Exercices 5 solutions

by Aram Dermenjian

3 octobre 2017

Un exercice marqué du symbole $\star$ est considéré comme plus difficile et ne sera pas une question d'examen. Un exercice marqué du symbole † est trouvé dans les notes du cours.

Exercice 1 (†) Soit les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & 4 & 12 \end{bmatrix}$$

(i) Calculer le polynôme minimal de chacune de ces matrices.

(ii) En utilisant ce polynôme minimal, indiquer si ces matrices sont inversibles. Si oui, calculer l'inverse.

(iii) Calculer les puissances suivantes : A^8, B^{10}, C^6, en utilisant le polynôme minimal.

Démonstration. (i) $A : x^2 - 2x + 10$

$B : x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

$C : x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

$D : x^3 - 12x^2 - 15x$

(ii) $A : \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$

$B : \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$C : \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

D : Pas inversible

(iii) $A^8 = \begin{bmatrix} -8432 & -5376 \\ 5376 & -8432 \end{bmatrix}$

$B^10 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$C^6 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 6 \\ -6 & -14 & -15 \\ 6 & 15 & 16 \end{bmatrix}$

□

Exercice 2 Soit les matrice suivantes :

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & -c_2 \end{bmatrix}$

(v) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

(vi) $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

(i) Calculer le polynôme minimal de chacune de ces matrices.

(ii) Déterminer si les matrices sont inversibles, et si oui, calculer l'inverse.

Démonstration. (i) Les polynômes minimals

(a) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

(b) $x^3 - 3x^2 + 3x - 2$

(c) $x^3 + (-a - b - c)\, x^2 + (ab + ac + bc)\, x - abc$

(d) $x^3 + c_2 x^2 + c_1 x + c_0$

(e) $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5$

(f) $x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2$

(ii) Les inverses

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} -\frac{c_1}{c_0} & 1 & 0 \\ -\frac{c_2}{c_0} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{c_0} & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$\square$

Exercice 3 (†) Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}$$

Calculer la polynôme minimal de A.

Démonstration. $x^2 - bx - a$ $\square$

Exercice 4 Calculer le 1000$^{\text{e}}$ puissance de la matrice suivante, à l'aide du polynôme minimal.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Démonstration. Le polynôme minimal est x^2-2x+1. Ainsi, $A^{1000} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1000 & 1 \end{bmatrix}$. $\square$

Exercice 5 ($\star$) Montrer que même si A et B sont deux matrices inversibles de même format, alors $A + B$ n'a pas forcement un inverse.

Démonstration. Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ on trouve que A et B sont inversibles. On peut voir ça avec leurs polynômes minimals :

$$P(A) = x^2 - 4x + 3 \quad P(B) = x^2 + 2x + 1$$

Mais, c'est facile à voir que $A+B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ n'est pas inversible car son polynôme minimal est $x^2 - 2x$. $\square$