Devoir 1

à remettre le 10 oct 2017

Pour les étudiants dont le code permenant est entre **LAB** et **LAM**.

(i) Aucun travail rédiger au crayon plomb ne sera corrigé.

(ii) Il faut bien écrire votre réponse (*e.g.* sans trop de ratures).

(iii) Si vous voulez transmettre votre devoir par courriel, il faut envoyer le fichier en format PDF. Aucun scan ni document Word ne sera accepté.

(iv) Vous pouvez remettre votre devoir en français ou en anglais.

(v) Vous remettez une copie par personne.

Exercice 1 Soit les matrice suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 3 & -4 & -2 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Indiquer si chacune des opérations suivantes est bien définie et effectuer ce calcul dans le cas où l'opération est bien définie :

(i) $AB + C$

(ii) $(AB)^2$

(iii) $A + B$

(iv) $(C + D^T)^3$

(v) $A(C^T + D)^8$

Exercice 2 Soit la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 & 4 & 4 & -5 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 7 & -1 & 0 & -6 \\ -1 & 1 & 5 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & -7 & 8 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

Utiliser l'algorithme de Gauss-Jordan pour obtenir une matrice reduite échelonée. De plus, indiquer son rang.

Exercice 3 Le *trace* d'une matrice carrée d'order n $A = [a_{ij}]$, noté $\mathrm{tr}(A)$, est la somme des entrées sur la diagonale principale.

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Montrer que, soit A et B des matrices carrées d'ordre n on a

(i) $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$

(ii) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

(iii) $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^T)$

(iv) $\mathrm{tr}(AA^T) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$.

(v) Si on suppose de plus que A est symétrique et B est antisymétrique, montrer que $\mathrm{tr}(AB) = 0$.

Exercice 4 Résoudre chacun des systèmes d'équations linéaires suivants :

(i) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

(ii) $$\begin{bmatrix} 1 & -5 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ -1 & 5 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Exercice 5 Soit la matrice suivante :

$$M = \begin{bmatrix} -5 & 8 & 5 \\ 3 & -5 & -3 \\ -4 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

Trouver l'inverse de M.

Donner le polynôme minimal de M.