

## Exercices 5 solutions

by Aram Dermenjian

22 octobre 2018

Un exercice marqué du symbole  $\star$  est considéré comme plus difficile et ne sera pas une question d'examen.

**Exercice 1** Calculer les intégrales suivantes :

- (1)  $\int \tan(3x)^3 dx$
- (2)  $\int \sec(x)^4 \tan(x)^2 dx$
- (3)  $\int \sec(5x)^3 \tan(5x)^3 dx$
- (4)  $\int \sec(x)^7 dx$
- (5)  $\int \frac{\cos(2x) + \sin(2x)}{\sin(2x)} dx$
- (6)  $\int \frac{\sin(x) + \tan(x)}{\sec(x)} dx$

*Démonstration.* (1)  $-\frac{1}{6(\sin(3x)^2-1)} + \frac{1}{6} \log(\sin(3x)^2 - 1) + c$

(2)  $\frac{1}{5} \tan(x)^5 + \frac{1}{3} \tan(x)^3 + c$

(3)  $-\frac{5 \cos(5x)^2 - 3}{75 \cos(5x)^5} + c$

(4)  $-\frac{15 \sin(x)^5 - 40 \sin(x)^3 + 33 \sin(x)}{48(\sin(x)^6 - 3 \sin(x)^4 + 3 \sin(x)^2 - 1)} + \frac{5}{32} \log(\sin(x) + 1) - \frac{5}{32} \log(\sin(x) - 1) + c$

(5)  $x + \frac{1}{2} \log(\sin(2x)) + c$

(6)  $\frac{1}{2} \sin(x)^2 - \cos(x) + c$

□

**Exercice 2** ( $\star$ ) Calculer les intégrales suivantes :

- (1)  $\int \sec(3x)^5 \tan(3x) dx$
- (2)  $\int \frac{\cos(x)^4}{\sin(x)^6} dx$
- (3)  $\int \sin(x)^2 \tan(x)^3 dx$
- (4)  $\int \cot(x)^3 dx$
- (5)  $\int \csc(x)^4 dx$
- (6)  $\int \cot(x)^3 \csc(x)^3 dx$
- (7)  $\int \cot(x)^2 \csc(x) dx$
- (8)  $\int \cot(7x) \csc(7x)^2 dx$

*Démonstration.* (1)  $\frac{1}{15 \cos(3x)^5} + c$

(2)  $-\frac{1}{5 \tan(x)^5} + c$

(3)  $\frac{1}{2} \sin(x)^2 - \frac{1}{2(\sin(x)^2-1)} + \log(\sin(x)^2 - 1) + c$

(4)  $-\frac{1}{2 \sin(x)^2} - \frac{1}{2} \log(\sin(x)^2) + c$

(5)  $-\frac{3 \tan(x)^2 + 1}{3 \tan(x)^3} + c$

- (6)  $\frac{5 \sin(x)^2 - 3}{15 \sin(x)^5} + c$   
 (7)  $\frac{\cos(x)}{2(\cos(x)^2 - 1)} + \frac{1}{4} \log(\cos(x) + 1) - \frac{1}{4} \log(\cos(x) - 1) + c$   
 (8)  $-\frac{1}{14} \cot(7x)^2 + c$

□

**Exercice 3** Calculer les intégrales définies suivantes.

- (1)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec(x)^4 dx$   
 (2)  $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x)^3}{\cos(x)^{\frac{5}{2}}} dx$   
 (3)  $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)^2}{\cos(x)^4} dx$   
 (4)  $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sec(2x)^3 \tan(2x) dx$   
 (5)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec(x)^4 \tan(x)^4 dx$

*Démonstration.* (1)  $\frac{4}{3}$

- (2)  $\frac{7}{3} \sqrt{2} - \frac{8}{3}$   
 (3)  $\frac{2}{3}$   
 (4)  $\frac{1}{3} \sqrt{2} - \frac{1}{6}$   
 (5)  $\frac{12}{35}$

□

**Exercice 4** Calculer les intégrales suivantes :

- (1)  $\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+9}} dx$   
 (2)  $\int \frac{x}{\sqrt{-x^2+9}} dx$   
 (3)  $\int \frac{x^3}{\sqrt{-x^2+9}} dx$   
 (4)  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+9}} dx$   
 (5)  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-9}} dx$

*Démonstration.* (1)  $\arcsin\left(\frac{1}{3}x\right) + c$

- (2)  $-\sqrt{-x^2+9} + c$   
 (3)  $-\frac{1}{3}\sqrt{-x^2+9}x^2 - 6\sqrt{-x^2+9} + c$   
 (4)  $\operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{3}x\right) + c$   
 (5)  $\log(2x + 2\sqrt{x^2-9}) + c$

□

**Exercice 5** (★) Calculer les intégrales suivantes :

- (1)  $\int \sqrt{-x^2+9} dx$   
 (2)  $\int \frac{x^2}{\sqrt{-x^2+9}} dx$   
 (3)  $\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+9x^2}} dx$   
 (4)  $\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+9x}} dx$   
 (5)  $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+9}} dx$

$$(6) \int \frac{1}{\sqrt{x^2+9x^2}} dx$$

$$(7) \int \frac{1}{\sqrt{x^2-9x}} dx$$

$$(8) \int \frac{1}{(x^2+9)^2 x} dx$$

$$(9) \int \frac{x+1}{\sqrt{-x^2+3}} dx$$

*Démonstration.* (1)  $\frac{1}{2} \sqrt{-x^2+9x} + \frac{9}{2} \arcsin\left(\frac{1}{3}x\right) + c$

$$(2) -\frac{1}{2} \sqrt{-x^2+9x} + \frac{9}{2} \arcsin\left(\frac{1}{3}x\right) + c$$

$$(3) -\frac{\sqrt{-x^2+9}}{9x} + c$$

$$(4) -\frac{1}{3} \log\left(\frac{6\sqrt{-x^2+9}}{|x|} + \frac{18}{|x|}\right) + c$$

$$(5) \frac{1}{3} \sqrt{x^2+9x^2} - 6\sqrt{x^2+9} + c$$

$$(6) -\frac{\sqrt{x^2+9}}{9x} + c$$

$$(7) -\frac{1}{3} \arcsin\left(\frac{3}{|x|}\right) + c$$

$$(8) -\sqrt{-x^2+3} + \arcsin\left(\frac{1}{3}\sqrt{3x}\right) + c$$

□

**Exercice 6** Calculer les intégrales définies suivantes :

$$(1) \int_0^3 \frac{7}{(-x^2+16)^{\frac{3}{2}}} dx$$

$$(2) \int_0^2 \sqrt{4x^2+9} dx$$

$$(3) \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{5x^2-3x^2}} dx$$

$$(4) \int_{-6}^{-5} \frac{1}{(x^2-16)^{\frac{3}{2}}} dx$$

$$(5) \int_0^2 \sqrt{-x^2+4} dx$$

$$(6) \int_0^1 \frac{x^2+1}{\sqrt{-x^2+4}} dx$$

$$(7) \int_0^6 \frac{3x-1}{\sqrt{-x^2+100}} dx$$

$$(8) \star \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4x^2+9}} dx$$

$$(9) \star \int_{\ln(\sqrt{2})}^{\ln(2)} \sqrt{2e^{(2x)}-4} dx$$

*Démonstration.* (1)  $\frac{3}{16} \sqrt{7}$

$$(2) \frac{9}{4} \operatorname{arsinh}\left(\frac{4}{3}\right) + 5$$

$$(3) \frac{1}{6} \sqrt{17} - \frac{1}{3} \sqrt{2}$$

$$(4) -\frac{3}{80} \sqrt{5} + \frac{5}{48}$$

$$(5) \pi$$

$$(6) \frac{1}{2} \pi - \frac{1}{2} \sqrt{3}$$

$$(7) -\arcsin\left(\frac{3}{5}\right) + 6$$

$$(8) \frac{1}{2} \operatorname{arsinh}\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$(9) -\frac{1}{2} \pi + 2$$

□

**Exercice 7** Calculer les intégrales suivantes :

$$(1) \int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}(x-1)} dx$$

$$(2) \int -\frac{1}{x^2-6x-16} dx$$

$$(3) \int \frac{1}{4x^2+4x-3} dx$$

$$(4) \int \frac{x}{\sqrt{x^2-6x}} dx$$

$$(5) \int \frac{1}{\sqrt{x^2+6x+3}} dx$$

$$(6) \int \frac{3x+1}{x^2+4x+6} dx$$

$$(7) \int \frac{\sqrt{x^2-6x+13}}{x-3} dx$$

$$(8) \int \sqrt{-x^2+4x+5} dx$$

$$(9) \int \sqrt{4x^2+8x+3} dx$$

$$(10) \int \frac{1}{\sqrt{-\sqrt{x}+1}} dx$$

$$(11) \int \frac{1}{x(\sqrt{x}-4)} dx$$

$$(12) \int \frac{x^2}{\sqrt{-x^2+36}} dx$$

$$(13) \int \frac{1}{\cos(x)+2} dx$$

*Démonstration.* (1)  $-\operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{|x-1|}\right) + c$

$$(2) \frac{1}{10} \log(x+2) - \frac{1}{10} \log(x-8) + c$$

$$(3) -\frac{1}{8} \log(2x+3) + \frac{1}{8} \log(2x-1) + c$$

$$(4) \sqrt{x^2-6x} + 3 \log(2x+2\sqrt{x^2-6x}-6) + c$$

$$(5) \log(2x+2\sqrt{x^2+6x+3}+6) + c$$

$$(6) -\frac{5}{2} \sqrt{2} \arctan\left(\frac{1}{2} \sqrt{2}(x+2)\right) + \frac{3}{2} \log(x^2+4x+6) + c$$

$$(7) \sqrt{x^2-6x+13} - 2 \operatorname{arsinh}\left(\frac{2}{|x-3|}\right) + c$$

$$(8) \frac{1}{2} \sqrt{-x^2+4x+5} - \sqrt{-x^2+4x+5} - \frac{9}{2} \arcsin\left(-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right) + c$$

$$(9) \frac{1}{2} \sqrt{4x^2+8x+3} + \frac{1}{2} \sqrt{4x^2+8x+3} - \frac{1}{4} \log(8x+4\sqrt{4x^2+8x+3}+8) + c$$

$$(10) \frac{4}{3} (-\sqrt{x}+1)^{\frac{3}{2}} - 4 \sqrt{-\sqrt{x}+1} + c$$

$$(11) -\frac{1}{4} \log(x) + \frac{1}{2} \log(\sqrt{x}-4) + c$$

$$(12) -\frac{1}{2} \sqrt{-x^2+36} + 18 \arcsin\left(\frac{1}{6}x\right) + c$$

$$(13) \frac{2}{3} \sqrt{3} \arctan\left(\frac{\sqrt{3} \sin(x)}{3(\cos(x)+1)}\right) + c$$

□

**Exercice 8** (1)  $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx$

$$(2) \int_1^4 \frac{1}{x+4\sqrt{x+5}} dx$$

$$(3) \int_{-2}^2 \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+13}} dx$$

$$(4) \star \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos(x)+\sin(x)+1} dx$$

$$(5) \star \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{4}{\sqrt{-x^2+2x}} dx$$

$$(6) \star \int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{x^4+1}} dx$$

$$(7) \star \int_2^4 \frac{6}{\sqrt{x^2-1x^4}} dx$$

*Démonstration.* (1)  $\operatorname{arsinh}(1)$

$$(2) -4 \arctan(4) + 4 \arctan(3) + \frac{1}{2} \log(289) - \log(10)$$

$$(3) \operatorname{arsinh}\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$(4) \log(2)$$

$$(5) \frac{2}{3} \pi$$

$$(6) 0$$

$$(7) \frac{33}{32} \sqrt{15} - \frac{9}{4} \sqrt{3}$$

□

**Exercice 9** Déterminez le prix d'équilibre, le surplus totale et le surplus des consommateurs pour les fonctions de demande et d'offre suivante :

$$(1) D(q) = -q^2 + 12; O(q) = q$$

$$(2) D(q) = \frac{99}{q+4}; O(q) = q + 6$$

$$(3) D(q) = \sqrt{-2q + 800}; O(q) = \sqrt{2q + 100}$$

*Démonstration.* (1) (a)  $p = 3$

$$(b) ST = \frac{45}{2}$$

$$(c) SC = 18$$

$$(2) (a) p = 5$$

$$(b) ST = 198 \log(3) - 198 \log(2) - \frac{85}{2}$$

$$(c) SC = 198 \log(3) - 198 \log(2) - 55$$

$$(3) (a) p = 175$$

$$(b) ST = \frac{2500}{3} \sqrt{2} + \frac{1000}{3}$$

$$(c) SC = \frac{1375}{3} \sqrt{2}$$

□

**Exercice 10** Calculer le coefficient de Gini pour les courbes de Lorenze suivantes :

$$(1) \frac{4}{5} x^2 + \frac{1}{5} x$$

$$(2) \frac{1}{2} \cdot 3^x - \frac{1}{2}$$

$$(3) \frac{3}{5} x^4 + \frac{2}{5} x$$

*Démonstration.* (1)  $\frac{4}{15}$

$$(2) \frac{2(\log(3)-1)}{\log(3)}$$

$$(3) \frac{9}{25}$$

□