Devoir 2

à remettre le 5 déc 2017

Points Total : 80

Pour les étudiants dont le code permenant est entre **MEJ** et **PEL**.

(i) Aucun travail rédiger au crayon plomb ne sera corrigé.

(ii) Il faut bien écrire votre réponse (*e.g.* sans trop de ratures).

(iii) Si vous voulez transmettre votre devoir par courriel, il faut envoyer le fichier en format PDF. Aucun scan ni document *Word* ne sera accepté.

(iv) Vous remettez une copie par personne.

Exercice 1 **(10 points)** Soit la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -3 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ -6 & 3 & -6 & 0 & 3 & 6 & -6 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & 2 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & -5 & -10 & 10 & 5 & -15 \end{bmatrix}$$

Calculer le déterminant de A.

Exercice 2 Soit la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & -9 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

et considérer le système d'équations linéaires suivant

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 5 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(i) **(3 points)** Calculer le déterminant de A.

(ii) **(6 points)** Calculer l'inverse de A à l'aide de la matrice adjointe.

(iii) **(6 points)** Calculer la solution du système d'équations linéaires à l'aide de la règle de Cramer.

Exercice 3 Fixons une base orthonormée $\mathcal{B} = \left\{\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3}\right\}$ de l'espace E^3 orientée selon la règle de la main droite. Supposons que vous êtes au point $P = (4,\ 1,\ 3)$ et que vous trouvez une carte au trésor. Vous ouvrez la carte et les deux points suivants sont écrits à l'intérieur :

$$Q = (4,\ 2,\ 3) \quad \text{et} \quad R = (0,\ 4,\ 2)\,.$$

En-desous des points, les instructions suivantes sont écrites :

(i) **(2 points)** Bienvenue à Eruban ! Il y a un gros trésor dans notre terre, mais il vous faut le trouver. Pour le trouver, vous devez savoir la distance entre vous et notre origine $(0, 0, 0)$. Calculer la longueur $\left\|\overrightarrow{OP}\right\|$ du vecteur $\overrightarrow{OP}$.

(ii) **(4 points)** Quand vous avez trouvé la distance, traversez le champs devant vous et allez au point Q. Pour y aller, il vous faut calculer l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$ et calculer le vecteur $\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$ entre les deux points.

(iii) **(2 points)** Quand vous êtes arriver au point Q, il faut aller au point R. Ainsi, il vous faut calculer le scalaire η tel que le vecteur $\overrightarrow{OP} + \eta\overrightarrow{OQ}$ est perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{OR}$.

(iv) **(4 points)** Alors, on y va au point R ! Mais quand vous tournez vers R, vous apercevez un grand lac au travers de votre chemin ! Pour le traverser, il faut construire un plan sur lequel vous pourrez marcher. Donner l'équation du plan Π_{PQR} passant par les trois points P, Q et R en utilisant le produit vectoriel.

(v) **(2 points)** Après avoir construire le plan Π_{PQR}, vous pouvez enfin traverser le lac et vous êtes au point R. Quand vous arrivez au point R, la carte change ! Toutes les instructions disparaissent et elles sont remplacées par la phrase "le trésor est au point S" :

$$S = (1,\ 3,\ 3)$$

Vous espérez que le point S se trouve sur le plan que vous avez construit. Est-ce que le point S appartient au plan Π_{PQR} ?

(vi) **(4 points)** Alors, il faut y aller ! Déterminer les équations paramétriques de l'unique droite Δ_{RS} passant par les deux points R et S.

(vii) **(2 points)** Finalement, allez au point S ! Là vous utilisez votre pelle pour creuser. Après quelques minutes, vous trouvez le trésor de Eruban ! Vous gagnez 2 points pour avoir essayé chaque partie de cette question.

Exercice 4 **(3 points chaque)** Les sous-ensembles suivants de $V = \mathbb{R}^4_\ell$ sont-ils des sous-espaces de V ? Pourquoi ?

(i) $U = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

(ii) $U = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} \mid x_2 x_3 = x_1 \right\}$

(iii) $U = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} \mid x_1^2 = 2x_4 \right\}$

(iv) $U = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} \mid x_1 = x_2 + x_4 \right\}$

(v) $U = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} \mid x_1 = x_2 + x_3,\ x_2 = 3x_4 \right\}$

Exercice 5 **(5 points chaque)** Soit les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -7 & 9 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ -3 & 7 & -8 & -5 \\ 4 & -5 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Donner le noyau de A dans $\mathbb{R}^4_c$ et le noyau de B dans $\mathbb{R}^4_\ell$.

Exercice 6 **(10 points)** Déterminer si les vecteurs suivants forment une base de $\mathbb{R}^4_c$.

$$\vec{v_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v_3} = \begin{bmatrix} -7 \\ 6 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \vec{v_4} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$