **formule d'interpolation de Lagrange**, à savoir que

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}.$$

4.5 Exercices

Exercice 4.1. Soit la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 1 & 5 & 8 & 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Déterminer la longueur $\ell(\sigma)$ de σ et son signe $sgn(\sigma)$.

Exercice 4.2. Soit les matrices suivantes :

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 3 & 9 & -1 & -6 \end{bmatrix}.$$

(a) Calculer le déterminant de chacune de ces matrices.

(b) Si la matrice est inversible, calculer son inverse en utilisant sa matrice adjointe.

Exercice 4.3. Soit le système d'équations linéaires suivant $AX = B$, où

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -5 & -1 \\ 4 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & -4 \\ 0 & 7 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Calculer le déterminant de la matrice de la matrice A.

(b) En utilisant la règle de Cramer, déterminer l'unique solution de ce système d'équations linéaires.

Exercice 4.4. Soit les matrices suivantes :

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 9 & -1 & -6 \end{bmatrix}.$$

(a) Calculer le déterminant de chacune de ces matrices.

(b) En utilisant ce déterminant, indiquer si ces matrices sont inversibles.

Exercice 4.5. (a) Montrer que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1).$$

(b) Montrer que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2).$$

(c) Montrer que le déterminant

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ c & b & (x+a) \end{vmatrix} = (x^3 + ax^2 + bx + c).$$

Exercice 4.6. Étant donné une matrice carrée A de format $n \times n$, nous définissons son polynôme caractéristique comme étant $P_{\text{car}}(x) = \det(A - xI_n)$. Soit A une des matrices suivantes :

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 3 & 9 & -1 & -6 \end{bmatrix}.$$

Ces matrices sont celles de l'exercice 1 de la séance 7.

(a) Calculer le polynôme caractéristique $P_{\text{car}}(x)$ pour A.

(b) Comparer le coefficient constant $P_{\text{car}}(0)$ de $P_{\text{car}}(x)$ et le déterminant de A calculé à l'exercice 1 de la séance 7.

(c) Comparer la trace $Tr(A)$ de la matrice A et le coefficient de x^{n-1} dans le polynôme caractéristique $P_{\text{car}}(x)$ où la trace $Tr(A)$ d'une matrice A est la somme des entrées sur la diagonale principale.

(d) Calculer $P_{\text{car}}(A)$ pour A.

Exercice 4.7. Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Montrer que le polynôme caractéristique de A est

$$P_{\text{car}}(x) = \det(A - xI_2) = x^2 - (a+d)x + (ad - bc)$$

Exercice 4.8. Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Montrer que le polynôme caractéristique $P_{\text{car}}(x) = \det(A - xI_3)$ de A est

$$-x^3 + (a+e+i)x^2 - \left(\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} \right) x + \det(A)$$

Exercice 4.9. Soit la matrice symétrique

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

où a, b, c sont des nombres réels. Montrer que les racines du polynôme caractéristique de A

$$P_{\text{car}}(x) = \det(A - xI_2) = x^2 - (a + c)x + (ac - b^2)$$

sont des nombres réels. Rappelons que les racines du polynôme $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, où $\alpha \neq 0$, sont

$$\frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

Exercice 4.10. Soit une fonction $f(x)$ telle que ses valeurs aux points 0, 1, 3 et 4 sont $f(0) = 2$, $f(1) = 3$, $f(3) = -1$ et $f(4) = -18$. En utilisant la règle de Cramer, déterminer l'unique polynôme $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ de degré trois tel que $P(0) = f(0)$, $P(1) = f(1)$, $P(3) = f(3)$ et $P(4) = f(4)$.

Chapitre 5

Géométrie vectorielle

Dans ce chapitre, nous allons premièrement étudier les notions de vecteurs dans le plan E^2 et l'espace euclidien usuel E^3 à trois dimensions. Nous étudierons ensuite les droites et plans de l'espace à trois dimensions.

5.1 Géométrie vectorielle dans le plan et l'espace

Fixons une origine O soit dans le plan E^2, soit dans l'espace E^3. Dans ce qui suivra, à moins d'avis contraire, E désignera autant le plan E^2 que l'espace euclidien usuel E^3.

Définition 5.1. Pour chaque point P de E, nous pouvons lui associer le segment de droite orienté reliant O à P. Nous noterons ce dernier par $\overrightarrow{OP}$. C'est ce que nous appellerons un **vecteur géométrique**. Ainsi un vecteur géométrique a une **longueur** : la longueur du segment, noté $\|\overrightarrow{OP}\|$ et une **direction** : la droite contenant le segment de droite, ainsi qu'un des deux sens possibles de cette droite. Nous noterons l'ensemble de vecteurs géométriques de E par $Vect(E)$

Nous pouvons illustrer un tel vecteur géométrique en traçant le segment de droite et en l'orientant par une flèche pour donner le sens.

Nous pouvons définir des opérations algébriques sur l'ensemble $Vect(E)$ des vecteurs géométriques.

Définition 5.2. Étant donné deux vecteurs géométriques $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$, alors nous pouvons définir l'addition au moyen de la **règle du parallélogramme**. Nous formons le parallélogramme ayant comme côtés : $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$. Ce parallélogrammme aura pour sommets : O, P, Q et S. Alors la **somme de** $\overrightarrow{OP}$ **et** $\overrightarrow{OQ}$, notée $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$ est la diagonale de parallélogramme $\overrightarrow{OS}$ allant de O au quatrième sommet S.

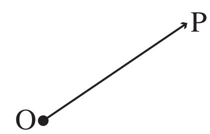


FIGURE 5.1 – Exemple d'un vecteur géométrique

Nous avons illustré ceci dans la figure suivante.

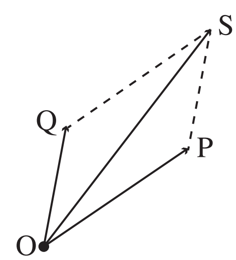


FIGURE 5.2 – Addition de deux vecteurs

Définition 5.3. Étant donné un vecteur géométrique $\overrightarrow{OP}$ et un scalaire α, alors nous pouvons définir la multiplication de $\overrightarrow{OP}$ par α, notée $\alpha\overrightarrow{OP}$, de la façon suivante :

- si $\alpha \geq 0$, alors $\alpha\overrightarrow{OP}$ est l'unique vecteur dans la même direction que $\overrightarrow{OP}$ et de longueur $\alpha \times \|\overrightarrow{OP}\|$
- si $\alpha \leq 0$, alors $\alpha\overrightarrow{OP}$ est l'unique vecteur dans la direction opposée à celle de $\overrightarrow{OP}$ et de longueur $|\alpha| \times \|\overrightarrow{OP}\|$

Nous avons illustré ceci dans la figure suivante.

FIGURE 5.3 – Multiplication par un scalaire

Il n'est pas difficile de vérifier que ces opérations satisfont les propriétés suivantes.

Proposition 5.1. *Soit $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ et $\overrightarrow{OR}$ des vecteurs géométriques et α, β des scalaires. Alors*

(a) $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OP}$

(b) $(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}) + \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + (\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR})$

(c) $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OO} = \overrightarrow{OP}$*, où* $\overrightarrow{OO}$ *est l'unique vecteur de longueur 0.*

(d) $\overrightarrow{OP} + (-1)\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO}$

(e) $1\,\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP}$

(f) $\alpha(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}) = \alpha\overrightarrow{OP} + \alpha\overrightarrow{OQ}$

(g) $(\alpha + \beta)\overrightarrow{OP} = \alpha\overrightarrow{OP} + \beta\overrightarrow{OP}$

(h) $(\alpha\beta)\overrightarrow{OP} = \alpha(\beta\overrightarrow{OP})$

(i) $0\,\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO}$

Définition 5.4. Étant donné n vecteurs géométriques $\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OP_2}, \ldots, \overrightarrow{OP_n}$, alors nous disons qu'un vecteur géométrique de la forme

$$\alpha_1\overrightarrow{OP_1} + \alpha_2\overrightarrow{OP_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{OP_n}$$

est une **combinaison linéaire de ces n vecteurs**.

Nous avons illustré ceci dans la figure 5.4

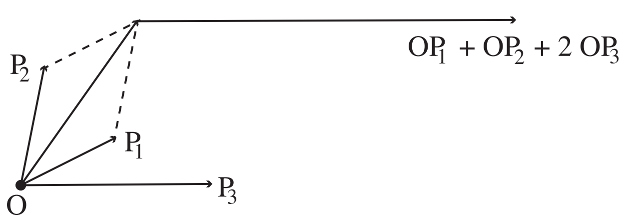


FIGURE 5.4 – Combinaison linéaire

Proposition 5.2. (a) *Soit deux points P_1, P_2 du plan E^2 tels que O, P_1 et P_2 sont distincts et non colinéaires (ils ne sont situés pas sur une même droite). Alors tout vecteur géométrique $\overrightarrow{OP}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{OP_1}$ et $\overrightarrow{OP_2}$, c'est-à-dire qu'il existe des scalaires c_1 et c_2 uniques tels que*

$$\overrightarrow{OP} = c_1\overrightarrow{OP_1} + c_2\overrightarrow{OP_2}.$$

(b) *Soit trois points P_1, P_2, P_3 de l'espace E^3 tels que O, P_1, P_2 et P_3 sont distincts et non coplanaires (ils ne sont situés pas sur un même plan). Alors tout vecteur géométrique $\overrightarrow{OP}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OP_2}$ et $\overrightarrow{OP_3}$, c'est-à-dire qu'il existe des scalaires c_1, c_2 et c_3 uniques tels que*

$$\overrightarrow{OP} = c_1\overrightarrow{OP_1} + c_2\overrightarrow{OP_2} + c_3\overrightarrow{OP_3}.$$

Preuve. (a) Nous pouvons considérer la droite Δ_{OP_1} contenant O et P_1 et la droite Δ_{OP_2} contenant O et P_2. Comme O, P_1 et P_2 sont non colinéaires, ces deux droites sont distinctes. Nous pouvons tracer la droite Δ_1 parallèle à Δ_{OP_1} passant par P, ainsi que la droite Δ_2 parallèle à Δ_{OP_2} passant par P. Nous aurons ainsi en considérant les quatre droites : Δ_{OP_1}, Δ_{OP_2}, Δ_1 et Δ_2 un parallélogramme ayant O, P_1, P_2 et P pour sommets. Par la règle du parallélogramme, nous obtenons facilement qu'il existe des scalaires c_1 et c_2 uniques tels que

$$\overrightarrow{OP} = c_1\overrightarrow{OP_1} + c_2\overrightarrow{OP_2}.$$

(b) Nous pouvons considérer le plan $\Pi_{OP_1P_2}$ contenant O, P_1 et P_2, le plan $\Pi_{OP_1P_3}$ contenant O, P_1 et P_3 et le plan $\Pi_{OP_2P_3}$ contenant O, P_2 et P_3. Comme O, P_1, P_2 et P_3 sont non coplanaires, ces trois plans sont distincts. Nous pouvons tracer le plan Π_{12} parallèle à $\Pi_{OP_1P_2}$ passant par P, le plan Π_{13} parallèle à $\Pi_{OP_1P_3}$ passant par P, ainsi que le plan Π_{23} parallèle à $\Pi_{OP_2P_3}$ passant par P. Nous aurons ainsi en considérant les six plans : $\Pi_{OP_1P_2}$, $\Pi_{OP_1P_3}$, $\Pi_{OP_2P_3}$, Π_{12}, Π_{13} et Π_{23} un parallélipipède ayant entre autres O, P_1, P_2, P_3 et P pour sommets. Par la règle du parallélogramme, nous obtenons facilement qu'il existe des scalaires c_1, c_2 et c_3 uniques tels que

$$\overrightarrow{OP} = c_1\overrightarrow{OP_1} + c_2\overrightarrow{OP_2} + c_3\overrightarrow{OP_3}.$$

Nous avons illustré la construction décrite en (a) ci-dessous. □

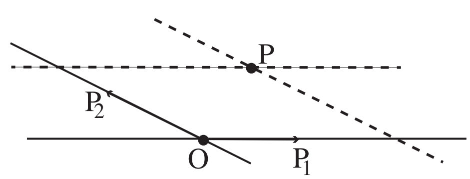


FIGURE 5.5 – Combinaison linéaire

Nous pouvons maintenant utiliser la proposition précédente pour associer des matrices aux vecteurs géométriques.

Définition 5.5. (a) Soit deux points P_1, P_2 du plan E^2 tels que O, P_1 et P_2 sont distincts et non colinéaires. Alors à tout vecteur géométrique $\overrightarrow{OP}$, nous pouvons lui associer la matrice de format 2×1 définie par

$$[\overrightarrow{OP}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

où $\mathcal{B}$ désigne l'ensemble des deux vecteurs $\{\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}\}$ et c_1, c_2 sont les uniques scalaires tels que

$$\overrightarrow{OP} = c_1\overrightarrow{OP_1} + c_2\overrightarrow{OP_2}.$$

(b) Soit trois points P_1, P_2, P_3 de l'espace E^3 tels que O, P_1, P_2 et P_3 sont distincts et non coplanaires. Alors à tout vecteur géométrique $\overrightarrow{OP}$, nous pouvons lui associer la matrice de format 3×1 définie par

$$[\overrightarrow{OP}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

où $\mathcal{B}$ désigne l'ensemble des trois vecteurs $\{\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3}\}$ et c_1, c_2, c_3 sont les uniques scalaires tels que

$$\overrightarrow{OP} = c_1\overrightarrow{OP_1} + c_2\overrightarrow{OP_2} + c_3\overrightarrow{OP_3}.$$

La matrice $[\overrightarrow{OP}]_{\mathcal{B}}$ est appelée la **matrice des coordonnées de $\overrightarrow{OP}$ relativement à** $\mathcal{B}$. Nous disons que $\mathcal{B}$ est une **base de l'espace** E .

Remarque 5.1. La matrice $[\overrightarrow{OP}]_{\mathcal{B}}$ associée au vecteur géométrique $\overrightarrow{OP}$ dépend de $\mathcal{B}$, ainsi que de l'ordre des vecteurs géométriques dans l'ensemble $\mathcal{B}$. Il faut donc considérer $\mathcal{B}$ comme un ensemble ordonné.

Proposition 5.3. *Soit $\mathcal{B}$ une base de l'espace $E = E^n$ où $n = 2$ ou 3 et $\mathbb{R}^n_c$ est l'ensemble des matrices de format $n \times 1$ dont les entrées sont des nombres réels. Alors la fonction*

$$Vect(E) \longrightarrow \mathbb{R}^n_c \quad \textit{définie par} \quad \overrightarrow{OP} \longmapsto [\overrightarrow{OP}]_{\mathcal{B}}$$

est bijective. De plus nous avons

$$[\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}]_{\mathcal{B}} = [\overrightarrow{OP}]_{\mathcal{B}} + [\overrightarrow{OQ}]_{\mathcal{B}} \quad \textit{et} \quad [\alpha\overrightarrow{OP}]_{\mathcal{B}} = \alpha[\overrightarrow{OP}]_{\mathcal{B}}$$

pour tout $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ} \in Vect(E)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Preuve. Ceci est une conséquence facile des propriétés énoncées à la proposition 6.1. □

Remarque 5.2. Souvent la base $\mathcal{B}$ de E est choisi de façon à ce que les vecteurs géométriques la composant soient de longueur 1 et perpendiculaires (nous dirons aussi orthogonaux) deux-à-deux entre eux. Dans une telle situation, nous dirons que $\mathcal{B}$ est une **base orthonormée**. Une base orthonormée permet de faciliter certains calculs, comme par exemple la longueur d'un vecteur géométrique ou encore l'angle entre deux vecteurs, mais il est parfois pratique d'utiliser une base qui n'est pas orthonormée.

Nous avons illustré de telles bases ci-dessous.

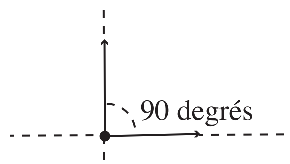


FIGURE 5.6 – Base orthonormée du plan E^2

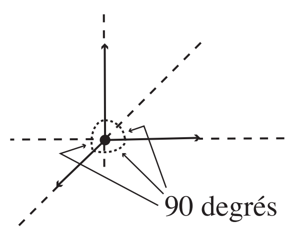


FIGURE 5.7 – Base orthonormée de l'espace E^3

Proposition 5.4. (a) *Soit* $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}\}$ *une base orthonormée de* E^2 *et un vecteur géométrique* $\overrightarrow{OP}$*. Si la matrice des coordonnées de* $\overrightarrow{OP}$ *relativement à la base* $\mathcal{B}$ *est*

$$[\overrightarrow{OP}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

alors la longueur $\|\overrightarrow{OP}\|$ *de* $\overrightarrow{OP}$ *est égale à* $\|\overrightarrow{OP}\| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$*.*

(b) *Soit $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3}\}$ une base orthonormée de E^3 et un vecteur géométrique $\overrightarrow{OP}$. Si la matrice des coordonnées de $\overrightarrow{OP}$ relativement à la base $\mathcal{B}$ est*

$$[\overrightarrow{OP}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

alors la longueur $\|\overrightarrow{OP}\|$ de $\overrightarrow{OP}$ est égale à $\|\overrightarrow{OP}\| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$.

Preuve. Ceci est une simple conséquence du théorème de Pythagore, à savoir que la longueur au carré de l'hypothénuse d'un triangle rectangle est égale à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés du triangle. □

Définition 5.6. (a) Soit $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}\}$ une base orthonormée de E^2 et deux vecteurs géométriques $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$ dont les matrices des coordonnées relativement à la base $\mathcal{B}$ sont

$$[\overrightarrow{OP}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [\overrightarrow{OQ}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

alors le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$, noté $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$, est défini comme étant

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = c_1 d_1 + c_2 d_2.$$

(b) Soit $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3}\}$ une base orthonormée de E^3 et deux vecteurs géométriques $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$ dont les matrices des coordonnées relativement à la base $\mathcal{B}$ sont

$$[\overrightarrow{OP}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [\overrightarrow{OQ}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

alors le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$, noté $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$, est défini comme étant

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3.$$

Remarque 5.3. Il est possible d'exprimer la longueur d'un vecteur au moyen du produit scalaire, plus précisément nous avons

$$\|\overrightarrow{OP}\| = \sqrt{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP}}.$$

En effet si $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3}\}$ est une base orthonormée de E^3 et

$$[\overrightarrow{OP}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

alors

$$\sqrt{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP}} = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} = \|\overrightarrow{OP}\|.$$

La preuve est similaire dans le cas d'un vecteur de E^2.

Définition 5.7. Étant donné deux vecteurs géométriques $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$ de $E = E^2$ ou E^3, alors on définit l'angle θ fait par ces deux vecteurs comme étant l'angle fait par la demi-droite Δ_P d'origine O et passant par P avec la demi-droite Δ_Q d'origine O et passant par Q. Cet angle est celui compris entre 0 et π. Dans le cas de E^3, il faut considérer un plan Π passant par les points O, P et Q et alors les demi-droites seront contenues dans Π et nous mesurons l'angle dans ce plan.

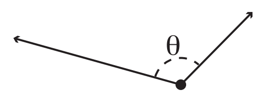


FIGURE 5.8 – Angle entre deux vecteurs

Proposition 5.5. *Soit deux vecteurs géométriques $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$ de $E = E^2$ ou E^3 et dont l'angle entre eux est θ, alors*

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = \|\overrightarrow{OP}\|\|\overrightarrow{OQ}\| \cos(\theta).$$

Preuve. Nous ferons la preuve dans le cas de E^3. Il faut utiliser la loi des cosinus pour les triangles. Notons par $\overrightarrow{OR}$: l'unique vecteur tel que $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OQ}$. Nous avons ainsi la figure suivante : Le segment de droite de sommets P et Q a

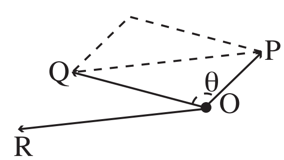


FIGURE 5.9 – Angle et produit scalaire

comme longueur $\|\overrightarrow{OR}\|$. Par la loi des cosinus, nous avons

$$\|\overrightarrow{OR}\|^2 = \|\overrightarrow{OP}\|^2 + \|\overrightarrow{OQ}\|^2 - 2\|\overrightarrow{OP}\|\|\overrightarrow{OQ}\| \cos(\theta) \tag{5.1}$$

Si maintenant $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3}\}$ une base orthonormée de E^3 et les matrices des coordonnées de $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$ relativement à la base $\mathcal{B}$ sont

$$[\overrightarrow{OP}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [\overrightarrow{OQ}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

alors $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$ et

$$[\overrightarrow{OR}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} d_1 - c_1 \\ d_2 - c_2 \\ d_3 - c_3 \end{bmatrix}$$

Si nous remplaçons ces trois vecteurs dans l'équation 5.1, nous obtenons

$$\begin{aligned} &(d_1 - c_1)^2 + (d_2 - c_2)^2 + (d_3 - c_3)^2 \\ &= (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) + (d_1^2 + d_2^2 + d_3^2) - 2\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}\sqrt{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}\cos(\theta) \end{aligned}$$

Nous obtenons après simplification

$$(c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3) = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}\sqrt{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}\cos(\theta)$$

c'est-à-dire la formule que nous voulions démontrer

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = \|\overrightarrow{OP}\|\|\overrightarrow{OQ}\|\cos(\theta).$$

$\square$

Définition 5.8. Soit deux vecteurs géométriques $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$ de $E = E^2$ ou E^3. Nous dirons qu'ils sont **orthogonaux ou encore perpendiculaires entre eux** si et seulement si le produit scalaire $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ est nul. Notons que s'ils ne sont pas nuls, alors $\|\overrightarrow{OP}\| \neq 0$, $\|\overrightarrow{OQ}\| \neq 0$ et, parce que $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0$, nous obtenons que $\cos(\theta) = 0$ et l'angle θ entre eux est $\pi/2$ ou encore 90 degrés

Exemple 5.1. Soit $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3}\}$ une base orthonormée de E^3 et les deux vecteurs géométriques $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$ dont les matrices des coordonnées relativement à la base $\mathcal{B}$ sont

$$[\overrightarrow{OP}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [\overrightarrow{OQ}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Alors $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$ sont perpendiculaires entre eux, car

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = (1)(5) + (-2)(1) + (1)(-3) = 0$$

Définition 5.9. Soit $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3}\}$ une base orthonormée de E^3 et deux vecteurs géométriques $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$ dont les matrices des coordonnées relativement à la base $\mathcal{B}$ sont

$$[\overrightarrow{OP}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [\overrightarrow{OQ}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

alors le **produit vectoriel des vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$, noté** $\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}$, est défini comme étant le vecteur géométrique

$$(c_2d_3 - c_3d_2)\overrightarrow{OP_1} - (c_1d_3 - c_3d_1)\overrightarrow{OP_2} + (c_1d_2 - c_2d_1)\overrightarrow{OP_3}.$$

En d'autres mots, la matrice des coordonnées relativement à la base $\mathcal{B}$ de $\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}$ est

$$[\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} (c_2d_3 - c_3d_2) \\ -(c_1d_3 - c_3d_1) \\ (c_1d_2 - c_2d_1) \end{bmatrix}$$

Remarque 5.4. Il existe un moyen mnémotechnique pour se souvenir de la formule du produit vectoriel. En effet, il suffit d'utiliser le développement de Laplace selon la première ligne du déterminant de la matrice

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{OP_1} & \overrightarrow{OP_2} & \overrightarrow{OP_3} \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{bmatrix}$$

Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ} &= \begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ d_2 & d_3 \end{vmatrix} \overrightarrow{OP_1} - \begin{vmatrix} c_1 & c_3 \\ d_1 & d_3 \end{vmatrix} \overrightarrow{OP_2} + \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} \overrightarrow{OP_3} \\ &= (c_2d_3 - c_3d_2)\overrightarrow{OP_1} - (c_1d_3 - c_3d_1)\overrightarrow{OP_2} + (c_1d_2 - c_2d_1)\overrightarrow{OP_3} \end{aligned}$$

Exemple 5.2. Soit $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3}\}$ une base orthonormée de E^3 et les deux vecteurs géométriques $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$ dont les matrices des coordonnées relativement à la base $\mathcal{B}$ sont

$$[\overrightarrow{OP}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [\overrightarrow{OQ}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Alors le produit vectoriel $\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}$ est

$$\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{OP_1} & \overrightarrow{OP_2} & \overrightarrow{OP_3} \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \overrightarrow{OP_1} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} \overrightarrow{OP_2} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{OP_3}$$

$$= 5\,\overrightarrow{OP_1} + 8\,\overrightarrow{OP_2} + 11\,\overrightarrow{OP_3}.$$

Remarque 5.5. Nous pouvons noter que, dans cet exemple, le vecteur $\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}$ est orthogonal aux deux vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$. En effet, il suffit de faire les produits scalaires $(\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}) \cdot \overrightarrow{OP}$ et $(\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}) \cdot \overrightarrow{OQ}$. Nous avons

$$(\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}) \cdot \overrightarrow{OP} = (5)(1) + (8)(-2) + (11)(1) = 0$$

et

$$(\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}) \cdot \overrightarrow{OQ} = (5)(5) + (8)(1) + (11)(-3) = 0$$

Nous allons maintenant décrire géométriquement le produit vectoriel de deux vecteurs géométriques. Il nous faut premièrement orienté l'espace E^3. Nous allons utiliser l'orientation de la main droite.

Définition 5.10. Une base orthonormée $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3}\}$ de E^3 est dite **orientée selon la règle de la main droite** si nous écrasons le vecteur $\overrightarrow{OP_1}$ sur le vecteur $\overrightarrow{OP_2}$ avec notre main droite, alors le pouce de cette main droite est dirigé dans le sens de $\overrightarrow{OP_3}$. Notons qu'ici nous avons ordonné les vecteurs de cette base et nous tenons compte de cet ordre dans notre définition.

Proposition 5.6. *Soit deux vecteurs géométriques $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$ non nuls de E^3 tels que les trois points O, P, Q sont distincts, non colinéaires et dont l'angle entre eux est θ. Alors $\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}$ est l'unique vecteur orthogonal aux deux vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$ de longueur $\|\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}\|$ égale à l'aire du parallélogramme de côtés $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$, soit $\|\overrightarrow{OP}\|\|\overrightarrow{OQ}\| \sin(\theta)$ et dont le sens est obtenu par la règle de la main droite. Cette dernière règle stipule que si nous écrasons le vecteur $\overrightarrow{OP}$ sur le vecteur $\overrightarrow{OQ}$ avec notre main droite, alors le pouce de cette main droite est dirigé dans le sens de $\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}$.*

Preuve. Fixons $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3}\}$ une base orthonormée de E^3 orientée selon la règle de la main droite. Notons les matrices des coordonnées de $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$ relativement à la base $\mathcal{B}$ par

$$[\overrightarrow{OP}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [\overrightarrow{OQ}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}.$$

Le produit vectoriel $\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}$ est le vecteur géométrique

$$(c_2d_3 - c_3d_2)\overrightarrow{OP_1} - (c_1d_3 - c_3d_1)\overrightarrow{OP_2} + (c_1d_2 - c_2d_1)\overrightarrow{OP_3}.$$

Nous pouvons calculer les produits scalaires $(\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}) \cdot \overrightarrow{OP}$ et $(\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}) \cdot \overrightarrow{OQ}$. Nous avons

$$(\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}) \cdot \overrightarrow{OP} = c_1(c_2d_3 - c_3d_2) - c_2(c_1d_3 - c_3d_1) + c_3(c_1d_2 - c_2d_1) = 0$$

et

$$(\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}) \cdot \overrightarrow{OQ} = d_1(c_2d_3 - c_3d_2) - d_2(c_1d_3 - c_3d_1) + d_3(c_1d_2 - c_2d_1) = 0.$$

Ceci montre bien que $\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$.

Nous voulons maintenant calculer la longueur $\|\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}\|$ de $\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}$ et montrer que celle-ci est égale à $\|\overrightarrow{OP}\|\|\overrightarrow{OQ}\| \sin(\theta)$. Il nous faut premièrement évaluer $\sin(\theta)$ au moyen du produit scalaire. Nous avons que

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = \|\overrightarrow{OP}\|\|\overrightarrow{OQ}\| \cos(\theta),$$

où θ est compris entre 0 et π. Ainsi

$$c_1d_1 + c_2d_2 + c_3d_3 = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}\sqrt{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}\cos(\theta)$$

signifie que

$$\cos(\theta) = \frac{c_1d_1 + c_2d_2 + c_3d_3}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}\sqrt{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}}.$$

Comme θ est compris entre 0 et π, alors $\sin(\theta) > 0$. Noter $\theta \neq 0, \pi$, car les trois points O, P, Q sont distincts et non colinéaires. Nous avons ainsi que

$$\sin(\theta) = \sqrt{1-\cos^2(\theta)} = \sqrt{1-\left(\frac{c_1d_1+c_2d_2+c_3d_3}{\sqrt{c_1^2+c_2^2+c_3^2}\sqrt{d_1^2+d_2^2+d_3^2}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{(c_1^2+c_2^2+c_3^2)(d_1^2+d_2^2+d_3^2)-(c_1d_1+c_2d_2+c_3d_3)^2}{(c_1^2+c_2^2+c_3^2)(d_1^2+d_2^2+d_3^2)}}$$

$$= \frac{\sqrt{(c_1d_2-c_2d_1)^2+(c_1d_3-c_3d_1)^2+(c_2d_3-c_3d_2)^2}}{\sqrt{(c_1^2+c_2^2+c_3^2)}\sqrt{(d_1^2+d_2^2+d_3^2)}}$$

$$= \frac{\sqrt{(c_1d_2-c_2d_1)^2+(c_1d_3-c_3d_1)^2+(c_2d_3-c_3d_2)^2}}{\|\overrightarrow{OP}\|\|\overrightarrow{OQ}\|}$$

Maintenant

$$\|\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ}\| = \sqrt{(c_2d_3-c_3d_2)^2+(c_1d_3-c_3d_1)^2+(c_1d_2-c_2d_1)^2}$$

et

$$\|\overrightarrow{OP}\|\|\overrightarrow{OQ}\|\sin(\theta) = \|\overrightarrow{OP}\|\|\overrightarrow{OQ}\|\frac{\sqrt{(c_1d_2-c_2d_1)^2+(c_1d_3-c_3d_1)^2+(c_2d_3-c_3d_2)^2}}{\|\overrightarrow{OP}\|\|\overrightarrow{OQ}\|}$$

Donc $\|\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ}\| = \|\overrightarrow{OP}\|\|\overrightarrow{OQ}\|\sin(\theta)$.

Il nous reste maintenant qu'à vérifier que le sens de $\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ}$ est bien donné par la règle de la main droite. Nous pouvons effectuer une rotation de façon à ramener le vecteur $\overrightarrow{OP}$ au vecteur $c\,\overrightarrow{OP_1}$ et le vecteur $\overrightarrow{OQ}$ au vecteur $d\,\overrightarrow{OP_2}$ avec $c > 0$ et $d > 0$. Par cette rotation le vecteur $\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ}$ correspondera à un multiple de $\overrightarrow{OP_3}$. Cette rotation ne modifie pas l'orientation de l'espace. Pour compléter la preuve, il nous faut montrer que $c\,\overrightarrow{OP_1}\times d\,\overrightarrow{OP_2}$ est égal à un multiple positif de $\overrightarrow{OP_3}$. Mais les matrices des coordonnées de $c\,\overrightarrow{OP_1}$ et $d\,\overrightarrow{OP_2}$ relativement à la base $\mathcal{B}$ par

$$[c\,\overrightarrow{OP_1}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [d\,\overrightarrow{OP_2}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ d \\ 0 \end{bmatrix}.$$

De la définition, nous obtenons que

$$[c\,\overrightarrow{OP_1} \times d\,\overrightarrow{OP_2}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ cd \end{bmatrix}.$$

En d'autres mots, $c\,\overrightarrow{OP_1} \times d\,\overrightarrow{OP_2} = cd\,\overrightarrow{OP_3}$ avec $cd > 0$. Ceci complète la preuve. □

5.2 Droites et plans dans E^3.

Fixons une origine O et une base orthonormée $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3}\}$ de E^3 orientée selon la règle de la main droite.

Définition 5.11. À tout point P de l'espace, nous pouvons lui associer l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{OP}$. Cette correspondance est biunivoque. De cette façon, nous pouvons associer des coordonnées (x, y, z) au point P qui seront celles du vecteur géométrique $\overrightarrow{OP}$, où nous exprimons $\overrightarrow{OP}$ comme la combinaison linéaire $x\,\overrightarrow{OP_1} + y\,\overrightarrow{OP_2} + z\,\overrightarrow{OP_3}$, où x, y et z sont des scalaires. En d'autres mots, si (x, y, z) sont les coordonnées du point P, alors la matrice des coordonnées du vecteur géométrique $\overrightarrow{OP}$ relativement à la base $\mathcal{B}$ sera

$$[\overrightarrow{OP}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Nous avons illustré ceci à la figure 5.10.

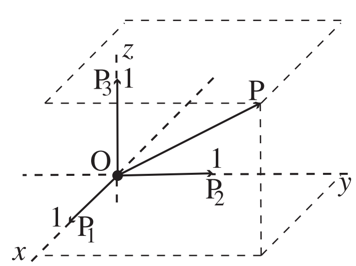


FIGURE 5.10 – Coordonnées

Nous pouvons décrire un objet géométrique (droite, plan ou courbe) au moyen des coordonnées de ses points. Nous allons maintenant étudier les droites et les plans de E^3.

Il est bien connu qu'étant donné deux points distincts P et Q de l'espace E^3, il existe une et une seule droite Δ_{PQ} passant par ces points. Il est possible de décrire les coordonnées des points de la droite Δ_{PQ} de deux façons. Dans la première façon, il s'agit de décrire les coordonnées par des équations contenant un paramètre ; alors que dans la seconde, il s'agit d'éliminer ce paramètre et les coordonnées seront alors les solutions d'un système de deux équations linéaires.

Définition 5.12. Soit deux points distincts $P = (x_1, y_1, z_1)$ et $Q = (x_2, y_2, z_2)$ de E^3 et Δ_{PQ} l'unique droite passant par P et Q. Le vecteur $\overrightarrow{D} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$ est un **vecteur direction** de la droite Δ_{PQ}. Sa matrice de coordonnées relativement à la base $\mathcal{B}$ est

$$[\overrightarrow{D}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}.$$

Les **équations paramétriques de la droite** Δ_{PQ} sont

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t; \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t; \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)t; \end{cases} \qquad \text{où } t \text{ est un scalaire quelconque.}$$

Ainsi à chaque point $R = (x_0, y_0, z_0)$ de la droite Δ_{PQ} lui correspond un et un seul scalaire t_0 tel que

$$\begin{cases} x_0 = x_1 + (x_2 - x_1)t_0; \\ y_0 = y_1 + (y_2 - y_1)t_0; \\ z_0 = z_1 + (z_2 - z_1)t_0; \end{cases}$$

Remarque 5.6. Il est aussi possible de décrire une droite Δ en donnant un vecteur direction $\overrightarrow{D}$ et un point $P = (x_1, y_1, z_1)$ de E^3. Notons la matrice de coordonnées du vecteur $\overrightarrow{D}$ relativement à la base $\mathcal{B}$ par

$$[\overrightarrow{D}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}.$$

Notons que le vecteur $\overrightarrow{D}$ est un vecteur non nul. Alors les équations paramétriques de la droite Δ seront

$$\begin{cases} x = x_1 + \alpha t; \\ y = y_1 + \beta t; \\ z = z_1 + \gamma t; \end{cases} \qquad \text{où } t \text{ est un scalaire quelconque.}$$

Exemple 5.3. Soit les deux points $P = (1, 3, 0)$ et $Q = (-1, 2, 5)$ de E^3. Alors les équations paramétriques de l'unique droite Δ_{PQ} passant par P et Q sont

$$\begin{cases} x = 1 - 2t; \\ y = 3 - t; \\ z = 5t; \end{cases} \qquad \text{où } t \text{ est un scalaire quelconque.}$$

En effet, le vecteur direction $\overrightarrow{D}$ de Δ_{PQ} a comme matrice de coordonnées relativement à la base $\mathcal{B}$ la matrice

$$[\overrightarrow{D}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1-1 \\ 2-3 \\ 5-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Nous pouvons aussi déterminer si un point de E^3 appartient à la droite Δ_{PQ}. Par exemple, le point $R = (9, 7, -20)$ appartient à la droite Δ_{PQ}. En effet, il faut montrer qu'il existe un scalaire t tel que

$$\begin{cases} 9 = 1 - 2t; \\ 7 = 3 - t; \\ -20 = 5t. \end{cases}$$

De la première équation $9 = 1-2t$, nous obtenons que $t = -4$. Si nous substituons $t = -4$ dans les deux autres équations, nous voyons que celles-ci sont vérifiées, car $7 = 3 - (-4)$ et $-20 = 5(-4)$.

De façon similaire, nous pouvons montrer que le point $S = (-1, 4, 2)$ n'appartient pas à la droite Δ_{PQ}. En effet, il faut montrer qu'il n'existe pas de scalaire t tel que

$$\begin{cases} -1 = 1 - 2t; \\ 4 = 3 - t; \\ 2 = 5t. \end{cases}$$

De la première équation $-1 = 1-2t$, nous obtenons que $t = 1$. Si nous substituons $t = 1$ dans les deux autres équations, celles-ci ne sont pas vérifiées, car $4 \neq 3-1 = 2$ et $2 \neq 5(1) = 5$.

Il est possible de décrire une droite comme l'intersection de deux plans. Soit deux points $P = (x_1, y_1, z_1)$ et $Q = (x_2, y_2, z_2)$ de E^3 tels que $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ et $z_1 \neq z_2$, alors nous pouvons éliminer le paramètre t des équations paramétriques, parce que $x_2 - x_1 \neq 0$, $y_2 - y_1 \neq 0$ et $z_2 - z_1 \neq 0$. Nous obtenons alors

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Chacune de ces expressions est égale au paramètre éliminé t. De même si les composantes du vecteur direction $\overrightarrow{D} = (\alpha, \beta, \gamma)$ de Δ_{PQ} sont toutes non nuls, alors nous pouvons aussi éliminer le paramètre t des équations paramétriques et nous obtenons

$$\frac{x - x_1}{\alpha} = \frac{y - y_1}{\beta} = \frac{z - z_1}{\gamma}$$

Noter que si $x_1 = x_2$ ou $y_1 = y_2$ ou encore $z_1 = z_2$, il est aussi possible d'éliminer le paramètre t. Les trois égalités ne peuvent pas se produire simultanément.

Exemple 5.4. Si nous reprenons les deux points de l'exemple précédent, à savoir $P = (1, 3, 0)$ et $Q = (-1, 2, 5)$, alors nous pouvons éliminer le paramètre t des équations paramétriques. Nous obtenons alors

$$\frac{x - 1}{-1 - 1} = \frac{y - 3}{2 - 3} = \frac{z - 0}{5 - 0}$$

c'est-à-dire

$$-\frac{x - 1}{2} = -\frac{y - 3}{1} = \frac{z}{5}$$

ou encore

$$x - 1 = 2(y - 3) \quad \text{et} \quad -5(x - 1) = 2z.$$

Nous avons donc décrit la droite Δ_{PQ} comme l'intersection des deux plans dont les équations sont $x - 2y = -5$ et $5x + 2z = 5$.

Il est bien connu qu'étant donné trois points distincts non colinéaires P, Q, R de l'espace E^3, il existe un et un seul plan Π_{PQR} passant par ces points. Il est possible de décrire les coordonnées des points du plan Π_{PQR} de deux façons. Dans la première façon, il s'agit de décrire les coordonnées par des équations contenant deux paramètres ; alors que dans la seconde, il s'agit d'éliminer ces paramètres et les coordonnées seront alors les solutions d'une équation linéaire.

Définition 5.13. Soit trois points distincts non colinéaires $P = (x_1, y_1, z_1)$, $Q = (x_2, y_2, z_2)$, $R = (x_3, y_3, z_3)$ de l'espace E^3 et Π_{PQR} l'unique plan passant par P, Q et R. Les vecteurs $\overrightarrow{D_1} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{D_2} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP}$ sont des **vecteurs directeurs** du plan Π_{PQR}. Les matrices de coordonnées relativement à la base $\mathcal{B}$ sont

$$[\overrightarrow{D_1}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [\overrightarrow{D_2}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \\ z_3 - z_1 \end{bmatrix}$$

Les **équations paramétriques du plan** Π_{PQR} sont

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)u + (x_3 - x_1)v; \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)u + (y_3 - y_1)v; \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)u + (z_3 - z_1)v; \end{cases} \qquad \text{où } u \text{ et } v \text{ sont des scalaires quelconques.}$$

Ainsi à chaque point $S = (x_0, y_0, z_0)$ du plan Π_{PQR} lui correspond une et une seule paire (u_0, v_0) de scalaires telle que

$$\begin{cases} x_0 = x_1 + (x_2 - x_1)u_0 + (x_3 - x_1)v_0; \\ y_0 = y_1 + (y_2 - y_1)u_0 + (y_3 - y_1)v_0; \\ z_0 = z_1 + (z_2 - z_1)u_0 + (z_3 - z_1)v_0; \end{cases} \qquad \text{où } u_0 \text{ et } v_0 \text{ sont des scalaires.}$$

Remarque 5.7. Pour savoir si les trois points $P = (x_1, y_1, z_1)$, $Q = (x_2, y_2, z_2)$, $R = (x_3, y_3, z_3)$ sont colinéaires ou pas, il faut considérer les vecteurs directeurs définis ci-dessus $\overrightarrow{D_1}$ et $\overrightarrow{D_2}$. Alors les trois points P, Q et R sont colinéaires si et seulement s'il existe un scalaire c tel que $\overrightarrow{D_2} = c\overrightarrow{D_1}$. Cette dernière condition signifie que les matrices de coordonnées relativement à la base $\mathcal{B}$ sont telles que

$$\begin{bmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \\ z_3 - z_1 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$$

Il est facile de vérifier s'il existe un tel scalaire c. En d'autres mots, les trois points P, Q et R ne sont pas colinéaires si et seulement si les deux vecteurs directeurs $\overrightarrow{D_1}$ et $\overrightarrow{D_2}$ ne sont pas multiples l'un de l'autre.

Une autre façon de savoir si trois points sont colinéaires est de considérer l'angle θ fait par les deux vecteurs $\overrightarrow{D_1}$ et $\overrightarrow{D_2}$. En effet si $\theta = 0$ ou π, alors les trois points sont colinéaires. Nous pouvons calculer l'angle au moyen du produit scalaire. Mais le plus simple est de calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{D_1} \times \overrightarrow{D_2}$. En effet ce produit vectoriel a comme longueur $\|\overrightarrow{D_1}\|\|\overrightarrow{D_1}\| \sin(\theta)$. Donc les trois points P, Q et R sont colinéaires si et seulement si le produit vectoriel $\overrightarrow{D_1} \times \overrightarrow{D_2}$ est le vecteur nul $\overrightarrow{OO}$.

Remarque 5.8. Il est aussi possible de décrire un plan Π en donnant deux vecteurs directeurs $\overrightarrow{D_1}$ et $\overrightarrow{D_2}$ non multiples l'un de l'autre et un point $P = (x_1, y_1, z_1)$ de E^3. Notons les matrices de coordonnées de $\overrightarrow{D_1}$ et $\overrightarrow{D_2}$ relativement à la base $\mathcal{B}$ par

$$[\overrightarrow{D_1}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [\overrightarrow{D_2}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}$$

Alors les équations paramétriques du plan Π sont

$$\begin{cases} x = x_1 + \alpha_1 u + \alpha_2 v; \\ y = y_1 + \beta_1 u + \beta_2 v; \\ z = z_1 + \gamma_1 u + \gamma_2 v; \end{cases} \qquad \text{où } u \text{ et } v \text{ sont des scalaires quelconques.}$$

Exemple 5.5. Considérons les trois points $P = (1, 3, -2)$, $Q = (-1, 4, 3)$ et $R = (4, -2, 0)$ de l'espace E^3. Vérifions premièrement que ces trois points ne sont pas colinéaires. Pour ceci, il faut considérer les vecteurs $\overrightarrow{D_1} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{D_2} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP}$. Les matrices de coordonnées relativement à la base $\mathcal{B}$ sont

$$[\overrightarrow{D_1}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1-1 \\ 4-3 \\ 3-(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [\overrightarrow{D_2}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 4-1 \\ -2-3 \\ 0-(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Comme nous l'avons indiqué à la remarque 5.7, nous avons deux façons de procéder pour vérifier si les trois points sont ou ne sont pas colinéaires. Première façon. Est-ce qu'il existe un scalaire c tel que $[\overrightarrow{D_2}]_{\mathcal{B}} = c[\overrightarrow{D_1}]_{\mathcal{B}}$, Si c'était le cas, alors nous aurions $3 = -2c$, $-5 = c1$ et $2 = 5c$. Ceci est impossible car, de la première équation, nous obtenons que $c = -3/2$, alors que de la deuxième et troisième, nous obtenons que $c = -5$ et $c = 2/5$. Donc les trois points P, Q et R ne sont pas colinéaires. Deuxième façon. Il suffit de calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{D_1} \times \overrightarrow{D_2}$. Nous obtenons que le produit vectoriel $\overrightarrow{D_1} \times \overrightarrow{D_2}$ est égal à

$$((1)(2) - (5)(-5))\overrightarrow{OP_1} - ((-2)(2) - (5)(3))\overrightarrow{OP_2} + ((-2)(-5) - (1)(3))\overrightarrow{OP_3}$$

c'est-à-dire $\overrightarrow{D_1} \times \overrightarrow{D_2} = 27\,\overrightarrow{OP_1} + 19\,\overrightarrow{OP_2} + 7\,\overrightarrow{OP_3}$. Comme ce produit vectoriel n'est pas nul, alors les trois points P, Q et R ne sont pas colinéaires.

Il existe donc un et un seul plan Π_{PQR} contenant ces trois points. Les équations paramétriques du plan Π_{PQR} sont

$$\begin{cases} x = 1 - 2u + 3v; \\ y = 3 + 1u - 5v; \\ z = -2 + 5u + 2v; \end{cases} \qquad \text{où } u \text{ et } v \text{ sont des scalaires quelconques.}$$

Nous pouvons déterminer si un point de E^3 appartient au plan Π_{PQR}. Par exemple, le point $S = (8, -11, 9)$ appartient au plan Π_{PQR}. En effet, il faut montrer qu'il existe une paire (u, v) de scalaires telle que

$$\begin{cases} 8 = 1 - 2u + 3v; \\ -11 = 3 + 1u - 5v; \\ 9 = -2 + 5u + 2v; \end{cases}$$

Nous obtenons ainsi le système d'équations linéaires

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -14 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Ce système a une et une seule solution $(u, v) = (1, 3)$. Donc S est un point de Π_{PQR}.

Par exemple, l'origine, le point $O = (0, 0, 0)$ n'appartient pas au plan Π_{PQR}. En effet, il faut montrer qu'il n'existe pas une paire (u, v) de scalaires tel que

$$\begin{cases} 0 = 1 - 2u + 3v; \\ 0 = 3 + 1u - 5v; \\ 0 = -2 + 5u + 2v; \end{cases}$$

Nous obtenons ainsi le système d'équations linéaires

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ce système n'a aucune solution.

Nous pouvons aussi décrire un plan Π_{PQR} en éliminant les paramètres u et v. Soit trois points distincts non colinéaires $P = (x_1, y_1, z_1)$, $Q = (x_2, y_2, z_2)$, $R = (x_3, y_3, z_3)$ de l'espace E^3 et Π_{PQR} l'unique plan passant par P, Q et R. Soit aussi les vecteurs directeurs $\overrightarrow{D_1} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{D_2} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP}$ du plan Π_{PQR} dont les matrices de coordonnées relativement à la base $\mathcal{B}$ sont

$$[\overrightarrow{D_1}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} = \quad \text{et} \quad [\overrightarrow{D_2}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \\ z_3 - z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}$$

Comme ces deux vecteurs $\overrightarrow{D_1}$ et $\overrightarrow{D_2}$ ne sont pas nuls, nous avons que

$$\alpha_1 \neq 0 \quad \text{ou} \quad \beta_1 \neq 0 \quad \text{ou encore} \quad \gamma_1 \neq 0$$

et

$$\alpha_2 \neq 0 \quad \text{ou} \quad \beta_2 \neq 0 \quad \text{ou encore} \quad \gamma_2 \neq 0$$

De plus comme les trois points P, Q et R ne sont pas colinéaires, alors le produit vectoriel $\overrightarrow{D_1} \times \overrightarrow{D_2}$ n'est pas nul. En considérant la matrice des coordonnées relativement à la base $\mathcal{B}$ du vecteur $\overrightarrow{D_1} \times \overrightarrow{D_2}$, nous avons que

$$\delta_1 = \beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2 \neq 0 \text{ ou } \delta_2 = \gamma_1\alpha_2 - \alpha_1\gamma_2 \neq 0 \text{ ou } \delta_3 = \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2 \neq 0.$$

Avec ces notations, nous avons que

$$[\overrightarrow{D_1} \times \overrightarrow{D_2}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix}.$$

Dans ce qui suivra, nous allons supposer que $\alpha_1 \neq 0$ et $\delta_3 = \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2 \neq 0$. Dans les autres situations, il est facile d'adapter notre méthode pour éliminer les paramètres. Ainsi un point (x, y, z) appartient au plan Π_{PQR} si et seulement s'il existe une paire (u, v) de scalaires tels que

$$\begin{cases} x = x_1 + \alpha_1 u + \alpha_2 v; \\ y = y_1 + \beta_1 u + \beta_2 v; \\ z = z_1 + \gamma_1 u + \gamma_2 v; \end{cases} \qquad \text{où } u \text{ et } v \text{ sont des scalaires quelconques.}$$

En d'autres mots, le système de trois équations linéaires à deux inconnues a au moins une solution

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} (x - x_1) \\ (y - y_1) \\ (z - z_1) \end{bmatrix}}_{B} \qquad (\spadesuit)$$

Il nous faut donc résoudre ce système en utilisant l'algorithme d'élimination de Gauss-Jordan. Nous allons utiliser nos hypothèses $\alpha_1 \neq 0$ et $\delta_3 = \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2 \neq 0$.

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & (x - x_1) \\ \beta_1 & \beta_2 & (y - y_1) \\ \gamma_1 & \gamma_2 & (z - z_1) \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \longleftarrow (1/\alpha_1) L_1} \begin{bmatrix} 1 & \alpha_2/\alpha_1 & (x - x_1)/\alpha_1 \\ \beta_1 & \beta_2 & (y - y_1) \\ \gamma_1 & \gamma_2 & (z - z_1) \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \longleftarrow L_3 - \gamma_1 L_1]{L_2 \longleftarrow L_2 - \beta_1 L_1} \begin{bmatrix} 1 & \alpha_2/\alpha_1 & (x - x_1)/\alpha_1 \\ 0 & \delta_3/\alpha_1 & (\alpha_1(y - y_1) - \beta_1(x - x_1))/\alpha_1 \\ 0 & -\delta_2/\alpha_1 & (\alpha_1(z - z_1) - \gamma_1(x - x_1))/\alpha_1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \longleftarrow (\alpha_1/\delta_3) L_2} \begin{bmatrix} 1 & \alpha_2/\alpha_1 & (x - x_1)/\alpha_1 \\ 0 & 1 & (\alpha_1(y - y_1) - \beta_1(x - x_1))/\delta_3 \\ 0 & -\delta_2/\alpha_1 & (\alpha_1(z - z_1) - \gamma_1(x - x_1))/\alpha_1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \longleftarrow L_3 + (\delta_2/\alpha_1) L_2]{L_1 \longleftarrow L_1 - (\alpha_2/\alpha_1) L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & (\beta_2(x - x_1) - \alpha_2(y - y_1))/\delta_3 \\ 0 & 1 & (\alpha_1(y - y_1) - \beta_1(x - x_1))/\delta_3 \\ 0 & 0 & (\delta_1(x - x_1) + \delta_2(y - y_1) + \delta_3(z - z_1))/\delta_3 \end{bmatrix}$$

Le rang $rg(A)$ est égal au rang $rg([A|B])$ si et seulement si

$$\delta_1(x - x_1) + \delta_2(y - y_1) + \delta_3(z - z_1) = 0.$$

Donc le système (♠) a au moins une solution si et seulement si

$$\delta_1(x - x_1) + \delta_2(y - y_1) + \delta_3(z - z_1) = 0.$$

Cette dernière équation est l'équation du plan Π_{PQR}.

Proposition 5.7. *Soit trois points distincts non colinéaires $P = (x_1, y_1, z_1)$, $Q = (x_2, y_2, z_2)$, $R = (x_3, y_3, z_3)$ de l'espace E^3 et Π_{PQR} l'unique plan passant par P, Q et R. Soit aussi les vecteurs directeurs $\overrightarrow{D_1} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{D_2} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP}$ du plan Π_{PQR} dont les matrices de coordonnées relativement à la base $\mathcal{B}$ sont*

$$[\overrightarrow{D_1}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} = \quad \textit{et} \quad [\overrightarrow{D_2}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \\ z_3 - z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}$$

Notons la matrice des coordonnées relativement à la base $\mathcal{B}$ du produit vectoriel $\overrightarrow{D_1} \times \overrightarrow{D_2}$ par

$$[\overrightarrow{D_1} \times \overrightarrow{D_2}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix}.$$

Alors un point (x, y, z) de E^3 appartient au plan Π_{PQR} si et seulement si

$$\delta_1(x - x_1) + \delta_2(y - y_1) + \delta_3(z - z_1) = 0.$$

De plus le vecteur $\overrightarrow{D_1} \times \overrightarrow{D_2}$ est perpendiculaire au plan Π_{PQR}.

Preuve. Nous avons démontré ci-dessus qu'un point $(x, y, z) \in E^3$ appartient au plan Π_{PQR} si et seulement si

$$\delta_1(x - x_1) + \delta_2(y - y_1) + \delta_3(z - z_1) = 0$$

lorsque $\alpha_1 \neq 0$ et $\delta_3 \neq 0$. Il y a plusieurs cas à considérer. Nous avons vu que

$$\alpha_1 \neq 0 \quad \text{ou} \quad \beta_1 \neq 0 \quad \text{ou encore} \quad \gamma_1 \neq 0;$$

$$\alpha_2 \neq 0 \quad \text{ou} \quad \beta_2 \neq 0 \quad \text{ou encore} \quad \gamma_2 \neq 0$$

et

$$\delta_1 = \beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2 \neq 0 \text{ ou } \delta_2 = \gamma_1\alpha_2 - \alpha_1\gamma_2 \neq 0 \text{ ou } \delta_3 = \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2 \neq 0.$$

Pour toutes les autres cas, nous obtenons toujours la même équation. Il nous reste à vérifier que le vecteur $\overrightarrow{D_1} \times \overrightarrow{D_2}$ est perpendiculaire au plan Π_{PQR}. Soit

$S = (x, y, z) \in E^3$. Considérons le vecteur $(\overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OP})$. Ce vecteur est parallèle au plan Π_{PQR} si $S \in \Pi_{PQR}$. La matrice des coordonnées du vecteur $(\overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OP})$ relativement à la base $\mathcal{B}$ est

$$[\overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OP}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \\ z - z_1 \end{bmatrix}.$$

Le produit scalaire $(\overrightarrow{D_1} \times \overrightarrow{D_2}) \cdot (\overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OP})$ est égal à

$$(\overrightarrow{D_1} \times \overrightarrow{D_2}) \cdot (\overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OP}) = \delta_1(x - x_1) + \delta_2(y - y_1) + \delta_3(z - z_1)$$

Conséquemment un point $S = (x, y, z) \in E^3$ appartient au plan Π_{PQR} si et seulement si le produit scalaire $(\overrightarrow{D_1} \times \overrightarrow{D_2}) \cdot (\overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OP})$ est nul, c'est-à-dire que le vecteur $(\overrightarrow{D_1} \times \overrightarrow{D_2})$ est perpendiculaire au vecteur $(\overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OP})$. Ceci montre que le vecteur $(\overrightarrow{D_1} \times \overrightarrow{D_2})$ est perpendiculaire au plan Π_{PQR}. $\square$

Exemple 5.6. Considérons les trois points $P = (1, 3, -2)$, $Q = (-1, 4, 3)$ et $R = (4, -2, 0)$ de l'exemple 5.5. Nous avons vu qu'il s'agit de trois points distincts non colinéaires. Soit les vecteurs $\overrightarrow{D_1} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{D_2} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP}$. Les matrices de coordonnées de $\overrightarrow{D_1}$ et $\overrightarrow{D_2}$ relativement à la base $\mathcal{B}$ sont

$$[\overrightarrow{D_1}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 - 1 \\ 4 - 3 \\ 3 - (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [\overrightarrow{D_2}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 4 - 1 \\ -2 - 3 \\ 0 - (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

La matrice de coordonnées du vecteur $\overrightarrow{D_1} \times \overrightarrow{D_2}$ relativement à la base $\mathcal{B}$ est

$$[\overrightarrow{D_1} \times \overrightarrow{D_2}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} ((1)(2) - (5)(-5)) \\ -((-2)(2) - (5)(3)) \\ ((-2)(-5) - (1)(3)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ 19 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Donc l'équation du plan Π_{PQR} est

$$27(x - 1) + 19(y - 3) + 7(z - (-2)) = 0.$$

Remarque 5.9. Si nous considérons la forme de l'équation

$$\delta_1(x - x_1) + \delta_2(y - y_1) + \delta_3(z - z_1) = 0,$$

alors nous voyons qu'il est possible de décrire un plan Π au moyen d'un vecteur $\overrightarrow{N}$ non nul perpendiculaire au plan Π et d'un point $P = (x_1, y_1, z_1) \in \Pi$. En effet si la matrice des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{N}$ relativement à la base $\mathcal{B}$ est

$$[\overrightarrow{N}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix}$$

alors l'équation du plan Π est

$$\eta_1(x - x_1) + \eta_2(y - y_1) + \eta_3(z - z_1) = 0,$$

5.3 Droites dans le plan E^2

Nous avons décrit à la section 5.2 les droites dans l'espace E^3. Il est cependant aussi possible de décrire les droites dans le plan E^2. De plus cette description sera similaire à celle des plans dans E^3, à savoir au moyen d'un vecteur perpendiculaire à la droite. Nous allons maintenant expliquer ceci.

Fixons une origine O et une base orthonormée $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}\}$ de E^2.

Définition 5.14. À tout point P du plan, nous pouvons lui associer l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{OP}$. Cette correspondance est biunivoque. De cette façon, nous pouvons associer des coordonnées (x, y) au point P qui seront celles du vecteur géométrique $\overrightarrow{OP}$, où nous exprimons $\overrightarrow{OP}$ comme la combinaison linéaire $x\,\overrightarrow{OP_1} + y\,\overrightarrow{OP_2}$, où x et y sont des scalaires. En d'autres mots, si (x, y) sont les coordonnées du point P, alors la matrice des coordonnées du vecteur géométrique $\overrightarrow{OP}$ relativement à la base $\mathcal{B}$ sera

$$[\overrightarrow{OP}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Il est bien connu qu'étant donné deux points distincts P et Q du plan E^2, il existe une et une seule droite Δ_{PQ} passant par ces points. Il est possible de décrire les coordonnées des points de la droite Δ_{PQ} de deux façons. Dans la première façon, il s'agit de décrire les coordonnées par des équations contenant un paramètre ; alors que dans la seconde, il s'agit d'éliminer ce paramètre.

Définition 5.15. Soit deux points distincts $P = (x_1, y_1)$ et $Q = (x_2, y_2)$ de E^2 et Δ_{PQ} l'unique droite passant par P et Q. Le vecteur $\overrightarrow{D} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$ est un **vecteur direction** de la droite Δ_{PQ}. Sa matrice de coordonnées relativement à la base $\mathcal{B}$ est

$$[\overrightarrow{D}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}.$$

Les **équations paramétriques de la droite** Δ_{PQ} sont

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t; \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t; \end{cases} \qquad \text{où } t \text{ est un scalaire quelconque.}$$

Ainsi à chaque point $R = (x_0, y_0)$ de la droite Δ_{PQ} lui correspond un et un seul scalaire t_0 tel que

$$\begin{cases} x_0 = x_1 + (x_2 - x_1)t_0; \\ y_0 = y_1 + (y_2 - y_1)t_0; \end{cases}$$

Remarque 5.10. Il est aussi possible de décrire une droite Δ en donnant son vecteur direction $\overrightarrow{D}$ et un point $P = (x_1, y_1)$ de E^2. Notons la matrice de coordonnées du vecteur $\overrightarrow{D}$ relativement à la base $\mathcal{B}$ par

$$[\overrightarrow{D}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}.$$

Alors les équations paramétriques de la droite Δ seront

$$\begin{cases} x = x_1 + \alpha t; \\ y = y_1 + \beta t; \end{cases} \qquad \text{où } t \text{ est un scalaire quelconque.}$$

Exemple 5.7. Soit les deux points $P = (2, 5)$ et $Q = (3, -1)$ de E^2. Alors les équations paramétriques de l'unique droite Δ_{PQ} passant par P et Q sont

$$\begin{cases} x = 2 + t; \\ y = 5 - 6t; \end{cases} \qquad \text{où } t \text{ est un scalaire quelconque.}$$

En effet, le vecteur direction $\overrightarrow{D}$ a comme matrice de coordonnées relativement à la base $\mathcal{B}$ la matrice

$$[\overrightarrow{D}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 - 2 \\ -1 - 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Nous allons maintenant présenter l'autre approche pour décrire l'unique droite Δ_{PQ}. Avec les mêmes notations que ci-dessus, nous avons que le vecteur direction $\overrightarrow{D}$ n'est pas nul et conséquemment $\alpha = x_2 - x_1 \neq 0$ ou $\beta = y_2 - y_1 \neq 0$. Nous supposerons dans ce qui suivra que $\alpha \neq 0$, mais l'autre cas peut être traité de façon similaire. Soit $(x, y) \in E^2$, alors $(x, y) \in \Delta_{PQ}$ si et seulement s'il existe un scalaire t tel que

$$\begin{cases} x = x_1 + \alpha t; \\ y = y_1 + \beta t; \end{cases}$$

Donc parce que $\alpha \neq 0$, alors

$$t = \frac{x - x_1}{\alpha} \quad \Longrightarrow \quad y - y_1 = \beta\left(\frac{x - x_1}{\alpha}\right) \quad \Longrightarrow \quad \beta(x - x_1) - \alpha(y - y_1) = 0$$

Réciproquement si $\beta(x - x_1) - \alpha(y - y_1) = 0$, alors en prenant

$$t = \frac{x - x_1}{\alpha}$$

nous voyons que les équations paramétriques de Δ_{PQ} sont satisfaites et $(x, y) \in \Delta_{PQ}$.

Proposition 5.8. *Soit deux points distincts $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$ du plan E^2 et Δ_{PQ} l'unique droite passant par P et Q. Soit le vecteur direction $\overrightarrow{D} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$ de la droite Δ_{PQ} dont la matrice de coordonnées relativement à la base $\mathcal{B}$ est*

$$[\overrightarrow{D}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

Alors un point (x, y) de E^2 appartient à la droite Δ_{PQ} si et seulement si

$$\beta(x - x_1) - \alpha(y - y_1) = 0.$$

De plus le vecteur $\overrightarrow{N}$ dont la matrice de coordonnées relativement à la base $\mathcal{B}$ est

$$[\overrightarrow{N}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \beta \\ -\alpha \end{bmatrix}$$

est perpendiculaire à la droite Δ_{PQ}.

La preuve de cette proposition est identique à celle de la proposition 5.7. Nous ne démontrerons pas celle-ci.

Exemple 5.8. Soit les deux points $P = (2, 5)$ et $Q = (3, -1)$ de E^2. Ce sont les mêmes points qu'à l'exemple précédent. Alors le vecteur direction $\overrightarrow{D}$ est tel que sa matrice de coordonnées relativement à la base $\mathcal{B}$ est

$$[\overrightarrow{D}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 - 2 \\ -1 - 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Alors l'unique droite Δ_{PQ} a pour équation $-6(x - 2) - 1(y - 5) = 0$. Cette équation est équivalente à l'équation $6x + y = 17$.

5.4 Distance entre un point et un plan

Fixons une origine O et une base orthonormée $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3}\}$ de E^3 orientée selon la règle de la main droite.

Soit le vecteur $\overrightarrow{N}$ non nul dont la matrice de coordonnées relativement à la base $\mathcal{B}$ est

$$[\overrightarrow{N}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix}$$

et un point $P = (x_1, y_1, z_1)$ de E^3. Nous pouvons alors considérer le plan Π contenant P et pour lequel $\overrightarrow{N}$ est perpendiculaire à Π. De ce que nous avons déjà vu, un point (x, y, z) de E^3 appartient au plan Π si et seulement si

$$\eta_1(x - x_1) + \eta_2(y - y_1) + \eta_3(z - z_1) = 0.$$

Nous voulons maintenant déterminer la distance entre un point $Q = (x_0, y_0, z_0)$ quelconque de E^3 et le plan Π. Ici Q n'est pas nécessairement un point de Π. Ce que nous voulons calculer est la plus courte distance entre le point Q et un point de Π.

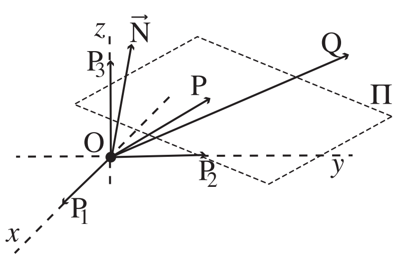


FIGURE 5.11 – Distance plan Π et point Q

Soit le vecteur $\overrightarrow{M} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$ et le point R défini par $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{N}$. Notons la matrice de coordonnées de $\overrightarrow{M}$ relativement à la base $\mathcal{B}$ par

$$[\overrightarrow{M}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_0 - x_1 \\ y_0 - y_1 \\ z_0 - z_1 \end{bmatrix}.$$

Considérons le plan Π' de E^3 contenant P, Q et R. Nous avons illustrée cette situation dans le plan Π'

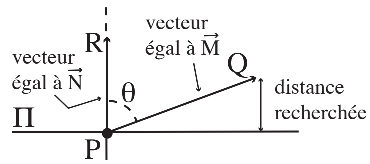


FIGURE 5.12 – Plan Π'

Nous obtenons donc que la distance recherchée est égale à $\|\overrightarrow{M}\||\cos(\theta)|$ où θ est l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{M}$ et $\overrightarrow{N}$. Rappelons que $\overrightarrow{M} \cdot \overrightarrow{N} = \|\overrightarrow{M}\|\|\overrightarrow{N}\| \cos(\theta)$. Donc la distance recherchée est égale à

$$\frac{|\overrightarrow{M} \cdot \overrightarrow{N}|}{\|\overrightarrow{N}\|} = \frac{|\eta_1(x_0 - x_1) + \eta_2(y_0 - y_1) + \eta_3(z_0 - z_1)|}{\sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2}}$$

Proposition 5.9. (a) *Fixons une origine O et une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E^3 orientée selon la règle de la main droite. Soit le vecteur $\overrightarrow{N}$ non nul dont la matrice de coordonnées relativement à la base $\mathcal{B}$ est*

$$[\overrightarrow{N}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix},$$

un point $P = (x_1, y_1, z_1)$ de E^3 et le plan Π de E^3 contenant P et pour lequel $\overrightarrow{N}$ est perpendiculaire à Π, c'est-à-dire le plan dont l'équation est

$$\eta_1(x - x_1) + \eta_2(y - y_1) + \eta_3(z - z_1) = 0.$$

Étant donné le point $Q = (x_0, y_0, z_0) \in E^3$, alors la distance entre le point Q et le plan Π est égale à

$$\frac{|\eta_1(x_0 - x_1) + \eta_2(y_0 - y_1) + \eta_3(z_0 - z_1)|}{\sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2}}$$

(b) *Fixons une origine O et une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E^2. Soit le vecteur $\overrightarrow{N}$ non nul dont la matrice de coordonnées relativement à la base $\mathcal{B}$ est*

$$[\overrightarrow{N}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix},$$

un point $P = (x_1, y_1)$ de E^2 et la droite Δ de E^2 contenant P et pour lequel $\overrightarrow{N}$ est perpendiculaire à Δ, c'est-à-dire le plan dont l'équation est

$$\eta_1(x - x_1) + \eta_2(y - y_1) = 0.$$

Étant donné le point $Q = (x_0, y_0) \in E^2$, alors la distance entre le point Q et la droite Δ est égale à

$$\frac{|\eta_1(x_0 - x_1) + \eta_2(y_0 - y_1)|}{\sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2}}$$

Preuve. La partie (a) de la proposition a été démontrée ci-dessus. La partie (b) est démontrée de façon similaire. □

Exemple 5.9. Soit le plan Π de E^3 d'équation $3x - 2y + 4z + 1 = 0$ et le point $Q = (2, -4, 7)$ de E^3. Alors la distance entre Π et Q est égale à

$$\frac{|3(2) - 2(-4) + 4(7) + 1|}{\sqrt{(3)^2 + (-2)^2 + (4)^2}} = \frac{43}{\sqrt{29}}.$$

Exemple 5.10. Soit la droite Δ de E^2 d'équation $5x - 3y = 7$ et le point $Q = (3, -1)$ de E^2. Alors la distance entre Δ et Q est égale à

$$\frac{|5(3) - 3(-1) - 7|}{\sqrt{(5)^2 + (-3)^2}} = \frac{11}{\sqrt{34}}.$$

En effet, il faut écrire l'équation de la droite sous la forme $5x - 3y - 7 = 0$ et ensuite utiliser (b) de la proposition précédente.

5.5 Exercices

Exercice 5.1. Fixons une base orthonormée $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3}\}$ de l'espace E^3 orientée selon la règle de la main droite. Soit les vecteurs $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$ et $\overrightarrow{OS}$ tels que leurs matrices de coordonnées relativement à la base $\mathcal{B}$ sont

$$[\overrightarrow{OP}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad [\overrightarrow{OQ}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad [\overrightarrow{OR}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad [\overrightarrow{OS}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 15 \\ 16 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Calculer

(a) les longueurs $\|\overrightarrow{OQ}\|$ et $\|\overrightarrow{OR}\|$ des vecteurs $\overrightarrow{OQ}$ et $\overrightarrow{OR}$.

(b) l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OS}$.

(c) les scalaires α, β et γ tels que $\overrightarrow{OS} = \alpha\overrightarrow{OP} + \beta\overrightarrow{OQ} + \gamma\overrightarrow{OR}$.

(d) le scalaire η tel que le vecteur $\overrightarrow{OP} + \eta\overrightarrow{OQ}$ est perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{OR}$.

(e) les matrices des coordonnées des produits vectoriels $\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}$ et $\overrightarrow{OR} \times \overrightarrow{OS}$ relativement à la base $\mathcal{B}$

(f) l'aire du parallélogramme dont les côtés sont $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OS}$.

Exercice 5.2. Fixons une base orthonormée $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3}\}$ de l'espace E^3 pour la suite. Soit les six points suivants de l'espace E^3 : $P = (-2, 1, 4)$, $Q = (1, 1, -4)$, $R = (3, 2, -1)$, $S = (-8, 1, 20)$, $T = (-3, -1, 11)$, $U = (2, 7, -1)$.

(a) Déterminer les équations paramétriques de l'unique droite Δ_{PQ} passant par les deux points P et Q.

(b) Montrer que les points P, Q et R ne sont pas colinéaires.

(c) Est-ce que les points P, Q et S sont colinéaires ?

(d) Déterminer les équations paramétriques de l'unique plan Π_{PQR} passant par les trois points P, Q et R.

(e) Déterminer une équation du plan Π_{PQR} de la forme $\delta_1 x + \delta_2 y + \delta_3 z = \kappa$.

(f) Est-ce que les points S et T appartiennent au plan Π_{PQR} ?

(g) Est-ce que l'unique droite Δ_{TU} passant par les deux points T et U intersecte le plan Π_{PQR} ?

(h) Calculer la distance entre le point U et le plan Π_{PQR}.

(i) Montrer que les points S, T et U ne sont pas colinéaires.

(j) Déterminer une équation de la forme $\delta_1 x + \delta_2 y + \delta_3 z = \kappa$ pour l'unique plan Π_{STU} passant par les trois points S, T et U.

(k) Déterminer des équations paramétriques de l'unique droite d'intersection des plans Π_{PQR} et Π_{STU}.

Chapitre 6

Espaces euclidiens

Nous allons dans ce chapitre généraliser les notions de vecteurs et de produits scalaires à de plus grandes dimensions. Avec ces notions, nous allons montrer que si les matrices A_1 et A_2 sont obtenues à la suite de séries d'opérations élémentaires de ligne en débutant avec la matrice A et si A_1 et A_2 sont réduites échelonnées, alors $A_1 = A_2$. Pour obtenir ceci, il nous faut parler d'indépendance linéaire, de combinaisons linéaires et de bases. Nous nous intéresserons aussi aux problèmes des moindres carrés.

6.1 Vecteurs lignes et vecteurs colonnes

Définition 6.1. Nous désignerons par $\mathbb{R}_\ell^N$: l'ensemble des N-tuplets

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_N \end{bmatrix},$$

où $x_i \in \mathbb{R}$. En d'autres mots, $\mathbb{R}_\ell^N$ est l'ensemble des matrices de format $1 \times N$. Un élément de $\mathbb{R}_\ell^N$ est un **vecteur-ligne**. Comme les éléments de $\mathbb{R}_\ell^N$ sont des matrices de format $1 \times N$, deux vecteurs-lignes de $\mathbb{R}_\ell^N$ peuvent être additionnés et il est possible de multiplier un vecteur par un scalaire. Il s'agit des opérations sur les matrices déjà définies au chapitre 1

Définition 6.2. Nous désignerons par $\mathbb{R}_c^N$ pour l'ensemble des N-tuplets

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix},$$

où $x_i \in \mathbb{R}$. En d'autres mots, $\mathbb{R}^N_c$ est l'ensemble des matrices de format $N \times 1$. Un élément de $\mathbb{R}^N_c$ est un **vecteur-colonne**. Comme les éléments de $\mathbb{R}^N_c$ sont des matrices de format $N \times 1$, deux vecteurs-colonnes de $\mathbb{R}^N_c$ peuvent être additionnés et il est possible de multiplier un vecteur par un scalaire. Il s'agit des opérations sur les matrices déjà définies au chapitre 1

Notation 6.1. Si V désigne $\mathbb{R}^N_\ell$ (respectivement $\mathbb{R}^N_c$), alors nous noterons les vecteurs de V par exemple de la façon suivante : $\overrightarrow{v}$. Le vecteur nul, noté $\overrightarrow{0} \in V$, est tout simplement la matrice nulle de format $1 \times N$ si $V = \mathbb{R}^N_\ell$ et la matrice nulle de format $N \times 1$ si $V = \mathbb{R}^N_c$

Nous avons donc les propriétés suivantes et celles-ci sont tout simplement celles de le proposition 1.1.

Proposition 6.1. *Soit $V = \mathbb{R}^N_\ell$ (respectivement $\mathbb{R}^N_c$), des vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ de V et des scalaires α, β. Alors*

(a) $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$

(b) $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$

(c) $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$*, où* $\overrightarrow{0}$ *est l'unique vecteur nul.*

(d) $\overrightarrow{u} + (-1)\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

(e) $1\,\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$

(f) $\alpha(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \alpha\overrightarrow{u} + \alpha\overrightarrow{v}$

(g) $(\alpha + \beta)\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{u}$

(h) $(\alpha\beta)\overrightarrow{u} = \alpha(\beta\overrightarrow{u})$

(i) $0\,\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

Tout ceci peut être résumé en disant que V est un espace vectoriel. Nous ne définirons pas cette notion abstraite dans ce recueil de notes de cours.

Définition 6.3. Soit $V = \mathbb{R}^N_\ell$ (respectivement $\mathbb{R}^N_c$). Étant donné k vecteurs $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_k}$ de V, alors nous dirons qu'un vecteur $\overrightarrow{u}$ de la forme

$$\overrightarrow{u} = \alpha_1\overrightarrow{v_1} + \alpha_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + \alpha_k\overrightarrow{v_k},$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sont des scalaires, est une **combinaison linéaire des k vecteurs** $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_k}$.

Remarque 6.1. La question de savoir si un vecteur est une combinaison linéaire de k vecteurs est équivalente à celle de savoir si un système d'équations linéaires a au moins une solution. Nous verrons plus tard la notion qui correspond à celle de savoir si le système a au plus une solution. Ce sera la notion d'indépendance linéaire. Nous verrons aussi plus tard la notion qui, elle, correspond à ce qu'il y ait une et une seule solution, ce sera la notion de base.

Exemple 6.1. Soit $V = \mathbb{R}^4_\ell$ et les trois vecteurs de V

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{bmatrix}2 & -1 & 0 & 4\end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{v_2} = \begin{bmatrix}0 & -1 & 3 & -1\end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{v_3} = \begin{bmatrix}1 & -5 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

Est-ce que le vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix}0 & -12 & 11 & -7\end{bmatrix}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$? Nous devons donc déterminer s'il existe des scalaires α_1, α_2 et α_3 tels que

$$\overrightarrow{u} = \alpha_1\overrightarrow{v_1} + \alpha_2\overrightarrow{v_2} + \alpha_3\overrightarrow{v_3};$$

c'est-à-dire existe-t-il des scalaires tels que le vecteur $\begin{bmatrix}0 & -12 & 11 & -7\end{bmatrix}$ est égal à

$$\alpha_1\begin{bmatrix}2 & -1 & 0 & 4\end{bmatrix} + \alpha_2\begin{bmatrix}0 & -1 & 3 & -1\end{bmatrix} + \alpha_3\begin{bmatrix}1 & -5 & 1 & 0\end{bmatrix};$$

Ceci est équivalent à savoir si le système d'équation linéaires

$$\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ -1 & -1 & -5\\ 0 & 3 & 1\\ 4 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ -12\\ 11\\ -7\end{bmatrix}$$

a au moins une solution. Il nous faut utiliser l'algorithme de Gauss-Jordan.

$$\begin{bmatrix}2 & 0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & -5 & -12\\ 0 & 3 & 1 & 11\\ 4 & -1 & 0 & -7\end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \longleftrightarrow L_2} \begin{bmatrix}-1 & -1 & -5 & -12\\ 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1 & 11\\ 4 & -1 & 0 & -7\end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \longleftarrow (-1)L_1}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 5 & 12\\ 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1 & 11\\ 4 & -1 & 0 & -7\end{bmatrix} \xrightarrow[L_4 \longleftarrow L_4 - 4L_1]{L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix}1 & 1 & 5 & 12\\ 0 & -2 & -9 & -24\\ 0 & 3 & 1 & 11\\ 0 & -5 & -20 & -55\end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \longleftarrow L_2 + L_3}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 5 & 12\\ 0 & 1 & -8 & -13\\ 0 & 3 & 1 & 11\\ 0 & -5 & -20 & -55\end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{L_1 \longleftarrow L_1 - L_2\\ L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_2\\ L_4 \longleftarrow L_4 + 5L_2}} \begin{bmatrix}1 & 0 & 13 & 25\\ 0 & 1 & -8 & -13\\ 0 & 0 & 25 & 50\\ 0 & 0 & -60 & -120\end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \longleftarrow (1/25)L_3}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 13 & 25\\ 0 & 1 & -8 & -13\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -60 & -120\end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{L_1 \longleftarrow L_1 - 13L_3\\ L_2 \longleftarrow L_2 + 8L_3\\ L_4 \longleftarrow L_4 + 60L_3}} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Nous obtenons ainsi une solution $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 3$ et $\alpha_3 = 2$. Ici cette solution est unique. Donc le vecteur $\overrightarrow{u}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$. En effet $\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{v_1} + 3\overrightarrow{v_2} + 2\overrightarrow{v_3}$.

Exemple 6.2. Soit $V = \mathbb{R}^3_\ell$ et les quatre vecteurs de V

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\end{bmatrix},\ \overrightarrow{v_2} = \begin{bmatrix}0 & -1 & 2\end{bmatrix},\ \overrightarrow{v_3} = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\end{bmatrix},\ \overrightarrow{v_4} = \begin{bmatrix}1 & 1 & -1\end{bmatrix}.$$

Est-ce que le vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix}2 & -3 & -1\end{bmatrix}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_3}$ et $\overrightarrow{v_4}$? Nous devons donc déterminer s'il existe des scalaires α_1, α_2, α_3 et α_4 tels que

$$\overrightarrow{u} = \alpha_1\overrightarrow{v_1} + \alpha_2\overrightarrow{v_2} + \alpha_3\overrightarrow{v_3} + \alpha_4\overrightarrow{v_4};$$

c'est-à-dire existe-t-il des scalaires tels que le vecteur $\begin{bmatrix}2 & -3 & -1\end{bmatrix}$ est égal à

$$\alpha_1\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\end{bmatrix} + \alpha_2\begin{bmatrix}0 & -1 & 2\end{bmatrix} + \alpha_3\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\end{bmatrix} + \alpha_4\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\end{bmatrix};$$

Ceci est équivalent à savoir si le système d'équation linéaires

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\ -3\\ -1\end{bmatrix}$$

a au moins une solution. Il nous faut utiliser l'algorithme de Gauss-Jordan.

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1 & 2\\ -1 & -1 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 2 & -1 & -1 & -1\end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \longleftarrow L_1+L_2} \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 2 & -1 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \longleftarrow (-1)L_1} \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1\\ 0 & 2 & -1 & -1 & -1\end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \longleftarrow L_3-2L_2} \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 3 & -3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_2 \longleftarrow L_2+L_3]{L_1 \longleftarrow L_1-L_3} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -2 & 5\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 3 & -3\end{bmatrix}$$

Donc il y a une infinité de solutions, à savoir

$$\left\{\begin{aligned}\alpha_1 &= 5 + 2\alpha_4\\ \alpha_2 &= -2 - \alpha_4\\ \alpha_3 &= -3 - 3\alpha_4\\ \alpha_4 &= \alpha_4\end{aligned}\right\} \qquad \text{où } \alpha_4 \text{ est arbitraire.}$$

Donc le vecteur $\overrightarrow{u}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_3}$ et $\overrightarrow{v_4}$. En effet,

$$\overrightarrow{u} = (5+2\alpha_4)\overrightarrow{v_1} - (2+\alpha_4)\overrightarrow{v_2} - (3+3\alpha_4)\overrightarrow{v_3} + \alpha_4\overrightarrow{v_4}$$

où α_4 est un scalaire quelconque. Il y a ici un nombre infini de façons d'exprimer le vecteur $\overrightarrow{u}$ comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_3}$ et $\overrightarrow{v_4}$.

Définition 6.4. Soit $V = \mathbb{R}^N_\ell$ (respectivement $\mathbb{R}^N_c$). Étant donné k vecteurs $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_k}$ de V, alors nous dirons que ces k vecteurs sont **linéairement indépendants** si et seulement si

$$\alpha_1\overrightarrow{v_1} + \alpha_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + \alpha_k\overrightarrow{v_k} = \overrightarrow{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0.$$

En d'autres mots, la seule façon d'écrire le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_k}$ est

$$0\,\overrightarrow{v_1} + 0\,\overrightarrow{v_2} + \cdots + 0\,\overrightarrow{v_k} = \overrightarrow{0}$$

Si les k vecteurs ne sont pas linéairement indépendants, nous dirons qu'ils sont **linéairement dépendants**. Ainsi les k vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement s'il existe k scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ non tous nuls tels que

$$\alpha_1\overrightarrow{v_1} + \alpha_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + \alpha_k\overrightarrow{v_k} = \overrightarrow{0}.$$

Exemple 6.3. Soit $V = \mathbb{R}^4_\ell$ et reprenons les trois vecteurs de l'exemple 6.1, à savoir

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{bmatrix}2 & -1 & 0 & 4\end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{v_2} = \begin{bmatrix}0 & -1 & 3 & -1\end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{v_3} = \begin{bmatrix}1 & -5 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

Est-ce que ces trois vecteurs sont linéairement indépendants ou non ? Il faut donc déterminer tous les scalaires α_1, α_2 et α_3 tels que $\alpha_1\overrightarrow{v_1} + \alpha_2\overrightarrow{v_2} + \alpha_3\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{0}$. En d'autres mots, tous les scalaires α_1, α_2 et α_3 tels que

$$\alpha_1\begin{bmatrix}2 & -1 & 0 & 4\end{bmatrix} + \alpha_2\begin{bmatrix}0 & -1 & 3 & -1\end{bmatrix} + \alpha_3\begin{bmatrix}1 & -5 & 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Ceci est équivalent à savoir si le système d'équation linéaires

$$\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ -1 & -1 & -5\\ 0 & 3 & 1\\ 4 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

a une et une seule solution $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Il nous faut utiliser l'algorithme de Gauss-Jordan.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \longleftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \longleftarrow (-1)L_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_4 \longleftarrow L_4 - 4L_1]{L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & -9 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -20 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \longleftarrow L_2 + L_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -20 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{L_1 \longleftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_2 \\ L_4 \longleftarrow L_4 + 5L_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & -60 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \longleftarrow (1/25)L_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -60 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{L_1 \longleftarrow L_1 - 13L_3 \\ L_2 \longleftarrow L_2 + 8L_3 \\ L_4 \longleftarrow L_4 + 60L_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nous obtenons ainsi une seule solution $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ et les 3 vecteurs $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$ sont linéairement indépendants.

Exemple 6.4. Soit $V = \mathbb{R}^3_\ell$ et reprenons les quatre vecteurs de l'exemple 6.2

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \ \overrightarrow{v_2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \ \overrightarrow{v_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \ \overrightarrow{v_4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Est-ce que ces quatre vecteurs sont linéairement indépendants ou non ? Il faut donc déterminer tous les scalaires α_1, α_2, α_3 et α_4 tels que $\alpha_1\overrightarrow{v_1} + \alpha_2\overrightarrow{v_2} + \alpha_3\overrightarrow{v_3} + \alpha_4\overrightarrow{v_4} = \overrightarrow{0}$. En d'autres mots, tous les scalaires α_1, α_2, α_3 et α_4 tels que

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ceci est équivalent à savoir si le système d'équation linéaires

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

a une et une seule solution $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$.

Il nous faut utiliser l'algorithme de Gauss-Jordan.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \longleftarrow L_1 + L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \longleftarrow (-1)L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_2 \longleftarrow L_2 + L_3]{L_1 \longleftarrow L_1 - L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Le système a donc une infinité de solutions, à savoir

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha_1 = 2\alpha_4 \\ \alpha_2 = -\alpha_4 \\ \alpha_3 = -3\alpha_4 \\ \alpha_4 = \alpha_4 \end{matrix} \right\} \qquad \text{où } \alpha_4 \text{ est arbitraire.}$$

Donc il existe des scalaires α_1, α_2, α_3 et α_4 non tous nuls tels que

$$\alpha_1 \overrightarrow{v_1} + \alpha_2 \overrightarrow{v_2} + \alpha_3 \overrightarrow{v_3} + \alpha_4 \overrightarrow{v_4} = \overrightarrow{0}.$$

Conséquemment les quatre vecteurs sont linéairement dépendants.

Il est possible de comprendre pourquoi nous disons indépendance linéaire et dépendance linéaire en considérant la proposition suivante.

Proposition 6.2. *Soit $V = \mathbb{R}^N_\ell$ (respectivement $\mathbb{R}^N_c$). Étant donné k vecteurs $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_k}$ linéairement dépendants de V. Alors un de ces vecteurs peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des $(k-1)$ autres vecteurs.*

Preuve. Comme les k vecteurs sont linéairement dépendants, il existe k scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ non tous nuls tels que $\alpha_1 \overrightarrow{v_1} + \alpha_2 \overrightarrow{v_2} + \cdots + \alpha_k \overrightarrow{v_k} = \overrightarrow{0}$. En renommant les vecteurs si nécessaire, nous pouvons supposer que $\alpha_k \neq 0$. Donc nous obtenons

$$\alpha_k \overrightarrow{v_k} = -(\alpha_1 \overrightarrow{v_1} + \alpha_2 \overrightarrow{v_2} + \cdots + \alpha_{k-1} \overrightarrow{v_{k-1}})$$
$$\Downarrow$$
$$\overrightarrow{v_k} = -\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_k} \overrightarrow{v_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_k} \overrightarrow{v_2} + \cdots + \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} \overrightarrow{v_{k-1}} \right)$$

Ainsi le vecteur $\overrightarrow{v_k}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_{k-1}}$. C'est ce que nous voulions démontrer. □

Proposition 6.3. *Soit $V = \mathbb{R}^N_\ell$ (respectivement $\mathbb{R}^N_c$). Étant donné m vecteurs $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_m}$ de V, où $m > N$, alors ces m vecteurs sont linéairement dépendants.*

Preuve. Nous ferons la preuve dans le cas de $V = \mathbb{R}^N_\ell$. Pour $\mathbb{R}^N_c$, la preuve est similaire. Notons les m vecteurs par :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v_1} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{N1} \end{bmatrix}, \\
\overrightarrow{v_2} &= \begin{bmatrix} a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{N2} \end{bmatrix}, \\
&\vdots \\
\overrightarrow{v_m} &= \begin{bmatrix} a_{1m} & a_{2m} & \ldots & a_{Nm} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Nous cherchons à déterminer tous les scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ tels que

$$\alpha_1\overrightarrow{v_1} + \alpha_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + \alpha_m\overrightarrow{v_m} = \overrightarrow{0}$$

Mais ceci est équivalent à ce que

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \ldots & a_{Nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il y a ici N équations linéaires avec m inconnues. Comme $m > N$, il y a une infinité de solutions et il existe donc des scalaires non nuls $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ tels que

$$\alpha_1\overrightarrow{v_1} + \alpha_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + \alpha_m\overrightarrow{v_m} = \overrightarrow{0}$$

De ceci, nous pouvons conclure que les m vecteurs $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_m}$ sont linéairement dépendants. □

6.2 Sous-espaces linéaires et bases

Nous voulons maintenant décrire une notion, celle de sous-espaces linéaires, qui correspond dans le cas particulier de l'espace E^3 au plan passant par l'origine. Ensuite nous décrirons comment écrire tous les vecteurs d'un sous-espace. Pour ce faire, il nous faudra parler de bases.

Définition 6.5. Soit $V = \mathbb{R}^N_\ell$ (respectivement $\mathbb{R}^N_c$). Un sous-ensemble U de V est un **sous-espace linéaire de** V si et seulement si les trois conditions suivantes sont réunies :

1. $\overrightarrow{0} \in U$.
2. Si $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2} \in U$, alors $\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} \in U$.
3. Si $\overrightarrow{u} \in U$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\alpha\overrightarrow{u} \in U$.

Exemple 6.5. Considérons le sous-ensemble $U = \{\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2_\ell \mid y = x^2\}$ de $\mathbb{R}^2_\ell$. U n'est pas un sous-espace de $\mathbb{R}^2_\ell$. En effet, par exemple $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \in U$, mais $2\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} \notin U$, car $2^2 = 4 \neq 2$. Ainsi la condition 3 n'est pas vérifiée. Il est aussi facile de montrer que la condition 2 n'est pas vérifiée.

Proposition 6.4. *Soit A une matrice de format $m \times n$ et l'ensemble U des solutions du système homogène d'équations linéaires suivant*

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0_{m\times 1}$$

Rappelons que $0_{m\times 1}$ désigne la matrice nulle de format $m \times 1$. En d'autres mots,

$$U = \left\{ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n_c \;\middle|\; AX = 0_{m\times 1} \right\}$$

Alors U est un sous-espace linéaire de $V = \mathbb{R}^n_c$.

Preuve. En effet, si $X = 0_{n\times 1}$, alors $AX = A0_{n\times 1} = 0_{m\times 1}$. Ceci démontre la condition 1.

De plus si X_1 et X_2 sont deux éléments de U, alors $AX_1 = 0_{m\times 1}$ et $AX_2 = 0_{m\times 1}$ et conséquemment $(X_1 + X_2) \in U$, car

$$A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = 0_{m\times 1} + 0_{m\times 1} = 0_{m\times 1}.$$

Ceci démontre la condition 2.

Finalement si X est un élément de U et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $AX = 0_{m\times 1}$ et conséquemment $A(\alpha X) = \alpha AX = \alpha 0_{m\times 1} = 0_{m\times 1}$. Ceci démontre la condition 3. $\square$

Définition 6.6. Soit A une matrice de format $m \times n$. Alors le sous-espace linéaire U de l'exemple précédent est appelé le **noyau de** A et sera noté $N(A)$ ou encore $ker(A)$.

Proposition 6.5. *Soit $V = \mathbb{R}^N_\ell$ (respectivement $\mathbb{R}^N_c$), les k vecteurs $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_k}$ de V et l'ensemble U de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_k}$. En d'autres mots,*

$$U = \{\alpha_1 \overrightarrow{v_1} + \alpha_2 \overrightarrow{v_2} + \cdots + \alpha_k \overrightarrow{v_k} \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}\}.$$

Alors U est un sous-espace linéaire de V.

Preuve. En effet, $0\,\overrightarrow{v_1} + 0\,\overrightarrow{v_2} + \cdots + 0\,\overrightarrow{v_k} = \overrightarrow{0} \in U$. Ceci démontre la condition 1.

De plus si $\alpha_1 \overrightarrow{v_1} + \alpha_2 \overrightarrow{v_2} + \cdots + \alpha_k \overrightarrow{v_k} \in U$ et $\alpha'_1 \overrightarrow{v_1} + \alpha'_2 \overrightarrow{v_2} + \cdots + \alpha'_k \overrightarrow{v_k} \in U$, alors

$$\begin{aligned}(\alpha_1 \overrightarrow{v_1} + \alpha_2 \overrightarrow{v_2} + \cdots + \alpha_k \overrightarrow{v_k}) &+ (\alpha'_1 \overrightarrow{v_1} + \alpha'_2 \overrightarrow{v_2} + \cdots + \alpha'_k \overrightarrow{v_k}') \\ &= (\alpha_1 + \alpha'_1)\overrightarrow{v_1} + (\alpha_2 + \alpha'_2)\overrightarrow{v_2} + \cdots + (\alpha_k + \alpha'_k)\overrightarrow{v_k} \in U.\end{aligned}$$

Ceci démontre la condition 2.

Finalement si $\alpha_1 \overrightarrow{v_1} + \alpha_2 \overrightarrow{v_2} + \cdots + \alpha_k \overrightarrow{v_k} \in U$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors

$$\alpha(\alpha_1 \overrightarrow{v_1} + \alpha_2 \overrightarrow{v_2} + \cdots + \alpha_k \overrightarrow{v_k}) = \alpha\alpha_1 \overrightarrow{v_1} + \alpha\alpha_2 \overrightarrow{v_2} + \cdots + \alpha\alpha_k \overrightarrow{v_k} \in U$$

Ceci démontre la condition 3. □

Exemple 6.6. Soit $V = \mathbb{R}^4_\ell$ et les trois vecteurs de V

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{bmatrix}2 & -1 & 0 & 4\end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{v_2} = \begin{bmatrix}0 & -1 & 3 & -1\end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{v_3} = \begin{bmatrix}1 & -5 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

Nous pouvons décrire l'espace U de toutes les combinaisons linéaires des trois vecteurs $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$. Un vecteur $\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_4\end{bmatrix}$ de $V = \mathbb{R}^4_\ell$ est une combinaison linéaire des trois vecteurs $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$ si et seulement s'il existe des scalaires α_1, α_2 et α_3 tels que $\overrightarrow{v} = \alpha_1 \overrightarrow{v_1} + \alpha_2 \overrightarrow{v_2} + \alpha_3 \overrightarrow{v_3}$, c'est-à-dire que $\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_4\end{bmatrix}$ est égal à

$$\alpha_1 \begin{bmatrix}2 & -1 & 0 & 4\end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix}0 & -1 & 3 & -1\end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix}1 & -5 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

Ceci est équivalent à savoir si le système d'équation linéaires

$$\begin{bmatrix}2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4\end{bmatrix}$$

a au moins une solution. Il nous faut utiliser l'algorithme de Gauss-Jordan.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & x_1 \\ -1 & -1 & -5 & x_2 \\ 0 & 3 & 1 & x_3 \\ 4 & -1 & 0 & x_4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \longleftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -5 & x_2 \\ 2 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 3 & 1 & x_3 \\ 4 & -1 & 0 & x_4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \longleftarrow (-1)L_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & -x_2 \\ 2 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 3 & 1 & x_3 \\ 4 & -1 & 0 & x_4 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_4 \longleftarrow L_4 - 4L_1]{L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & -x_2 \\ 0 & -2 & -9 & (x_1 + 2x_2) \\ 0 & 3 & 1 & x_3 \\ 0 & -5 & -20 & (4x_2 + x_4) \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \longleftarrow L_2 + L_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & -x_2 \\ 0 & 1 & -8 & (x_1 + 2x_2 + x_3) \\ 0 & 3 & 1 & x_3 \\ 0 & -5 & -20 & (4x_2 + x_4) \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{L_1 \longleftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_2 \\ L_4 \longleftarrow L_4 + 5L_2}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 13 & -(x_1 + 3x_2 + x_3) \\ 0 & 1 & -8 & (x_1 + 2x_2 + x_3) \\ 0 & 0 & 25 & -(3x_1 + 6x_2 + 2x_3) \\ 0 & 0 & -60 & (5x_1 + 14x_2 + 5x_3 + x_4) \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \longleftarrow (1/25)L_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 13 & -(x_1 + 3x_2 + x_3) \\ 0 & 1 & -8 & (x_1 + 2x_2 + x_3) \\ 0 & 0 & 1 & -(3x_1 + 6x_2 + 2x_3)/25 \\ 0 & 0 & -60 & (5x_1 + 14x_2 + 5x_3 + x_4) \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{L_1 \longleftarrow L_1 - 13L_3 \\ L_2 \longleftarrow L_2 + 8L_3 \\ L_4 \longleftarrow L_4 + 60L_3}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & (14x_1 + 3x_2 + x_3)/25 \\ 0 & 1 & 0 & (x_1 + 2x_2 + 9x_3)/25 \\ 0 & 0 & 1 & -(3x_1 + 6x_2 + 2x_3)/25 \\ 0 & 0 & 0 & (-55x_1 - 10x_2 + 5x_3 + 25x_4)/25 \end{bmatrix}$$

Le système a au moins une solution si et seulement si

$$-55x_1 - 10x_2 + 5x_3 + 25x_4 = 0.$$

Donc

$$U = \{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4_\ell \mid -11x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \}.$$

Définition 6.7. Soit une matrice A de format $m \times n$. Nous noterons la ligne i de A par L_i et la colonne j de A par C_j. Ainsi nous avons m vecteurs lignes L_1, $L_2, \ldots L_m$ appartenant à $\mathbb{R}^n_\ell$ et nous avons n vecteurs colonnes C_1, $C_2, \ldots C_n$ appartenant à $\mathbb{R}^m_c$. Nous définissons **l'espace-ligne de** A comme l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des lignes L_1, $L_2, \ldots L_m$ de A et nous noterons ce sous-ensemble par $\mathcal{L}(A)$. Nous définissons **l'espace-colonne de** A comme l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des colonnes C_1, $C_2, \ldots C_n$ de A et nous noterons ce sous-ensemble par $\mathcal{C}(A)$.

Corollaire 6.1. *Soit deux matrices A et A' de format $m \times n$ telles que la matrice A' est obtenue de A après une série d'opérations élémentaires de ligne. Alors les espaces-lignes $\mathcal{L}(A)$ de A et $\mathcal{L}(A')$ de A' sont des sous-espaces linéaires de $\mathbb{R}^n_\ell$ et $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(A')$.*

Preuve. Le fait que $\mathcal{L}(A)$ et $\mathcal{L}(A')$ sont des sous-espaces linéaires est une conséquence simple de la proposition 6.5. Pour ce qui est de démontrer que $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(A')$, il suffit de vérifier ceci pour chacune des opérations élémentaires de ligne $\mathcal{O}p$. Il est facile de vérifier que

$$A \xrightarrow{\mathcal{O}p} A' \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{L}(A') \subseteq \mathcal{L}(A)$$

En effet, toutes les lignes de A' sont des combinaisons linéaires de celles de A. En utilisant l'opération élémentaire de ligne inverse $\mathcal{O}p^{-1}$, nous obtenons que $\mathcal{L}(A) \subseteq \mathcal{L}(A')$. Conséquemment $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(A')$. $\square$

Corollaire 6.2. *Soit deux matrices A et A' de format $m \times n$ telles que la matrice A' est obtenue de A après une série d'opérations élémentaires de colonne. Alors les espaces-colonnes $\mathcal{C}(A)$ de A et $\mathcal{C}(A')$ de A' sont des sous-espaces linéaires de $\mathbb{R}^m_c$ et $\mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(A')$.*

Preuve. La preuve est similaire à celle du corollaire précédent. $\square$

Exemple 6.7. Soit $V = \mathbb{R}^4_\ell$ et les trois vecteurs de V de l'exemple 6.6

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{v_2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{v_3} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nous avons calculé l'espace U à l'exemple 6.6. Nous aurions pu procéder différemment en considérant le corollaire 6.1. En effet $U = \mathcal{L}(A)$ où

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si nous utilisons l'algorithme de Gauss-Jordan, nous obtenons la matrice réduite échelonnée suivante

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 11/5 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 \end{bmatrix}$$

Comme $U = \mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(A')$, alors un vecteur $\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}$ appartient à U s'il existe des scalaires α_1, α_2 et α_3 tels que $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}$ est égal à

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 11/5 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2/5 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1/5 \end{bmatrix}.$$

Ainsi $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, $x_3 = \alpha_3$ et $x_4 = (11/5)\alpha_1 + (2/5)\alpha_2 - (1/5)\alpha_3$. Cette dernière équation est équivalente à $x_4 = (11/5)x_1 + (2/5)x_2 - (1/5)x_3$. Nous obtenons donc que le vecteur $\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}$ appartient à U si et seulement si

$$\frac{11}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_3 - x_4 = 0$$

Cette équation est équivalente à celle de l'exemple 6.6. En effet, il suffit de multiplier la présente équation par (-5) pour obtenir celle de l'exemple 6.6.

Définition 6.8. Soit $V = \mathbb{R}^N_\ell$ (respectivement $\mathbb{R}^N_c$) et un sous-espace linéaire U de V, alors un sous-ensemble $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_k}\}$ de k vecteurs $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_k}$ de U est une **base** de U si et seulement si tout vecteur de U est une combinaison linéaire des k vecteurs de $\mathcal{B}$ et les vecteurs de $\mathcal{B}$ sont linéairement indépendants.

Exemple 6.8. Soit $V = \mathbb{R}^n_\ell$. Alors $U = V$ est un sous-espace linéaire de V. En effet, les trois conditions de la définition 6.5 sont clairement vérifiées. Soit

$$\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_i} \mid i = 1, 2, \dots, n\}, \text{ où } \overrightarrow{e_i} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots, 0 \end{bmatrix}}_{\text{seule coordonnée non nulle est à la colonne } i}.$$

Alors $\mathcal{B}$ est une base de V. Celle-ci est appelée la **base standard de** V.

Il nous faut premièrement vérifier que tous les vecteurs de V sont des combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{B}$. En effet ceci est démontré par l'équation

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_i & \dots & x_n \end{bmatrix} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n}.$$

Il nous faut deuxièmement vérifier que les vecteurs de $\mathcal{B}$ sont linéairement indépendants. En effet, si

$$\alpha_1\overrightarrow{e_1} + \alpha_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{e_n} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \overrightarrow{0}$$

alors $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. Ceci démontre l'indépendance linéaire et que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^n_\ell$.

Exemple 6.9. Soit $V = \mathbb{R}^3_\ell$. Alors

$$\mathcal{B} = \{\overrightarrow{v_1} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}, \overrightarrow{v_2} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}, \overrightarrow{v_3} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\}$$

est une base de V. En effet,

$$\begin{bmatrix}x & y & z\end{bmatrix} = x\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix} + (y-x)\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix} + (z-y)\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

montre que tous les vecteurs de $\mathbb{R}^3_\ell$ sont des combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{B}$. Nous avons aussi

$$\alpha\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Ceci montre que les vecteurs de $\mathcal{B}$ sont linéairement indépendants et que $\mathcal{B}$ est une base de V.

Exemple 6.10. Soit A une matrice de format $m \times n$ et l'ensemble U des solutions du système homogène d'équations linéaires suivant

$$A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} = 0_{m\times 1}$$

Nous avons vu à la proposition 6.4 que U est un sous-espace linéaire de $V = \mathbb{R}^n_c$. Soit une matrice réduite échelonnée A' obtenue de A après une série d'opérations élémentaires de ligne. Notons par r : le nombre de lignes non nulles de A', c'est-à-dire que r est le rang $rg(A)$ de A. Le nombre de variables dépendantes est r et le nombre de variables libres est $(n-r)$. Notons les colonnes pivots de A' sont $i_1 < i_2 < \cdots < i_r$ et les autres colonnes sont $j_1 < j_2 < \cdots < j_{n-r}$, alors les variables dépendantes sont $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}$ et les variables libres sont $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{n-r}}$. Soit les $(n-r)$ vecteurs $X_1, X_2, \ldots, X_{n-r}$ de $\mathbb{R}^n_c$ solutions du système $AX = 0_{m\times 1}$ obtenus en posant à tour de rôle une variable libre égale à 1 et toutes les autres variables libres égales à 0. Ainsi X_k est la solution pour laquelle $x_{j_k} = 1$ et les autres variables libres égales à 0, où $k = 1, 2, \ldots, (n-r)$. Noter que les variables dépendantes sont fonction des variables libres. Alors $\mathcal{B} = \{X_1, X_2, \ldots, X_{n-r}\}$ est une base de $N(A)$.

Considérons une solution S du système $AX = 0_{m\times 1}$ et notons celle-ci par

$$S = \begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_n\end{bmatrix}.$$

Alors $S = \alpha_{j_1} X_1 + \alpha_{j_2} X_2 + \cdots + \alpha_{j_k} X_k + \cdots + \alpha_{j_{n-r}} X_{n-r}$. En effet, il faut savoir que ces deux vecteurs ont les mêmes coordonnées pour les variables libres. Les variables dépendantes sont égales parce que tous les vecteurs S et $X_1, X_2, \ldots, X_{n-r}$ sont des solutions du système $AX = 0_{m \times 1}$. Ceci démontre que tout vecteur de $N(A)$ est combinaison linéaire des vecteurs $X_1, X_2, \ldots, X_{n-r}$.

Si

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_k X_k + \cdots + \alpha_{(n-r)} X_{n-r} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

alors $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{(n-r)} = 0$. En effet, il suffit de considérer les coordonnées correspondants aux indices $j_1 < j_2 < \cdots < j_{n-r}$ et la façon dont sont définis les vecteurs $X_1, X_2, \ldots, X_{n-r}$.

Nous allons illustrer ceci dans un exemple plus numérique.

Exemple 6.11. Soit la matrice A suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Considérons le noyau $N(A)$ de A, c'est-à-dire

$$N(A) = \left\{ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5_c \;\middle|\; AX = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Nous pouvons déterminer ce sous-espace. En effet, si nous utilisons l'algorithme de Gauss-Jordan à partir de A, nous obtenons comme matrice réduite échelonnée la matrice A' suivante

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dans ce cas, les variables dépendantes sont x_1, x_3 et x_5 et celles libres sont x_2 et x_4. Ainsi la solution générale est

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_2 - 2x_4) \\ x_2 \\ 3x_4 \\ x_4 \\ 0 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La base $\mathcal{B}$ construite à l'exemple précédent est alors

$$\mathcal{B} = \left\{ X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Il est facile de vérifier dans cet exemple que $\mathcal{B}$ est bien une base de $N(A)$.

Proposition 6.6. *Soit $V = \mathbb{R}^N_\ell$ (respectivement $\mathbb{R}^N_c$) et un sous-espace linéaire U non nul de V.*

(a) *U a une base $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_m}\}$.*

(b) *Si $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_m}\}$ et $\mathcal{B}' = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}\}$ sont deux bases de U, alors $m = n$.*

Preuve. (a) Prenons un vecteur non nul $\overrightarrow{u_1}$. Si U est égal à toutes les combinaisons linéaires de l'ensemble $\{\overrightarrow{u_1}\}$, alors il est facile de vérifier que $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{u_1}\}$ est une base de U. Sinon il existe des vecteurs de U qui ne sont pas combinaison linéaire de vecteurs de l'ensemble $\{\overrightarrow{u_1}\}$. Prenons ainsi un vecteur non nul $\overrightarrow{u_2}$ qui n'est pas une combinaison linéaire de vecteurs de l'ensemble $\{\overrightarrow{u_1}\}$. À cause de la proposition 6.2, les vecteurs de l'ensemble $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$ sont linéairement indépendants. Si U est égal à toutes les combinaisons linéaires de l'ensemble $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$, alors $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$ est une base de U. Sinon il existe des vecteurs de U qui ne sont pas combinaison linéaire de vecteurs de l'ensemble $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$. Prenons ainsi un vecteur non nul $\overrightarrow{u_3}$ qui n'est pas une combinaison linéaire de vecteurs de l'ensemble $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$. À cause de la proposition 6.2, les vecteurs de l'ensemble $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ sont linéairement indépendants. Nous poursuivons ainsi. Le processus s'arrête parce que le nombre de vecteurs linéairement indépendants de U ne peut pas être strictement supérieur à N à cause de la proposition 6.3 et de la proposition 6.2. Nous obtenons ainsi une base de U.

(b) Supposons que $m \neq n$ et montrons que ceci conduit à une contradiction. Nous pouvons supposer que $m < n$. Comme $\mathcal{B}$ est une base de U, alors nous pouvons écrire chacun des vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$. Ainsi

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_1} = a_{11}\overrightarrow{u_1} + a_{21}\overrightarrow{u_2} + \cdots + a_{m1}\overrightarrow{u_m} \\ \overrightarrow{v_2} = a_{12}\overrightarrow{u_1} + a_{22}\overrightarrow{u_2} + \cdots + a_{m2}\overrightarrow{u_m} \\ \quad \vdots \\ \overrightarrow{v_n} = a_{1n}\overrightarrow{u_1} + a_{2n}\overrightarrow{u_2} + \cdots + a_{mn}\overrightarrow{u_m} \end{cases}$$

Notons la matrice des coefficients par

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Cette matrice est de format $m \times n$. Si nous considérons le système homogène de m équations linéaires à n inconnues suivant :

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Comme le nombre m d'équations est strictement inférieur au nombre n d'inconnues, alors le système a une infinité de solutions et il existe une solution non nulle. Donc il existe des scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ non tous nuls tels que

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si nous considérons maintenant $\alpha_1\overrightarrow{v_1} + \alpha_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{v_n}$, alors nous obtenons que

$$\alpha_1\overrightarrow{v_1} + \alpha_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{v_n} = \begin{bmatrix} \alpha_1(a_{11}\overrightarrow{u_1} + a_{21}\overrightarrow{u_2} + \cdots + a_{m1}\overrightarrow{u_m}) \\ +\alpha_2(a_{12}\overrightarrow{u_1} + a_{22}\overrightarrow{u_2} + \cdots + a_{m2}\overrightarrow{u_m}) \\ + \cdots + \\ +\alpha_n(a_{1n}\overrightarrow{u_1} + a_{2n}\overrightarrow{u_2} + \cdots + a_{mn}\overrightarrow{u_m}) \end{bmatrix}$$

est égal à

$$\begin{bmatrix} \quad (a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n)\overrightarrow{u_1} \\ +(a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\alpha_n)\overrightarrow{u_2} \\ + \cdots + \\ +(a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \cdots + a_{mn}\alpha_n)\overrightarrow{u_m} \end{bmatrix} = 0\overrightarrow{u_1} + 0\overrightarrow{u_2} + \cdots + 0\overrightarrow{u_m} = \overrightarrow{0}.$$

Alors les vecteurs $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ sont linéairement dépendants. Mais ceci contredit le fait que $\mathcal{B}'$ est une base. Donc $m = n$. □

Définition 6.9. Soit $V = \mathbb{R}^N_\ell$ (respectivement $\mathbb{R}^N_c$) et un sous-espace linéaire U de V. Si U est $\{\overrightarrow{0}\}$, alors nous disons que U est de dimension 0 et nous notons ceci par $\dim(U) = 0$. Si U n'est pas nul, considérons une base $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}\}$ de U, celle-ci existe à cause de la proposition précédente, alors nous dirons que U est de dimension n et nous notons ceci par $\dim(U) = n$. Ce nombre est bien défini à cause de la proposition précédente.

Exemple 6.12. Soit une matrice A de format $m \times n$. Si le rang $rg(A)$ de A est r, alors la dimension du noyau $N(A)$ est $\dim(N(A)) = n - r$. Ceci est une conséquence de l'exemple 6.10.

Proposition 6.7. *Soit $V = \mathbb{R}^N_\ell$ (respectivement $\mathbb{R}^N_c$), un sous-espace linéaire U non nul de V et une base $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}\}$ de U. Alors tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de U peut écrire d'une et une seule façon comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$. En d'autres mots, si $\overrightarrow{u} \in U$, alors il existe des scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tels que*

$$\overrightarrow{u} = \alpha_1\overrightarrow{u_1} + \alpha_2\overrightarrow{u_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{u_n}$$

et ces scalaires sont uniques.

Preuve. Parce que $\mathcal{B}$ est une base, alors tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de U est une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$. De ceci, nous pouvons conclure qu'il existe des scalaires $\alpha_1, \alpha_2, , \ldots, \alpha_n$ tels que

$$\overrightarrow{u} = \alpha_1\overrightarrow{u_1} + \alpha_2\overrightarrow{u_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{u_n}$$

Il nous faut maintenant montrer que ces scalaires sont uniques.

Supposons que

$$\alpha_1\overrightarrow{u_1} + \alpha_2\overrightarrow{u_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{u_n} = \beta_1\overrightarrow{u_1} + \beta_2\overrightarrow{u_2} + \cdots + \beta_n\overrightarrow{u_n},$$

alors nous obtenons

$$(\alpha_1 - \beta_1)\overrightarrow{u_1} + (\alpha_2 - \beta_2)\overrightarrow{u_2} + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)\overrightarrow{u_n} = \overrightarrow{0}.$$

Comme les vecteurs de $\mathcal{B}$ sont linéairement indépendants, alors nous pouvons conclure que

$$(\alpha_1 - \beta_1) = 0, \quad (\alpha_2 - \beta_2) = 0, \quad \ldots, (\alpha_n - \beta_n) = 0$$

c'est-à-dire que $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2, \ldots, \alpha_n = \beta_n$. Nous avons ainsi montré l'unicité. $\square$

Définition 6.10. Soit $V = \mathbb{R}^N_\ell$ (respectivement $\mathbb{R}^N_c$), un sous-espace linéaire U non nul de V et une base $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}\}$ de U. Par la proposition précédente, pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de U, il existe des scalaires uniques $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tels que

$$\overrightarrow{u} = \alpha_1\overrightarrow{u_1} + \alpha_2\overrightarrow{u_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{u_n}$$

Alors la **matrice des coordonnées de $\overrightarrow{u}$ par rapport à** $\mathcal{B}$ est

$$[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

Ici nous avons ordonné l'ensemble $\mathcal{B}$ et nous tenons compte de cet ordre dans la définition de la matrice des coordonnées.

Exemple 6.13. Soit $V = \mathbb{R}^3_\ell$. Alors comme nous l'avons vu à l'exemple 6.9

$$\mathcal{B} = \{\overrightarrow{v_1} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}, \overrightarrow{v_2} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}, \overrightarrow{v_3} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\}$$

est une base de V. Considérons le vecteur $\begin{bmatrix}x & y & z\end{bmatrix}$. Comme nous l'avons vu, alors

$$\begin{bmatrix}x & y & z\end{bmatrix} = x\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix} + (y-x)\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix} + (z-y)\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

et conséquemment la matrice des coordonnées du vecteur $\begin{bmatrix}x & y & z\end{bmatrix}$ par rapport à la base $\mathcal{B}$ est

$$\begin{bmatrix}x & y & z\end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x \\ (y-x) \\ (z-x) \end{bmatrix}$$

Proposition 6.8. *Soit une matrice A de format $m \times n$.*

(a) *Soit A' une matrice réduite échelonnée de format $m \times n$ telle que la matrice A' est obtenue de A après une série d'opérations élémentaires de ligne. Alors les lignes non nulles de A' forment une base de l'espace-ligne $\mathcal{L}(A)$ de A.*

(b) *Le rang* $rg(A)$ *de* A *est égal à la dimension* $\dim(\mathcal{L}(A))$ *de l'espace-ligne de* A.

(c) *Soit* A' *et* A'' *deux matrices réduites échelonnées de format* $m \times n$ *telles que ces matrices* A' *et* A'' *sont obtenues de* A *après une série d'opérations élémentaires de ligne. Alors* $A' = A''$.

Preuve. (a) Nous avons vu au corollaire 6.1 que $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(A')$. Il nous faut alors seulement montrer que les lignes non nulles de A' forment une base de $\mathcal{L}(A')$. Notons que, par définition de ce qu'est l'espace-ligne, tout vecteur de $\mathcal{L}(A')$ est une combinaison linéaire des lignes non nulles de A'. Il nous faut donc seulement montrer que les lignes non nulles de A' sont linéairement indépendantes. Considérons les lignes non nulles $L_1, L_2, \ldots, L_r$ de A'. Nous voulons déterminer tous les scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ tels que

$$\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \cdots + \alpha_r L_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

Si nous considérons les coordonnées de la somme ci-dessus sur les colonnes pivots et le fait que A' est réduite échelonnée, alors nous obtenons $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0$. Ceci montre que les lignes non nulles de A' forment une base de $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(A')$.

(b) Ceci est une conséquence de (a).

(c) Comme les lignes non nulles de A' forment une base de $\mathcal{L}(A)$, que les lignes non nulles de A'' forment aussi une base de $\mathcal{L}(A)$ et que ces deux bases ont le même nombre d'éléments, à savoir $\dim(\mathcal{L}(A)) = rg(A)$, alors ces deux matrices ont le même nombre de lignes non nulles. Notons par $L_1, L_2, \ldots, L_r$: les lignes non nulles de A' et par $L'_1, L'_2, \ldots, L'_r$: les lignes non nulles de A''. Notons par $i_1 < i_2 < \cdots < i_r$: les colonnes pivots de A' et par $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$: les colonnes pivots de A''. Nous voulons premièrement montrer que $i_1 = j_1$, $i_2 = j_2, \ldots, i_r = j_r$.

Nous pouvons écrire L_1 comme une combinaison linéaire des lignes de A''. Nous avons ainsi $L_1 = a_1 L'_1 + a_2 L'_2 + \cdots + a_r L'_r$. Si $i_1 < j_1$, alors la composante dans la colonne i_1 de L_1 serait 0 parce que les composantes de la colonne i_1 des lignes $L'_1, L'_2, \ldots, L'_r$ sont nulles, mais parce que i_1 est une colonne pivot de A' et L_1 est la première ligne de A', cette composante doit être égale à 1. Donc $i_1 \geq j_1$. En intervertissant les rôles de L_1 et L'_1, nous obtenons que $j_1 \geq i_1$. Donc $i_1 = j_1$.

Supposons que nous avons déjà démontré que $i_1 = j_1, i_2 = j_2, ..., i_{k-1} = j_{k-1}$ et nous voulons maintenant montrer que $i_k = j_k$. Nous pouvons écrire L_k comme une combinaison linéaire des lignes de A''. Nous avons ainsi $L_k = b_1 L'_1 + b_2 L'_2 + \cdots + b_r L'_r$. Si nous considérons toutes les composantes des colonnes 1 à $(i_k - 1)$ de L_k, celles-ci sont nulles et de ceci, nous obtenons que $b_1 = b_2 = \cdots = b_{k-1} = 0$. Donc $L_k = b_k L'_k + b_{k+1} L'_{k+1} + \cdots + b_n L'_n$. Supposons que $i_k < j_k$, alors la composante dans la colonne i_k de L_k serait 0 parce que les composantes de la colonne i_k des lignes $L'_k, L'_{k+1}, \ldots, L'_r$ sont nulles, mais parce que i_k est une colonne pivot de A' et L_k est la $k^{\text{ième}}$ ligne de A', cette composante doit être égale à 1. Donc $i_k \geq j_k$. En intervertissant les rôles de L_k et L'_k, nous obtenons que $j_k \geq i_k$. Donc $i_k = j_k$. Tout ceci démontre que les indices des colonnes pivots des deux matrices A' et A'' sont les mêmes, c'est-à-dire $i_1 = j_1, i_2 = j_2, \ldots, i_r = j_r$.

Nous allons maintenant montrer que $L_1 = L'_1$, $L_2 = L'_2, \ldots, L_r = L'_r$. Considérons la ligne L_k de A'. Nous pouvons écrire celle-ci comme une combinaison linéaire des lignes de A''. Nous avons donc $L_k = b_1L'_1 + b_2L'_2 + \cdots + b_rL'_r$. Si nous considérons toutes les colonnes pivots de A' sauf la $k^{\text{ième}}$, les composantes de L_k sont 0 pour ces colonnes, alors que pour la composante de la ligne L'_m de A'' pour $m \neq k$, celle-ci est 1 et conséquemment $b_m = 0$. De cette observation, nous obtenons que $L_k = b_kL'_k$. Les composantes de L_k et L'_k sur la $k^{\text{ième}}$ colonne-pivot sont toutes les deux égales à 1 et conséquemment $b_k = 1$ et $L_k = L'_k$. Nous avons ainsi montré que $A' = A''$. □

Proposition 6.9. *Soit une matrice A de format $m \times n$.*

(a) *Soit A' une matrice de format $m \times n$ telle que la matrice A' est obtenue de A après une série d'opérations élémentaires de colonne et sa transposée $(A')^T$ est réduite échelonnée. Alors les colonnes non nulles de A' forment une base de l'espace-colonne $\mathcal{C}(A)$ de A.*

(b) *Le nombre de colonnes non nulles de A' est égal à la dimension $\dim(\mathcal{C}(A))$ de l'espace-colonne de A.*

(c) *Soit A' et A'' deux matrices de format $m \times n$ telles que ces matrices A' et A'' sont obtenues de A après une série d'opérations élémentaires de colonne et leurs transposées $(A')^T$ et $(A'')^T$ sont réduites échelonnées. Alors $A' = A''$.*

Preuve. Ceci est une conséquence de la proposition précédente en considérant la transposée A^T de A. □

6.3 Produit scalaire et méthode des moindres carrés

Définition 6.11. Soit $V = \mathbb{R}^N_\ell$ (respectivement $\mathbb{R}^N_c$), il est possible de définir le **produit scalaire des deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$** de V de la façon suivante :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_Nb_N$$

où $\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_N \end{bmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_N \end{bmatrix}$ (respectivement

$$\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} \text{ et } \overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix}$$

Exemple 6.14. Soit $V = \mathbb{R}^4_\ell$. Si $\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, alors

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = (1)(2) + (-2)(3) + (0)(1) + (3)(5) = 11.$$

Définition 6.12. Soit $V = \mathbb{R}^N_\ell$ (respectivement $\mathbb{R}^N_c$) et un vecteur $\overrightarrow{v} \in V$. Alors la **norme** ou encore la **longueur** de $\overrightarrow{v}$ est

$$\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_N^2}$$

si

$$\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_N \end{bmatrix} \quad \text{(respectivement} \quad \overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_N \end{bmatrix}^T\text{)}.$$

La proposition 5.5 peut être généralisée aux espaces euclidiens. C'est ce que la proposition suivante fait et sa preuve est similaire à celle du chapitre 5

Proposition 6.10. *Soit $V = \mathbb{R}^N_\ell$ (respectivement $\mathbb{R}^N_c$) et deux vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V$. Alors*

(a) *la longueur $\|\overrightarrow{v}\|$ de $\overrightarrow{v}$ est $\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}}$.*

(b) *le produit scalaire $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ est égal à $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\| \cos(\theta)$, où θ est l'angle fait par les demi-droites d'origine 0 et de direction $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ respectivement.*

Cette dernière proposition nous permet de calculer l'angle entre deux vecteurs de $\mathbb{R}^N_\ell$ (respectivement $\mathbb{R}^N_c$)

Exemple 6.15. Soit $V = \mathbb{R}^4_\ell$, $\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & -4 \end{bmatrix}$. Alors

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{u}\| &= \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (3)^2 + (2)^2} = \sqrt{15}, \\ \|\overrightarrow{v}\| &= \sqrt{(2)^2 + (3)^2 + (0)^2 + (-4)^2} = \sqrt{29} \quad \text{et} \\ \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} &= (1)(2) + (-1)(3) + (3)(0) + (2)(-4) = -9. \end{aligned}$$

Si θ est l'angle entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, alors nous avons

$$\cos(\theta) = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|} = \frac{-9}{\sqrt{15}\sqrt{29}} = \frac{-9}{\sqrt{435}} \quad \Rightarrow \quad \theta = \arccos\left(\frac{-9}{\sqrt{435}}\right)$$

Ainsi $\theta \approx 115,564$ degrés. $\approx$ 2,017 radians.

Proposition 6.11. *Soit $V = \mathbb{R}^N_\ell$ (respectivement $\mathbb{R}^N_c$) et deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V$. Alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux (ou encore perpendiculaires) entre eux si et seulement si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.*

Preuve. Si l'angle θ entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est $\theta = \pi/2$, alors $\cos(\theta) = 0$ et $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs non nuls de V et $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$, alors

$$0 = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\| \cos(\theta) \quad \Rightarrow \quad \cos(\theta) = 0$$

car $\|\overrightarrow{u}\| \neq 0$ et $\|\overrightarrow{v}\| \neq 0$. Donc $\theta = \pi/2$ et $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux entre eux. $\square$

Remarque 6.2. Nous avons pu généraliser ci-dessus la notion de produit scalaire à $V = \mathbb{R}^N_\ell$ (respectivement $\mathbb{R}^N_c$). Cependant si $N \neq 3$, alors il n'est pas possible de généraliser la notion de produit vectoriel de deux vecteurs de V.

Nous allons maintenant décrire la notion de droite des moindres carrés et plus généralement la méthode des moindres carrés. Commençons par décrire la notion de droite des moindres carrés.

Soit n points : (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_n, y_n) du plan E^2 tels que les scalaires x_1, x_2, $\ldots$, x_n ne sont pas tous égaux. Nous cherchons à déterminer parmi toutes les droites d'équation $y = ax+b$, celle qui minimise le carré de la distance suivant :

$$d(a, b) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i + b)]^2.$$

Il s'agit de la droite qui est la plus près de l'ensemble des n points. Nous avons illustrer ceci ci-dessous.

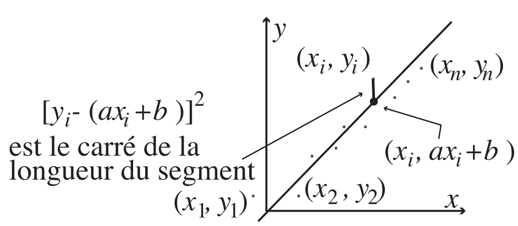


FIGURE 6.1 – Droite des moindres carrés

Proposition 6.12. *Soit n points : (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_n, y_n) du plan E^2 tels que les scalaires x_1, x_2, $\ldots$, x_n ne sont pas tous égaux. Alors il existe parmi toutes* *les droites d'équation $y = ax + b$: une unique droite d'équation $y = \hat{a}x + \hat{b}$ qui minimise le carré de la distance*

$$d(a,b) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i + b)]^2.$$

et pour celle-ci, nous avons

$$\hat{a} = \frac{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

et

$$\hat{b} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

Preuve. Considérons les vecteurs-colonnes suivants de $\mathbb{R}^n_c$:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La fonction $d(a,b)$ est le carré de la longueur du vecteur-colonne

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\left\| \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} (y_1 - ax_1 - b) \\ (y_2 - ax_2 - b) \\ \vdots \\ (y_n - ax_n - b) \end{bmatrix} \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_1 - b)^2$$

Lorsque a et b varient , les vecteurs-colonnes

$$\begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

forment un plan Π dans l'espace $V = \mathbb{R}^n_c$. Ceci est une conséquence du fait que les scalaires $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ne sont pas tous égaux. Noter aussi que pour la même raison les vecteurs-colonnes

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

sont linéairement indépendants.

Le vecteur-colonne

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

n'appartient généralement pas au plan Π. Géométriquement il est facile de voir que les scalaires $\hat{a}$ et $\hat{b}$ qui font en sorte que la fonction $d(a, b)$ est minimale sont ceux pour lesquels le vecteur

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (y_1 - \hat{a}x_1 - \hat{b}) \\ (y_2 - \hat{a}x_2 - \hat{b}) \\ \vdots \\ (y_n - \hat{a}x_n - \hat{b}) \end{bmatrix}$$

est perpendiculaire aux deux vecteurs-colonnes

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nous obtenons donc les deux équations linéaires :

$$\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

et

$$\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \hat{a}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) - \hat{b}n = 0 \quad \text{et}$$
$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \hat{a}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \hat{b}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = 0$$

Nous pouvons écrire ceci sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) & n \\ \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) & \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) \\ \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) \end{bmatrix}$$

Comme nous l'avons observé ci-dessus, une conséquence du fait que les scalaires $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ne sont pas tous égaux est que les vecteurs-colonnes

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

sont linéairement indépendants et ainsi les scalaires $\hat{a}$ et $\hat{b}$ sont alors uniques. Il est aussi possible de montrer que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) & n \\ \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) & \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \end{vmatrix} \neq 0$$

pour vérifier l'unicité de $\hat{a}$ et $\hat{b}$. Par la règle de Cramer, nous obtenons que

$$\hat{a} = \frac{\begin{vmatrix} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) & n \\ \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) & \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) & n \\ \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) & \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \end{vmatrix}} \quad \text{et} \quad \hat{b} = \frac{\begin{vmatrix} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) & \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) \\ \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) & \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) & n \\ \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) & \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \end{vmatrix}}$$

En développant ces déterminants, nous obtenons la proposition.

□

Exemple 6.16. Déterminanons la droite des moindres carrés pour les 4 points suivants : $\begin{bmatrix}1 & 3\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}2 & 5\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}4 & 10\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix}5 & 11\end{bmatrix}$. Si nous procédons comme dans la preuve ci-dessus, il faut déterminer les scalaires $\hat{a}$ et $\hat{b}$ tels que le vecteur

$$\begin{bmatrix}3\\5\\10\\11\end{bmatrix} - \hat{a}\begin{bmatrix}1\\2\\4\\5\end{bmatrix} - \hat{b}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

est perpendiculaire aux deux vecteurs

$$\begin{bmatrix}1\\2\\4\\5\end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

Nous obtenons donc le système d'équations linéaires

$$\begin{bmatrix}12 & 4\\46 & 12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{a}\\\hat{b}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}29\\108\end{bmatrix}.$$

Nous obtenons donc que

$$\hat{a} = \frac{\begin{vmatrix}29 & 4\\108 & 12\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}12 & 4\\46 & 12\end{vmatrix}} = \frac{(29)(12)-(4)(108)}{(12)(12)-(4)(46)} = \frac{84}{40} = 2{,}1$$

et

$$\hat{b} = \frac{\begin{vmatrix}12 & 29\\46 & 108\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}12 & 4\\46 & 12\end{vmatrix}} = \frac{(12)(108)-(29)(46)}{(12)(12)-(4)(46)} = \frac{38}{40} = 0{,}95.$$

La droite des moindres carrés est alors $y = 2{,}1x + 0{,}95$.

Il est possible d'écrire directement le système d'équations linéaires permettant d'obtenir les scalaires $\hat{a}$ et $\hat{b}$.

Proposition 6.13. *Soit n points : (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_n, y_n) du plan E^2 tels que les scalaires x_1, x_2, $\ldots$, x_n ne sont pas tous égaux. Posons*

$$M = \begin{bmatrix}x_1 & 1\\x_2 & 1\\\vdots & \vdots\\x_n & 1\end{bmatrix}.$$

Alors la droite des moindres carrés $y = \hat{a}x + \hat{b}$ est celle pour laquelle

$$\begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = (M^T M)^{-1} M^T \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Preuve. Nous avons

$$M^T M = \begin{bmatrix} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) & \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \\ \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) & n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M^T \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right) \\ \\ \left(\sum_{i=1}^n y_i\right) \end{bmatrix}$$

Ainsi le système d'équations linéaires permettant de calculer les scalaires $\hat{a}$ et $\hat{b}$ est équivalent au système

$$M^T M \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = M^T \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Comme les scalaires $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ne sont pas tous égaux, alors la matrice $M^T M$ est inversible. Donc

$$\begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = (M^T M)^{-1} M^T \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

□

Exemple 6.17. Reprenons les quatre points de l'exemple 6.16 : $\begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 4 & 10 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 5 & 11 \end{bmatrix}$. Alors

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M^T M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46 & 12 \\ 12 & 4 \end{bmatrix}$$

Le déterminant de $M^T M$ est $\det(M^T M) = (46)(4) - (12)(12) = 40$. Donc

$$(M^T M)^{-1} = \frac{1}{40} \begin{bmatrix} 4 & -12 \\ -12 & 46 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M^T \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 10 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 10 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 108 \\ 29 \end{bmatrix}$$

Nous obtenons donc

$$\begin{bmatrix}\hat{a}\\ \hat{b}\end{bmatrix} = (M^TM)^{-1}M^T\begin{bmatrix}3\\5\\10\\11\end{bmatrix} = \frac{1}{40}\begin{bmatrix}4 & -12\\ -12 & 46\end{bmatrix}\begin{bmatrix}108\\29\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2{,}1\\0{,}95\end{bmatrix}.$$

Remarque 6.3. Pour la matrice M ci-dessus, la matrice $(M^TM)^{-1}M^T$ est une **pseudo-inverse** de M. Comme M n'est pas une matrice carrée, elle n'a pas d'inverse. Mais elle a un inverse à gauche, à savoir $(M^TM)^{-1}M^T$.

En utilisant des méthodes similaires, à savoir l'orthogonalité de vecteurs, il est possible de considérer des questions analogues. Nous allons illustrer ceci dans deux situations.

Proposition 6.14. *Soit n points : (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\dots, (x_n, y_n)$ du plan E^2 tels qu'il existe trois indices : i, j et k pour lesquels le déterminant*

$$\begin{vmatrix}1 & x_i & x_i^2\\ 1 & x_j & x_j^2\\ 1 & x_k & x_k^2\end{vmatrix} \neq 0$$

Alors il existe parmi toutes les paraboles d'équation $y = ax^2 + bx + c$: une unique parabole d'équation $y = \hat{a}x^2 + \hat{b}x + \hat{c}$ qui minimise le carré de la distance

$$d(a, b, c) = \sum_{i=1}^{n}[y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)]^2$$

et pour celle-ci, nous avons que

$$\begin{bmatrix}\hat{a}\\ \hat{b}\\ \hat{c}\end{bmatrix}$$

est l'unique solution du système suivant d'équations linéaires :

$$\begin{bmatrix}\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) & \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) & n\\ \left(\sum_{i=1}^n x_i^3\right) & \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) & \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\\ \left(\sum_{i=1}^n x_i^4\right) & \left(\sum_{i=1}^n x_i^3\right) & \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)\\ \left(\sum_{i=1}^n x_iy_i\right)\\ \left(\sum_{i=1}^n x_i^2y_i\right)\end{bmatrix}$$

De plus, si M est la matrice

$$M = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^2 & x_n & 1 \end{bmatrix},$$

alors la solution sera

$$\begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{c} \end{bmatrix} = (M^T M)^{-1} M^T \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Preuve. Nous allons seulement esquisser la preuve. Il faut réaliser que $d(a, b, c)$ est le carré de la longueur du vecteur-colonne

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^2 & x_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix},$$

Lorsque a, b et c varient , les vecteurs-colonnes

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^2 & x_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ \vdots \\ x_n^2 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

forment un sous-espace U (de dimension 3 à cause de nos hypothèses) dans l'espace $V = \mathbb{R}_c^n$.

Le vecteur-colonne

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

n'appartient généralement pas au sous-espace U. Géométriquement il est facile de voir que les scalaires $\hat{a}$, $\hat{b}$ et $\hat{c}$ qui font en sorte que la fonction $d(a, b, c)$ est minimale sont ceux qui font en sorte que le vecteur

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^2 & x_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (y_1 - \hat{a}x_1^2 - \hat{b}x_1 - \hat{c}) \\ (y_2 - \hat{a}x_2^2 - \hat{b}x_2 - \hat{c}) \\ \vdots \\ (y_n - \hat{a}x_n^2 - \hat{b}x_n - \hat{c}) \end{bmatrix}$$

est perpendiculaire aux trois vecteurs-colonnes

$$\begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ \vdots \\ x_n^2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nous obtenons ainsi les trois équations linéaires de la proposition. $\square$

Exemple 6.18. Considérons les quatre points $\begin{bmatrix} x_y & y_i \end{bmatrix}$ suivants : $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 4 & 15 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 5 & 26 \end{bmatrix}$. Déterminons la "parabole des moindres carrés", c'est-à-dire l'unique parabole d'équation $y = \hat{a}x^2 + \hat{b}x + \hat{c}$ qui fait en sorte que le carré de la distance

$$d(a, b, c) = \sum_{i=1}^{4} [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)]^2$$

soit minimale. Dans ce cas,

$$M = \begin{bmatrix} 1^2 & 1 & 1 \\ 2^2 & 2 & 1 \\ 4^2 & 4 & 1 \\ 5^2 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Nous avons que

$$M^TM = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 16 & 25 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 898 & 198 & 46 \\ 198 & 46 & 12 \\ 46 & 12 & 4 \end{bmatrix}$$

Cette dernière matrice est inversible, car son déterminant est 360. Nous obtenons que

$$(M^TM)^{-1} = \frac{1}{360} \begin{bmatrix} 40 & -240 & 260 \\ -240 & 1476 & -1668 \\ 260 & -1668 & 2104 \end{bmatrix}.$$

La solution est alors

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{c} \end{bmatrix} &= (M^TM)^{-1}M^T \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 15 \\ 26 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{360} \begin{bmatrix} 40 & -240 & 260 \\ -240 & 1476 & -1668 \\ 260 & -1668 & 2104 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 16 & 25 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 15 \\ 26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ -11/5 \\ 49/15 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Donc la parabole recherchée est $y = (4/3)x^2 - (11/5)x + (49/15)$.

Proposition 6.15. *Soit* n *points :* (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), $\ldots$, (x_n, y_n, z_n) *de l'espace* E^3 *tels qu'il existe trois indices :* i, j *et* k *pour lesquels le déterminant*

$$\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} \neq 0$$

Alors il existe parmi toutes les plans d'équation $z = ax + by + c$ *: un unique plan d'équation* $z = \hat{a}x + \hat{b}y + \hat{c}$ *qui minimise le carré de la distance*

$$d(a, b, c) = \sum_{i=1}^{n} [z_i - (ax_i + by_i + c)]^2$$

et pour celui-ci, nous avons que

$$\begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{c} \end{bmatrix}$$

est l'unique solution du système suivant d'équations linéaires :

$$\begin{bmatrix} (\sum_{i=1}^n x_i) & (\sum_{i=1}^n y_i) & n \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) & (\sum_{i=1}^n x_i y_i) & (\sum_{i=1}^n x_i) \\ (\sum_{i=1}^n x_i y_i) & \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right) & (\sum_{i=1}^n y_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\sum_{i=1}^n z_i) \\ (\sum_{i=1}^n x_i z_i) \\ (\sum_{i=1}^n y_i z_i) \end{bmatrix}$$

De plus si M est la matrice

$$M = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & 1 \end{bmatrix},$$

alors la solution sera

$$\begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{c} \end{bmatrix} = (M^T M)^{-1} M^T \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}.$$

Preuve. Lorsque a, b et c varient , les vecteurs-colonnes

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

forment un sous-espace U (de dimension 3 à cause de nos hypothèses) dans l'espace $V = \mathbb{R}_c^n$.

Le vecteur-colonne

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$$

n'appartient généralement pas au sous-espace U. Géométriquement il est facile de voir que les scalaires $\hat{a}$, $\hat{b}$ et $\hat{c}$ qui font en sorte que la fonction $d(a, b, c)$ est minimale sont ceux qui font en sorte que le vecteur

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (z_1 - \hat{a}x_1 - \hat{b}y_1 - \hat{c}) \\ (z_2 - \hat{a}x_2 - \hat{b}y_2 - \hat{c}) \\ \vdots \\ (z_n - \hat{a}x_n - \hat{b}y_n - \hat{c}) \end{bmatrix}$$

est perpendiculaire aux trois vecteurs-colonnes

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nous obtenons ainsi les trois équations linéaires de la proposition. □

Exemple 6.19. Considérons les quatre points $\begin{bmatrix} x_i & y_i & z_i \end{bmatrix}$ suivants : $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$. Déterminons le plan d'équation $z = \hat{a}x + \hat{b}y + \hat{c}$ qui fait en sorte que le carré de la distance

$$d(a,b,c) = \sum_{i=1}^{4} [z_i - (ax_i + by_i + c)]^2$$

soit minimale. Dans ce cas,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Nous avons que

$$M^T M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 12 & 6 \\ 12 & 20 & 8 \\ 6 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

Cette dernière matrice est inversible, car son déterminant est 16. Nous obtenons que

$$(M^T M)^{-1} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 16 & 0 & -24 \\ 0 & 4 & -8 \\ -24 & -8 & 56 \end{bmatrix}.$$

La solution est alors

$$\begin{bmatrix}\hat{a}\\ \hat{b}\\ \hat{c}\end{bmatrix} = (M^TM)^{-1}M^T\begin{bmatrix}5\\7\\7\\7\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{16}\begin{bmatrix}16 & 0 & -24\\ 0 & 4 & -8\\ -24 & -8 & 56\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 3 & 3\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\7\\7\\7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 1/2\\ 4\end{bmatrix}$$

Donc l'équation recherchée est $z = x + (1/2)y + 4$.

6.4 Changement de bases

Dans cette section, V désignera l'espace $\mathbb{R}^N_\ell$ des vecteurs-lignes (respectivement l'espace $\mathbb{R}^N_c$ des vecteurs-colonnes) ayant N composantes. Étant donné un sous-espace linéaire U de V, ainsi que deux bases $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}\}$, $\mathcal{B}' = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}\}$ de U, nous aimerions relier les matrices de coordonnées $[\overrightarrow{u}]_\mathcal{B}$ et $[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{B}'}$ par rapport à $\mathcal{B}$ et à $\mathcal{B}'$ pour un vecteur $\overrightarrow{u}$ quelconque de U .

Définition 6.13. Avec les notations ci-dessus, comme $\mathcal{B}$ est une base de U, nous pouvons écrire chacun des vecteurs de $\mathcal{B}'$ comme une combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{B}$ et nous avons

$$\left\{\begin{aligned} \overrightarrow{v_1} &= a_{11}\overrightarrow{u_1} + a_{21}\overrightarrow{u_2} + \cdots + a_{n1}\overrightarrow{u_n}\\ \overrightarrow{v_2} &= a_{12}\overrightarrow{u_1} + a_{22}\overrightarrow{u_2} + \cdots + a_{n2}\overrightarrow{u_n}\\ &\ \vdots\\ \overrightarrow{v_n} &= a_{1n}\overrightarrow{u_1} + a_{2n}\overrightarrow{u_2} + \cdots + a_{nn}\overrightarrow{u_n}\end{aligned}\right. \tag{6.1}$$

Alors la matrice

$${}_\mathcal{B}[I]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

est la **matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$**.

Exemple 6.20. Soit $U = V = \mathbb{R}^3_\ell$. Nous avons vu à l'exemple 6.9 du chapitre 6 que

$$\mathcal{B} = \{\overrightarrow{u_1} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}, \overrightarrow{u_2} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}, \overrightarrow{u_3} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\}$$

est une base de $\mathbb{R}^3_\ell$.

$$\mathcal{B}' = \{\overrightarrow{v_1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}, \overrightarrow{v_2} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}, \overrightarrow{v_3} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\}$$

est aussi une base de $\mathbb{R}^3_\ell$. C'est la base standard de $\mathbb{R}^3_\ell$. Pour calculer la matrice de passage ${}_{\mathcal{B}}[I]_{\mathcal{B}'}$, il nous faut exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{v_i} \in \mathcal{B}'$ comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$. Noter qu'à l'exemple 6.9, nous avons vu que

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}x & y & z\end{bmatrix} &= x\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix} + (y-x)\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix} + (z-y)\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\\ &= x\overrightarrow{u_1} + (y-x)\overrightarrow{u_2} + (z-y)\overrightarrow{u_3}\end{aligned}$$

La première colonne de ${}_{\mathcal{B}}[I]_{\mathcal{B}'}$ sera obtenue de

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix} = 1\overrightarrow{u_1} + (0-1)\overrightarrow{u_2} + (0-0)\overrightarrow{u_3} = (1)\overrightarrow{u_1} + (-1)\overrightarrow{u_2} + (0)\overrightarrow{u_3}$$

La deuxième colonne de ${}_{\mathcal{B}}[I]_{\mathcal{B}'}$ sera obtenue de

$$\overrightarrow{v_2} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix} = 0\overrightarrow{u_1} + (1-0)\overrightarrow{u_2} + (0-1)\overrightarrow{u_3} = (0)\overrightarrow{u_1} + (1)\overrightarrow{u_2} + (-1)\overrightarrow{u_3}$$

Finalement la troisième colonne de ${}_{\mathcal{B}}[I]_{\mathcal{B}'}$ sera obtenue de

$$\overrightarrow{v_3} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix} = 0\overrightarrow{u_1} + (0-0)\overrightarrow{u_2} + (1-0)\overrightarrow{u_3} = (0)\overrightarrow{u_1} + (0)\overrightarrow{u_2} + (1)\overrightarrow{u_3}$$

Donc la matrice de passage est

$${}_{\mathcal{B}}[I]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

Remarque 6.4. Il ne faut pas confondre les deux matrices ${}_{\mathcal{B}}[I]_{\mathcal{B}'}$ et ${}_{\mathcal{B}'}[I]_{\mathcal{B}}$. Pour calculer la matrice de passage ${}_{\mathcal{B}}[I]_{\mathcal{B}'}$, nous avons exprimé chacun des vecteurs $\overrightarrow{v_i} \in \mathcal{B}'$ comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$, alors que pour calculer ${}_{\mathcal{B}'}[I]_{\mathcal{B}}$ il faut exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{u_i} \in \mathcal{B}$ comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}'$. Si nous effectuons ce calcul, nous obtenons que la matrice de passage est

$${}_{\mathcal{B}'}[I]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

Proposition 6.16. *Soit V, U, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ comme précédemment et le vecteur $\overrightarrow{u} \in U$, alors les matrices de coordonnés de $\overrightarrow{u}$ relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ satisfont la relation suivante :*

$$[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}[I]_{\mathcal{B}'}[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{B}'}$$

Preuve. Notons les matrices de coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$ relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ par

$$[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [\overrightarrow{u}]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{bmatrix}$$

et la matrice de passage ${}_{\mathcal{B}}[I]_{\mathcal{B}'}$ par

$${}_{\mathcal{B}}[I]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

En d'autres mots, nous avons que

$$\overrightarrow{u} = \alpha_1\overrightarrow{u_1} + \alpha_2\overrightarrow{u_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{u_n} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{u} = \alpha'_1\overrightarrow{v_1} + \alpha'_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + \alpha'_n\overrightarrow{v_n}$$

De la définition de la matrice de passage ${}_{\mathcal{B}}[I]_{\mathcal{B}'}$ et des équations 6.1, nous avons aussi

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_1} = a_{11}\overrightarrow{u_1} + a_{21}\overrightarrow{u_2} + \cdots + a_{n1}\overrightarrow{u_n} \\ \overrightarrow{v_2} = a_{12}\overrightarrow{u_1} + a_{22}\overrightarrow{u_2} + \cdots + a_{n2}\overrightarrow{u_n} \\ \quad\vdots \\ \overrightarrow{v_n} = a_{1n}\overrightarrow{u_1} + a_{2n}\overrightarrow{u_2} + \cdots + a_{nn}\overrightarrow{u_n} \end{cases}$$

En substituant les expressions ci-dessus pour $\overrightarrow{v_i}$, où $i = 1, 2, \dots, n$, dans l'équation $\overrightarrow{u} = \alpha'_1\overrightarrow{v_1} + \alpha'_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + \alpha'_n\overrightarrow{v_n}$ et par la distributivité, nous obtenons facilement que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} &= (a_{11}\alpha'_1 + a_{12}\alpha'_2 + \cdots + a_{1n}\alpha'_n)\overrightarrow{u_1} + (a_{21}\alpha'_1 + a_{22}\alpha'_2 + \cdots + a_{2n}\alpha'_n)\overrightarrow{u_2} \\ &\quad + \cdots + (a_{n1}\alpha'_1 + a_{n2}\alpha'_2 + \cdots + a_{nn}\alpha'_n)\overrightarrow{u_n} \\ &= \alpha_1\overrightarrow{u_1} + \alpha_2\overrightarrow{u_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{u_n} \end{aligned}$$

Par l'unicité de l'expression d'un vecteur comme combinaison linéaire des vecteurs de la base $\mathcal{B}$, nous obtenons

$$\begin{cases} \alpha_1 = a_{11}\alpha'_1 + a_{12}\alpha'_2 + \cdots + a_{1n}\alpha'_n \\ \alpha_2 = a_{21}\alpha'_1 + a_{22}\alpha'_2 + \cdots + a_{2n}\alpha'_n \\ \quad\vdots \\ \alpha_n = a_{n1}\alpha'_1 + a_{n2}\alpha'_2 + \cdots + a_{nn}\alpha'_n \end{cases} \tag{6.2}$$

Des équations 6.2, nous obtenons que

$$\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha'_1\\ \alpha'_2\\ \vdots\\ \alpha'_n\end{bmatrix}$$

c'est-à-dire que nous avons $[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}[I]_{\mathcal{B}'}[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{B}'}$ et c'est ce que nous voulions montrer. □

Exemple 6.21. Reprenons les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de l'exemple 6.20. Nous avons déjà calculé

$${}_{\mathcal{B}}[I]_{\mathcal{B}'}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

Si $\overrightarrow{u}=\begin{bmatrix}x & y & z\end{bmatrix}$, alors comme nous l'avons vu dans l'exemple 6.20

$$[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{B}'}=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}\quad \text{et}\quad [\overrightarrow{u}]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}x\\ (y-x)\\ (z-y)\end{bmatrix}$$

Il est facile de vérifier dans ce cas que

$$[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}x\\ (y-x)\\ (z-y)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}={}_{\mathcal{B}}[I]_{\mathcal{B}'}[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{B}'}$$

Illustrons ceci avec le vecteur $\overrightarrow{u}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\end{bmatrix}$. Nous avons donc que

$$[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{B}'}=\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 2\end{bmatrix}\quad \text{et}\quad [\overrightarrow{u}]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 3\end{bmatrix}.$$

Nous avons bien

$$[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 2\end{bmatrix}={}_{\mathcal{B}}[I]_{\mathcal{B}'}[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{B}'}$$

Proposition 6.17. *Soit V, U comme précédemment et trois bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ de U : $\mathcal{B}=\{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\dots,\overrightarrow{u_n}\}$, $\mathcal{B}'=\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\dots,\overrightarrow{v_n}\}$ et $\mathcal{B}''=\{\overrightarrow{w_1},\overrightarrow{w_2},\dots,\overrightarrow{w_n}\}$. Si ${}_{\mathcal{B}'}[I]_{\mathcal{B}}$, ${}_{\mathcal{B}''}[I]_{\mathcal{B}'}$ et ${}_{\mathcal{B}''}[I]_{\mathcal{B}}$sont les matrices de passage relativement aux bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$, alors nous avons*

$${}_{\mathcal{B}''}[I]_{\mathcal{B}}={}_{\mathcal{B}''}[I]_{\mathcal{B}'}{}_{\mathcal{B}'}[I]_{\mathcal{B}}.$$

Preuve. Nous ferons la preuve de cette proposition dans le cas où $n = 2$. La preuve pour un entier n quelconque est similaire. Posons

$$_{\mathcal{B}'}[I]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad _{\mathcal{B}''}[I]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad _{\mathcal{B}''}[I]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

Ceci signifie que nous avons les équations suivantes :

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_1} = a_{11}\overrightarrow{v_1} + a_{21}\overrightarrow{v_2} \\ \overrightarrow{u_2} = a_{12}\overrightarrow{v_1} + a_{22}\overrightarrow{v_2} \end{cases} \tag{6.3}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_1} = b_{11}\overrightarrow{w_1} + b_{21}\overrightarrow{w_2} \\ \overrightarrow{v_2} = b_{12}\overrightarrow{w_1} + b_{22}\overrightarrow{w_2} \end{cases} \tag{6.4}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_1} = c_{11}\overrightarrow{w_1} + c_{21}\overrightarrow{w_2} \\ \overrightarrow{u_2} = c_{12}\overrightarrow{w_1} + c_{22}\overrightarrow{w_2} \end{cases} \tag{6.5}$$

En substituant les équations 6.4 dans celles de 6.3, alors nous obtenons

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u_1} &= (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21})\overrightarrow{w_1} + (b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21})\overrightarrow{w_2} \\ &= c_{11}\overrightarrow{w_1} + c_{21}\overrightarrow{w_2} \\ \overrightarrow{u_2} &= (b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22})\overrightarrow{w_1} + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22})\overrightarrow{w_2} \\ &= c_{12}\overrightarrow{w_1} + c_{22}\overrightarrow{w_2} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{cases} c_{11} = b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} \\ c_{21} = b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} \\ c_{12} = b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ c_{22} = b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{cases}$$

et

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

En d'autres mots, $_{\mathcal{B}''}[I]_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}''}[I]_{\mathcal{B}'}\,{}_{\mathcal{B}'}[I]_{\mathcal{B}}$. □

Corollaire 6.3. *Soit V et U comme précédemment et deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de U : $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}\}$, $\mathcal{B}' = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}\}$. Alors les matrices de passage $_{\mathcal{B}'}[I]_{\mathcal{B}}$ et $_{\mathcal{B}}[I]_{\mathcal{B}'}$ sont inversibles et de plus elles sont l'inverse l'une de l'autre, c'est-à-dire*

$$({}_{\mathcal{B}}[I]_{\mathcal{B}'})^{-1} = {}_{\mathcal{B}'}[I]_{\mathcal{B}} \quad \text{et} \quad ({}_{\mathcal{B}'}[I]_{\mathcal{B}})^{-1} = {}_{\mathcal{B}}[I]_{\mathcal{B}'}.$$

Preuve. Il faut premièrement noter que les deux matrices de passage ${}_{\mathcal{B}}[I]_{\mathcal{B}}$ et ${}_{\mathcal{B}'}[I]_{\mathcal{B}'}$ sont égales à la matrice identité I_n. De la proposition précédente, nous obtenons en posant premièrement $\mathcal{B}'' = \mathcal{B}$ que

$$ {}_{\mathcal{B}}[I]_{\mathcal{B}'}\,{}_{\mathcal{B}'}[I]_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}[I]_{\mathcal{B}} = I_n $$

De façon similaire, nous avons

$$ {}_{\mathcal{B}'}[I]_{\mathcal{B}}\,{}_{\mathcal{B}}[I]_{\mathcal{B}'} = {}_{\mathcal{B}'}[I]_{\mathcal{B}'} = I_n $$

Ceci démontre que le corollaire.

□

Remarque 6.5. Le corollaire précdent nous permet de calculer la matrice ${}_{\mathcal{B}'}[I]_{\mathcal{B}}$ si la matrice ${}_{\mathcal{B}}[I]_{\mathcal{B}'}$ est déjà connue en inversant cette dernière

6.5 Exercices

Exercice 6.1. Considérons $V = \mathbb{R}^4_\ell$ et les cinq vecteurs suivants :

$$ \overrightarrow{v_1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \overrightarrow{v_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \overrightarrow{v_3} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}, $$
$$ \overrightarrow{v_4} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ et } \overrightarrow{v_5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}. $$

(a) Est-ce que le vecteur $\overrightarrow{v_4}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$?

(b) Déterminer une équation de la forme $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0$ qui décrit tous les vecteurs qui sont des combinaisons linéaires des vecteurs $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$.

(c) Est-ce que le vecteur $\overrightarrow{v_5}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$?

(d) Est-ce que les 4 vecteurs $\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_3}$, $\overrightarrow{v_4}$ et $\overrightarrow{v_5}$ sont linéairement indépendants ou non ?

(e) Est-ce que $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4}, \overrightarrow{v_5}\}$ est une base de $\mathbb{R}^4_\ell$?

Exercice 6.2. Considérons $V = \mathbb{R}^4_c$ et les quatre vecteurs suivants

$$ \overrightarrow{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \overrightarrow{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \overrightarrow{v_3} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \overrightarrow{v_4} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} $$

Est-ce que ces quatre vecteurs sont linéairement indépendants ou pas ?

Exercice 6.3. Considérons $V = \mathbb{R}^4_\ell$ et $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4}\}$, où

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & -1\end{bmatrix}, \overrightarrow{v_2} = \begin{bmatrix}0 & -1 & 2 & 1\end{bmatrix}, \overrightarrow{v_3} = \begin{bmatrix}1 & 0 & -3 & 1\end{bmatrix},$$
$$\overrightarrow{v_4} = \begin{bmatrix}0 & 2 & -1 & 1\end{bmatrix}.$$

(a) Vérifier que $\mathcal{B}$ est une base de V.

(b) Déterminer la matrice des coordonnées du vecteur $\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_4\end{bmatrix}$ par rapport à la base $\mathcal{B}$.

Exercice 6.4. Considérons $V = \mathbb{R}^4_\ell$ et le sous-espace linéaire

$$U = \{\alpha_1\overrightarrow{v_1} + \alpha_2\overrightarrow{v_2} + \alpha_3\overrightarrow{v_3} + \alpha_4\overrightarrow{v_4} \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}\},$$

où

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{bmatrix}2 & 1 & -1 & 0\end{bmatrix}, \overrightarrow{v_2} = \begin{bmatrix}0 & 1 & -2 & 3\end{bmatrix}, \overrightarrow{v_3} = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix},$$
$$\overrightarrow{v_4} = \begin{bmatrix}3 & 3 & -3 & 2\end{bmatrix}.$$

U est l'espace-ligne $\mathcal{L}(A)$de la matrice

$$A = \begin{bmatrix}2 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 3\\ 1 & 0 & -1 & 1\\ 3 & 3 & -3 & 2\end{bmatrix}$$

(a) Déterminer une base $\mathcal{B}$ de U et la dimension $\dim(U)$ de U en utilisant le fait que $U = \mathcal{L}(A)$.

(b) Est-ce que le vecteur $\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & 5\end{bmatrix}$ appartient au sous-espace U ? Si oui, alors déterminer la matrice des coordonnées $[\overrightarrow{v}]_\mathcal{B}$ du vecteur $\overrightarrow{v}$ par rapport à la base $\mathcal{B}$.

(c) Est-ce que le vecteur $\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix}6 & -1 & -1 & -2\end{bmatrix}$ appartient au sous-espace U ? Si oui, alors déterminer la matrice des coordonnées $[\overrightarrow{v}]_\mathcal{B}$ du vecteur $\overrightarrow{v}$ par rapport à la base $\mathcal{B}$.

Exercice 6.5. Considérons $V = \mathbb{R}^4_c$ et le sous-espace linéaire

$$U = \left\{ X = \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4_c \;\middle|\; AX = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \right\}$$

où

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Soit les vecteurs

$$\overrightarrow{\mathbf{v_1}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathbf{v_2}} = \begin{bmatrix} 6 \\ -11 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathbf{v_3}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(a) Déterminer une base $\mathcal{B}$ de U et la dimension $\dim(U)$ de U en utilisant le fait que U est le noyau $N(A)$ de A.

(b) Est-ce que le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{v_1}}$ appartient au sous-espace U ? Si oui, alors déterminer la matrice des coordonnées $[\overrightarrow{\mathbf{v_1}}]_{\mathcal{B}}$ du vecteur $\overrightarrow{\mathbf{v_1}}$ par rapport à la base $\mathcal{B}$.

(c) Est-ce que le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{v_2}}$ appartient au sous-espace U ? Si oui, alors déterminer la matrice des coordonnées $[\overrightarrow{\mathbf{v_2}}]_{\mathcal{B}}$ du vecteur $\overrightarrow{\mathbf{v_2}}$ par rapport à la base $\mathcal{B}$.

(d) Est-ce que le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{v_3}}$ appartient au sous-espace U ? Si oui, alors déterminer la matrice des coordonnées $[\overrightarrow{\mathbf{v_3}}]_{\mathcal{B}}$ du vecteur $\overrightarrow{\mathbf{v_3}}$ par rapport à la base $\mathcal{B}$.

Exercice 6.6. Considérons les 5 points suivants du plan : $\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-2 & -7\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}3 & 8\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}5 & 14\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix}-3 & -10\end{bmatrix}$. Déterminer l'équation $y = \hat{a}x + \hat{b}$ de la droite des moindres carrés pour ce nuage de points.

Exercice 6.7. Considérons $V = \mathbb{R}^4_\ell$, la base $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{\mathbf{u_1}}, \overrightarrow{\mathbf{u_2}}, \overrightarrow{\mathbf{u_3}}, \overrightarrow{\mathbf{u_4}}\}$ de l'exercice 6.1, où

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{\mathbf{u_1}} = \begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & -1\end{bmatrix}, \overrightarrow{\mathbf{u_2}} \quad = \begin{bmatrix}0 & -1 & 2 & 1\end{bmatrix}, \overrightarrow{\mathbf{u_3}} = \begin{bmatrix}1 & 0 & -3 & 1\end{bmatrix}, \\ &\overrightarrow{\mathbf{u_4}} = \begin{bmatrix}0 & 2 & -1 & 1\end{bmatrix}. \end{aligned}$$

et la base standard $\mathcal{B}' = \{\overrightarrow{\mathbf{v_1}}, \overrightarrow{\mathbf{v_2}}, \overrightarrow{\mathbf{v_3}}, \overrightarrow{\mathbf{v_4}}\}$, où

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{\mathbf{v_1}} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \overrightarrow{\mathbf{v_2}} \quad = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}, \overrightarrow{\mathbf{v_3}} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}, \\ &\overrightarrow{\mathbf{v_4}} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(a) Déterminer la matrice de passage ${}_{\mathcal{B}}[I]_{\mathcal{B}'}$ de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$. (Utilisez les résultats de l'exercice 6.1.)

(b) Déterminer la matrice de passage ${}_{\mathcal{B}'}[I]_{\mathcal{B}}$ de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

(c) Vérifier que les deux matrices ${}_{\mathcal{B}}[I]_{\mathcal{B}'}$ et ${}_{\mathcal{B}'}[I]_{\mathcal{B}}$ sont l'inverse l'une de l'autre.

Exercice 6.8. Considérons $V = \mathbb{R}^3_\ell$, la base $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{\mathbf{u_1}}, \overrightarrow{\mathbf{u_2}}, \overrightarrow{\mathbf{u_3}}\}$, où

$$\overrightarrow{\mathbf{u_1}} = \begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathbf{u_2}} = \begin{bmatrix}0 & 2 & -1\end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathbf{u_3}} = \begin{bmatrix}-1 & 0 & -2\end{bmatrix},$$

la base standard $\mathcal{B}' = \{\overrightarrow{\mathbf{v_1}}, \overrightarrow{\mathbf{v_2}}, \overrightarrow{\mathbf{v_3}}\}$, où

$$\overrightarrow{\mathbf{v_1}} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathbf{v_2}} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathbf{v_3}} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

et la base standard $\mathcal{B}'' = \{\overrightarrow{\mathbf{w_1}}, \overrightarrow{\mathbf{w_2}}, \overrightarrow{\mathbf{w_3}}\}$, où

$$\overrightarrow{\mathbf{w_1}} = \begin{bmatrix}2 & -1 & 1\end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathbf{w_2}} = \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathbf{w_3}} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

Vous pouvez prendre pour acquis qu'il s'agit bien de trois bases de $V = \mathbb{R}^3_\ell$.

(a) Déterminer la matrice de passage ${}_{\mathcal{B}'}[I]_{\mathcal{B}}$ de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

(b) Déterminer la matrice de passage ${}_{\mathcal{B}''}[I]_{\mathcal{B}'}$ de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}''$.

(c) Déterminer la matrice de passage ${}_{\mathcal{B}''}[I]_{\mathcal{B}}$ de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}''$.

(d) Soit le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix}3 & -1 & 4\end{bmatrix}$. Déterminer les matrices de coordonnées $[\overrightarrow{\mathbf{u}}]_{\mathcal{B}}$, $[\overrightarrow{\mathbf{u}}]_{\mathcal{B}'}$ et $[\overrightarrow{\mathbf{u}}]_{\mathcal{B}''}$ de $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ par rapport aux bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ respectivement.