Exercices 7

by Aram Dermenjian

31 octobre 2017

Un exercice marqué du symbole $\star$ est considéré comme plus difficile et ne sera pas une question d'examen. Un exercice marqué du symbole † est trouvé dans les notes du cours.

Exercice 1 (†) Soit les matrices suivantes :

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 3 & 9 & -1 & -6 \end{bmatrix}$$

(i) Calculer le déterminant de chacune de ces matrices.

(ii) Si la matrice est inversible, calculer son inverse en utilisant sa matrice adjointe.

Exercice 2 (†) Soit le système d'équations linéaires suivant $AX = B$, où

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -5 & -1 \\ 4 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & -4 \\ 0 & 7 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(i) Calculer le déterminant de la matrice A.

(ii) En utilisant la règle de Cramer, déterminer l'unique solution de ce système d'équations linéaires.

Exercice 3 (†) Soit les matrices suivantes :

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 9 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

(i) Calculer le déterminant de chacune de ces matrices.

(ii) En utilisant ce déterminant, indiquer si ces matrices sont inversibles.

Exercice 4 (†) (i) Montrer que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1).$$

(ii) Montrer que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2).$$

(iii) Montrer que le déterminant

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ c & b & (x+a) \end{vmatrix} = (x^3 + ax^2 + bx + c)$$

Exercice 5 (†) Étant donné une matrice carrée A de format $n \times n$, nous définissons son polynôme caractéristique comme étant $P_A(x) = \det(A - xI_n)$. Soit A une des matrice ssuivantes :

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 3 & 9 & -1 & -6 \end{bmatrix}$$

(i) Calculer le polynôme caractéristique $P_A(x)$ pour A.

(ii) Comparer le coefficient constant $P_A(0)$ de $P_A(x)$ et le déterminant de A.

(iii) Comparer la trace $\operatorname{tr}(A)$ de la matrice A et le coefficient de x^{n-1} dans le polynôme caractéristique $P_A(x)$.

(iv) Calculer $P_A(A)$ pour A.

Exercice 6 (†) Soit la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Montrer que le polynôme caracteristique de A est

$$P_A(x) = \det(A - xI_2) = x^2 - (a+d)x + (ad - bc).$$

Exercice 7 (†) Soit la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Montrer que le polynôme caractéristique $P_A(x) = \det(A - xI_3)$ de A est

$$-x^3 + (a+e+i)x^2 - \left(\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} \right) x + \det(A)$$

Exercice 8 (†) Soit la matrice symétrique :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

où a, b, c sont des nombres réels. Montrer que les racines du polynôme caractéristique de A

$$P_A(x) = \det(A - xI_2) = x^2 - (a+c)x + (ac - b^2)$$

sont des nombres réels. Rappelons que les racines du polynôme $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, où $\alpha \neq 0$, sont

$$\frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

Exercice 9 (†) Soit une fonction $f(x)$ telle que ses valeurs aux points $0, 1, 3$ et 4 sont $f(0) = 2$, $f(1) = 3$, $f(3) = -1$, et $f(4) = -18$. En utilisant la règle de Cramer, déterminer l'unique polynôme $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ de degré trois tel que $P(0) = f(0)$, $P(1) = f(1)$, $P(3) = f(3)$ et $P(4 = f(4)$.