Exercices 8

by Aram Dermenjian

7 novembre 2017

Un exercice marqué du symbole $\star$ est considéré comme plus difficile et ne sera pas une question d'examen. Un exercice marqué du symbole † est trouvé dans les notes du cours.

Exercice 1 (†) Fixons une base orthonormée $\mathcal{B} = \left\{\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3}\right\}$ de l'espace E^3 orientée selon la règle de la main droite. Soit les vecteurs $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$, et $\overrightarrow{OS}$ tels que leurs matrices de coordonnées relativement à la base $\mathcal{B}$ sont

$$\left[\overrightarrow{OP}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \left[\overrightarrow{OQ}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \left[\overrightarrow{OR}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \left[\overrightarrow{OS}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 15 \\ 16 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Calculer

(i) Les longeurs $\left\|\overrightarrow{OQ}\right\|$ et $\left\|\overrightarrow{OR}\right\|$ des vecteurs $\overrightarrow{OQ}$ et $\overrightarrow{OR}$.

(ii) L'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OS}$.

(iii) Les scalaires α, β et γ tels que $\overrightarrow{OS} = \alpha\overrightarrow{OP} + \beta\overrightarrow{OQ} + \gamma\overrightarrow{OR}$

(iv) Le scalaire η tel que le vecteur $\overrightarrow{OP} + \eta\overrightarrow{OQ}$ est perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{OR}$.

(v) Les matrices des coordonnées des produits vectories $\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ}$ et $\overrightarrow{OR}\times\overrightarrow{OS}$ relativement à la base $\mathcal{B}$.

(vi) L'aire du parallélogramme dont les côtés sont $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OS}$.

Exercice 2 Montrer que les paires de vecteurs (selon leurs matrices de coordonnées relativement à la base $\mathcal{B}$) suivantes ont parallel :

(i) $\left[\overrightarrow{P_1}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$ et $\left[\overrightarrow{Q_1}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \end{bmatrix}$

(ii) $\left[\overrightarrow{P_2}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ et $\left[\overrightarrow{Q_2}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x \\ 5\,x \end{bmatrix}$

Exercice 3 Montrer que les paires de vecteurs (selons leurs matrices de coordonnées relativement à la base $\mathcal{B}$) suivantes sont orthogonaux :

(i) $\left[\overrightarrow{P_1}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\left[\overrightarrow{Q_1}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

(ii) $\left[\overrightarrow{P_2}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$ et $\left[\overrightarrow{Q_2}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

(iii) $\left[\overrightarrow{P_3}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ et $\left[\overrightarrow{Q_3}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$

Exercice 4 Soit trois vecteurs $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ et $\overrightarrow{OR}$ montrer que

$$\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}) = \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OR}$$

Exercice 5 Soit les vecteurs avec leurs matrices de coordonnées relativement à la base $\mathcal{B}$ $\left[\overrightarrow{P}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ et $\left[\overrightarrow{Q}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$. Déterminer l'angle entre eux.

Exercice 6 ($\star$) Soit trois points distinct noncollinéaires P_1, P_2, et P_3 du plan E^2. Est-ce qu'il existe un origin O tel que $\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OP_3}$?