Exercices 9

by Aram Dermenjian

14 novembre 2017

Un exercice marqué du symbole $\star$ est considéré comme plus difficile et ne sera pas une question d'examen. Un exercice marqué du symbole † est trouvé dans les notes du cours.

Exercice 1 (†) Fixons une base orthonormée $\mathcal{B} = \left\{\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3}\right\}$ de l'espace E^3 pour la suite. Soit les six points suivants de l'espace E^3 :

$$P = (-2,\, 1,\, 4) \quad Q = (1,\, 1,\, -4) \quad R = (3,\, 2,\, -1)$$
$$S = (-8,\, 1,\, 20) \quad T = (-3,\, -1,\, 11) \quad U = (2,\, 7,\, -1)\,.$$

(i) Déterminer les équations paramétriques de l'unique droite Δ_{PQ} passant par les deux points P et Q.

(ii) Montrer que les points P, Q et R ne sont pas colinéaires.

(iii) Est-ce que les points P, Q et S sont colinéaires ?

(iv) Déterminer les équations paramétriques de l'unique plan Π_{PQR} passant par les trois points P, Q et R.

(v) Déterminer une équation du plan Π_{PQR} de la forme $\delta_1 x + \delta_2 y + \delta_3 z = \kappa$.

(vi) Est-ce que les points S et T appartiennent au plan Π_{PQR} ?

(vii) Est-ce que l'unique droite Δ_{TU} passant par les deux points T et U intersecte le plan Π_{PQR} ?

(viii) Calculer la distance entre le point U et le plan Π_{PQR}.

(ix) Montrer que les points S, T et U ne sont pas colinéaires.

(x) Déterminer une équation de la forme $\delta_1 x + \delta_2 y + \delta_3 z = \kappa$ pour l'unique plan Π_{STU} passant par les trois points S, T et U.

(xi) Déterminer des équations paramétriques de l'unique droite d'intersection des plans Π_{PQR} et Π_{STU}.

Démonstration. (i) $x = -2 + 3t\,;\ y = 1 + 0t\,;\ z = 4 + -8t$

(ii) Il faut montrer que R n'est pas sur le droite Δ_{PQ}.

(iii) -2

(iv) $x = -2 + 3u + 5v\,;\ y = 1 + 0u + 1v\,;\ z = 4 + -8u + -5v$

(v) $\frac{8}{3}x - \frac{25}{3}y + z + \frac{29}{3} = 0$

(vi) Soit $P(\overrightarrow{W}) = \frac{8}{3}x - \frac{25}{3}y + z + \frac{29}{3}$. Il faut montrer que $P(\overrightarrow{W}) = 0$.

$$P(\overrightarrow{OS}) = 0$$
$$P(\overrightarrow{OT}) = 21$$

(vii) $(\frac{-39}{28}, \frac{44}{28}, \frac{-80}{28})$

(viii) $-\frac{133}{698}\sqrt{698}$

(ix) Utilise la même methode trouver dans (i) - (iii)

(x) $\frac{48}{25}x + \frac{3}{10}y + z - \frac{247}{50} = 0$

(xi)

$$x = \frac{41}{18} - \frac{37}{72}z \quad y = \frac{17}{9} - \frac{2}{45}z \quad z = z$$

□

Exercice 2 Considérer les trois points suivants, donnés par leurs coordonnées dans un système orthonormé :

$$P = (2, -4, 6) \quad Q = (-1, 1, 1) \quad S = (2, -5, 10)$$

(i) Soit Π le plan déterminé par $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$. Déterminer l'équation paramétrique de la droite orthogonale au plan Π et passant par le point S.

(ii) Déterminer les équations paramétrique du plan Π et montrer que le point S en fait partie. Exprimes le vecteur $\overrightarrow{OS}$ comme une combinaison linéaire de $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$.

(iii) Calculer l'aire du triangle PQS.

Démonstration. □