Exercices 6

by Aram Dermenjian

17 octobre 2017

Un exercice marqué du symbole $\star$ est considéré comme plus difficile et ne sera pas une question d'examen. Un exercice marqué du symbole † est trouvé dans les notes du cours.

Exercice 1 (†) Soit la permutation

$$\sigma = [4, 2, 1, 5, 8, 7, 3, 6]$$

Déterminer la longueur $\ell(\sigma)$ de σ et son signe $\mathrm{sgn}(\sigma)$.

Démonstration. $\ell(\sigma) = 10$

$\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$ □

Exercice 2 Calculer le déterminant de chacune de ces matrices en utilisant des opérations élémentaires de ligne ou de colonne.

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 6 & 8 & 0 \end{bmatrix}$

(iii)$\star$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \\ -5 & -4 & -3 & -2 \end{bmatrix}$

Démonstration.

(i) -2

(ii) -48

(iii) 0

□

Exercice 3 Calculer le déterminant de chacune de ces matrices :

(i) $\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -3 & -2 & -5 \\ -1 & 3 & 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

Démonstration.

(i) 125

(ii) 380

□

Exercice 4 Calculer le déterminant de chacune de ces matrices :

(i) $\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ \frac{1}{a} & 1 & \frac{b}{a} \\ \frac{1}{b} & \frac{a}{b} & 1 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a^2} \\ a & 1 & \frac{1}{a} \\ a^2 & a & 1 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & -b+c \\ -c & b-c & 0 \end{bmatrix}$

Démonstration. (i) 0

(ii) 0

(iii) 0

□

Exercice 5 ($\star$) Calculer le déterminant de chacune de ces matrices :

(i) $\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} x & y & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 \\ 0 & 0 & x & y \\ y & 0 & 0 & x \end{bmatrix}$

Démonstration. (i) $z-1$

(ii) $x^4 - y^4$

□

Exercice 6 Soit une matrice carrée A d'ordre n, montrer que :

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \det(\alpha A) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma)(\alpha a_{1\sigma(1)})(\alpha a_{2\sigma(2)}) \cdots (\alpha a_{n\sigma(n)}) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\alpha^n \left(a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}\right) \\ &= \alpha^n \det(A) \end{aligned}$$

□