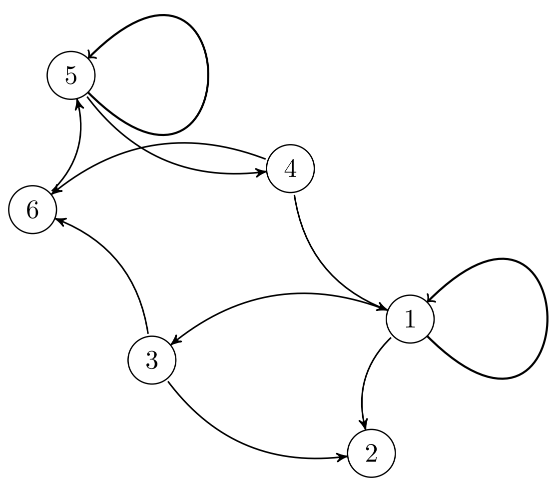
Exercices 2 solutions

by Aram Dermenjian

12 septembre 2017

Un exercice marqué du symbole $\star$ est considéré comme plus difficile et ne sera pas une question d'examen. Un exercice marqué du symbole † est trouvé dans les notes du cours.

Exercice 1 (†) Soit le graphe orienté Γ suivant :



(i) Déterminer la matrice d'adjacence $M = M(\Gamma)$ de ce graphe.

(ii) Calculer M^4 et vérifier que l'entrée à la ligne 5 et à la colonne 5 de M^4 correspond bien au nombre de chemins de longueur 4 allant du sommet 5 au sommet 5 dans le graphe Γ en énumérant tous ces chemins.

(iii) Calculer M^6 et vérifier que l'entrée à la ligne 5 et à la colonne 2 de M^6 correspond bien au nombre de chemins de longueur 6 allant du sommet 5 au sommet 2 dans le graphe Γ en énumérant tous ces chemins.

Démonstration. (i) $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(ii) $M^4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Les trois chemins de longueur 4 de 5 à 5 sont :

— $5 \to 5 \to 5 \to 5 \to 5$

— $5 \to 4 \to 6 \to 5 \to 5$

— $5 \to 5 \to 4 \to 6 \to 5$

(iii) $M^6 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 5 & 3 & 4 & 6 & 4 \\ 8 & 8 & 5 & 5 & 9 & 6 \\ 5 & 5 & 3 & 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

Les huit chemins de longueur 6 de 5 à 2 sont :

— $5 \to 5 \to 5 \to 5 \to 4 \to 1 \to 2$

— $5 \to 5 \to 5 \to 4 \to 1 \to 1 \to 2$

— $5 \to 5 \to 5 \to 4 \to 1 \to 3 \to 2$

— $5 \to 5 \to 4 \to 1 \to 1 \to 1 \to 2$

— $5 \to 5 \to 4 \to 1 \to 1 \to 3 \to 2$

— $5 \to 4 \to 1 \to 1 \to 1 \to 1 \to 2$

— $5 \to 4 \to 1 \to 1 \to 1 \to 3 \to 2$

— $5 \to 4 \to 6 \to 5 \to 4 \to 1 \to 2$

□

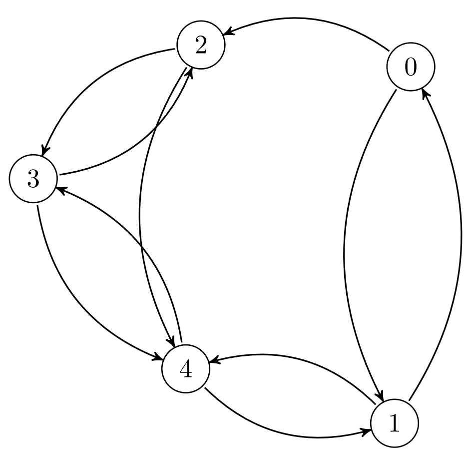
Exercice 2 Soit Γ le graphe dont la matrice d'adjacence est donnée par

$$M(\Gamma) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(i) Dessiner le graphe Γ

(ii) Combien y a-t-il de chemins de longueur 3 entre chaque couple (i, j) de sommets ?

Démonstration. (i)



(ii) $M^3 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Donc, il y a a_{ij} nombre de chemins de longueur 3 entre i et j en utilisant la matrice M^3.

□

Exercice 3 Donner les formes matricielles des systèmes d'équations linéaires suivants :

(i) $$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 9 \\ x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned}$$

(ii) $$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 5 \\ x_2 - x_4 &= 7 \end{aligned}$$

(iii) $$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 12 \\ x_1 &= 5 \end{aligned}$$

(iv) $$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 27 \\ 2x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 27x_4 - 3x_5 &= 12 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 19x_5 &= -11 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 3 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 &= 12 \end{aligned}$$

(v) $$\begin{aligned} 12x_1 &= 5 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Démonstration. (i) $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 9 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$

(ii) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 7 \end{array}\right]$

(iii) $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 12 \\ 1 & 0 & 5 \end{array}\right]$

(iv) $\left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & 1 & 27 \\ 2 & 7 & 9 & 27 & -3 & 12 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & -19 & -11 \\ -2 & 1 & -3 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right]$

(v) $\left[\begin{array}{c|c} 12 & 5 \\ 0 & 0 \end{array}\right]$

□

Exercice 4 (†) Pour chacune des matrices suivantes, indiquer si elle est réduite, réduite échelonnée.

(i) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 4 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 11 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9 \end{bmatrix}$

Démonstration.

Matrice	Réduite	Réduite Échelonnée
(i)	Non	Non
(ii)	Oui	Non
(iii)	Oui	Oui

□

Exercice 5 (†) Pour chacune des matrices suivantes, effectuer une série d'opérations élémentaires de ligne pour obtenir à la suite de celles-ci une matrice échelonnée réduite et de plus indiquer son rang. Il faut utiliser l'algorithme de Gauss-Jordan.

(i) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 8 & -4 \\ 3 & 3 & 2 & 12 & -1 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -4 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & -5 & 16 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 2 & -1 & 12 & -1 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

Démonstration. (i) le mré est $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ avec rang 3.

(ii) le mré est $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ avec rang 4.

(iii) le mré est $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ avec rang 4.

□

Exercice 6 Pour chacune des matrices suivantes, en utilisant l'algorithme de Gauss-Jordan, obtenir la matrice échelonnée réduite et indiquer son rang.

(i) $\begin{bmatrix} -9 & 1 & -19 \\ -5 & 6 & -4 \\ 5 & -1 & 10 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} -2 & 5 & 12 \\ -2 & 11 & 24 \\ 3 & -10 & -23 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -8 & 10 & -6 & -21 & 18 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & 4 & 10 & -8 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -3 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & 8 & -6 & 0 & 14 & -16 \\ 1 & -4 & -12 & 17 & -12 & -35 & 28 \end{bmatrix}$

Démonstration. (i) le mré est $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ avec rang 3.

(ii) le mré est $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ avec rang 2.

(iii) le mré est $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ avec rang 3.

□