Exercices 8

by Aram Dermenjian

7 novembre 2017

Un exercice marqué du symbole $\star$ est considéré comme plus difficile et ne sera pas une question d'examen. Un exercice marqué du symbole † est trouvé dans les notes du cours.

Exercice 1 (†) Fixons une base orthonormée $\mathcal{B} = \left\{\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3}\right\}$ de l'espace E^3 orientée selon la règle de la main droite. Soit les vecteurs $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$, et $\overrightarrow{OS}$ tels que leurs matrices de coordonnées relativement à la base $\mathcal{B}$ sont

$$\left[\overrightarrow{OP}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \left[\overrightarrow{OQ}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \left[\overrightarrow{OR}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \left[\overrightarrow{OS}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 15 \\ 16 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Calculer

(i) Les longeurs $\left\|\overrightarrow{OQ}\right\|$ et $\left\|\overrightarrow{OR}\right\|$ des vecteurs $\overrightarrow{OQ}$ et $\overrightarrow{OR}$.

(ii) L'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OS}$.

(iii) Les scalaires α, β et γ tels que $\overrightarrow{OS} = \alpha\overrightarrow{OP} + \beta\overrightarrow{OQ} + \gamma\overrightarrow{OR}$

(iv) Le scalaire η tel que le vecteur $\overrightarrow{OP} + \eta\overrightarrow{OQ}$ est perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{OR}$.

(v) Les matrices des coordonnées des produits vectories $\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}$ et $\overrightarrow{OR} \times \overrightarrow{OS}$ relativement à la base $\mathcal{B}$.

(vi) L'aire du parallélogramme dont les côtés sont $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OS}$.

Démonstration. (i) $\left\|\overrightarrow{OQ}\right\| = \sqrt{62}$ et $\left\|\overrightarrow{OR}\right\| = \sqrt{66}$.

(ii) $\arccos\left(\frac{92}{15805}\sqrt{545}\sqrt{29}\right) = 0.749841469886571$

(iii) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$

(iv) $\left[x = \left(\frac{11}{12}\right)\right]$

(v) $\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ} = \begin{bmatrix} 28 \\ -22 \\ 23 \end{bmatrix}$ $\overrightarrow{OR} \times \overrightarrow{OS} = \begin{bmatrix} -56 \\ 116 \\ -127 \end{bmatrix}$

(vi) $\sqrt{7341}$.

□

Exercice 2 Montrer que les paires de vecteurs (selon leurs matrices de coordonnées relativement à la base $\mathcal{B}$) suivantes ont parallel :

(i) $\left[\overrightarrow{P_1}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$ et $\left[\overrightarrow{Q_1}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \end{bmatrix}$

(ii) $\left[\overrightarrow{P_2}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ et $\left[\overrightarrow{Q_2}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x \\ 5\,x \end{bmatrix}$

Démonstration. Il faut montrer que $\overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{Q} = \pm\left\|\overrightarrow{P}\right\|\left\|\overrightarrow{Q}\right\|$.

(i) $\overrightarrow{P_1} \cdot \overrightarrow{Q_1} = 74\,;\ \left\|\overrightarrow{P_1}\right\| \left\|\overrightarrow{Q_1}\right\| = (\sqrt{37})(2\sqrt{37}) = 74$

(ii) $\overrightarrow{P_2} \cdot \overrightarrow{Q_2} = 26\,x\,;\ \left\|\overrightarrow{P_2}\right\| \left\|\overrightarrow{Q_2}\right\| = (\sqrt{26})(\sqrt{26}\sqrt{|x|^2}) = 26\sqrt{|x|^2}$

□

Exercice 3 Montrer que les paires de vecteurs (selons leurs matrices de coordonnées relativement à la base $\mathcal{B}$) suivantes sont orthogonaux :

(i) $\left[\overrightarrow{P_1}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\left[\overrightarrow{Q_1}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

(ii) $\left[\overrightarrow{P_2}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$ et $\left[\overrightarrow{Q_2}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

(iii) $\left[\overrightarrow{P_3}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ et $\left[\overrightarrow{Q_3}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$

Démonstration. Il faut montrer que $\overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{Q} = 0$ □

Exercice 4 Soit trois vecteurs $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ et $\overrightarrow{OR}$ montrer que

$$\overrightarrow{OP} \cdot (\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}) = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OR}$$

Exercice 5 Soit les vecteurs avec leurs matrices de coordonnées relativement à la base $\mathcal{B}$ $\left[\overrightarrow{P}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ et $\left[\overrightarrow{Q}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$. Déterminer l'angle entre eux.

Démonstration. Rappelons que $\overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{Q} = \left\|\overrightarrow{P}\right\| \left\|\overrightarrow{Q}\right\| \cos(\theta)$. Donc

$$\cos(\theta) = \frac{\overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{Q}}{\left\|\overrightarrow{P}\right\| \left\|\overrightarrow{Q}\right\|} = \frac{-12}{(4)(5)} = -\frac{3}{5}$$

Alors

$$\theta = 2.21429743558818$$

□

Exercice 6 ($\star$) Soit trois points distinct noncollinéaires P_1, P_2, et P_3 du plan E^2. Est-ce qu'il existe un origin O tel que $\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OP_3}$?

Démonstration. Soit $P_1 = (a_1, b_1)$, $P_2 = (a_2, b_2)$ et $P_3 = (a_3, b_3)$. Soit un origin $O = (x, y)$. Donc on aura les matrices de coordonnées relativement à la base $\mathcal{B}$:

$$\left[\overrightarrow{OP_1}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 - x \\ b_1 - y \end{bmatrix} \quad \left[\overrightarrow{OP_2}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_2 - x \\ b_2 - y \end{bmatrix} \quad \left[\overrightarrow{OP_3}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_3 - x \\ b_3 - y \end{bmatrix}$$

Donc, pour avoir $\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OP_3}$ il suffit de montrer qu'il existe x et y tel que

$$\begin{bmatrix} a_1 - x \\ b_1 - y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 - x \\ b_2 - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_3 - x \\ b_3 - y \end{bmatrix}$$

est vraie. Donc, il faut que

$$a_1 + a_2 - 2x = a_3 - x \quad \text{et} \quad b_1 + b_2 - 2y = b_3 - y$$
$$x = a_1 + a_2 - a_3 \quad \text{et} \quad y = b_1 + b_2 - b_3$$

Ainsi oui, il existe un origin où ça marche. □