Exercices 3

by Aram Dermenjian

19 septembre 2017

Un exercice marqué du symbole $\star$ est considéré comme plus difficile et ne sera pas une question d'examen. Un exercice marqué du symbole † est trouvé dans les notes du cours.

Exercice 1 (†) Résoudre chacun des systèmes d'équations linéaires suivants :

(i)
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(ii)
$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 15 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -16 \\ -5 \\ 11 \\ -13 \end{bmatrix}$$

(iii)
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

(iv)
$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -8 & 1 & -8 \\ 1 & -5 & -11 & -1 & -13 \\ 1 & 0 & -1 & 6 & -5 \\ 3 & -1 & -5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ -2 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Exercice 2 Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants :

(i)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 2x_1 - 4x_2 + 7x_3 &= 7 \\ 4x_1 - 9x_2 + 2x_3 &= -15 \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ 3x + 6y &= 16 \end{aligned}$$

(iv)
$$\begin{aligned} a + 2b - c + d &= 0 \\ a + 2b - 2d &= 0 \end{aligned}$$

Exercice 3 Montrer que si A possède une colonne nulle, le système d'équations linéaires homogènes $AX = 0$ possède d'autres solutions en plus de la solution triviale $X_0 = 0$.

Exercice 4 Supposer que $AX = B$, A est inversible et qu'on désire savoir la solution de $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$. Montrer que $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = X^T X$ et ensuite que $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = B^T (A^{-1})^T (A^{-1}) B$.

Exercice 5 (†) Soit une fonction $f(x)$ telle que ses valeurs aux points 0, 1, 2, et 3 sont les suivantes :

$$f(0) = 2, \quad f(1) = -1, \quad f(2) = 3 \quad \text{et} \quad f(3) = 5$$

(i) Déterminer l'unique polynôme d'interpolation

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

de degré 3 tel que

$$P(0) = f(0), \quad P(1) = f(1), \quad P(2) = f(2), \quad \text{et} \quad P(3) = f(3).$$

(ii) Est-ce qu'il existe un polynôme $Q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$ de degré 2 tel que

$$Q(0) = f(0), \quad Q(1) = f(1), \quad Q(2) = f(2), \quad \text{et} \quad Q(3) = f(3).$$

Exercice 6 Soit une fonction $f(x)$ telle que ses valeurs aux points 0, 1 et 2 sont les suivantes :

$$f(0) = -1, \quad f(1) = 0, \quad \text{et} \quad f(2) = 3$$

Trouver l'unique polynôme $P(x)$ de degré inférieur ou égal à 2 pour lequel $P(0) = f(0)$, $P(1) = f(1)$, $P(2) = f(2)$.