Exercices 1 solutions

by Aram Dermenjian

5 septembre 2017

Un exercice marqué du symbole $\star$ est considéré comme plus difficile et ne sera pas une question d'examen. Un exercice marqué du symbole $\dagger$ est trouvé dans les notes du cours.

Exercice 1 Soit la matrice suivante :

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & x & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(i) Donner le format de A.

(ii) Donner les valeurs de : a_{12}, a_{31}, a_{23}.

Démonstration. (i) A a un format de 3×4

(ii) $a_{12} = 2$, $a_{31} = 0$, et $a_{23} = x$.

□

Exercice 2 Écrire les matrices de format 5×5 où les entrées sont données par :

(i) $a_{ij} = i + j$

(ii) $b_{ij} = ij$

(iii) $c_{ij} = i - j$

(iv) $d_{ij} = i^j$

(v) $e_{ij} =$ppcm(i, j)

(vi) $f_{ij} = (1/4)(3i + j)$

(vii) $g_{ij} = \max\{i, j\}$

Démonstration. (i) $$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

(ii) $$B = [b_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25 \end{bmatrix}$$

(iii) $$C = [c_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(iv) $$D = [d_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 & 32 \\ 3 & 9 & 27 & 81 & 243 \\ 4 & 16 & 64 & 256 & 1024 \\ 5 & 25 & 125 & 625 & 3125 \end{bmatrix}$$

(v) $E = [e_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 6 & 4 & 10 \\ 3 & 6 & 3 & 12 & 15 \\ 4 & 4 & 12 & 4 & 20 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 5 \end{bmatrix}$

(vi) $F = [f_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{4} & \frac{3}{2} & \frac{7}{4} & 2 \\ \frac{7}{4} & 2 & \frac{9}{4} & \frac{5}{2} & \frac{11}{4} \\ \frac{5}{2} & \frac{11}{4} & 3 & \frac{13}{4} & \frac{7}{2} \\ \frac{13}{4} & \frac{7}{2} & \frac{15}{4} & 4 & \frac{17}{4} \\ 4 & \frac{17}{4} & \frac{9}{2} & \frac{19}{4} & 5 \end{bmatrix}$

(vii) $G = [g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$

$\square$

Exercice 3 Est-ce que les égalités suivantes vraies ou fausses ?

(i) $0_{2\times 2} = 0_{3\times 3}$

(ii) $\begin{bmatrix}(0-0) & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(0-0) & (0-0)\end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix}(1-1) & (x-x) \\ (\alpha-\alpha) & (3-3)\end{bmatrix} = 0_{2\times 2}$

Démonstration. (i) Non

(ii) Oui

(iii) Oui

$\square$

Exercice 4 Soit les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & -2 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Déterminer la matrice X telle que $2B + X = 3A$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} X &= 3A - 2B \\ &= 3\begin{bmatrix} 6 & 5 & -2 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 18 & 15 & -6 \\ 9 & 21 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 \\ -2 & -4 & 8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 14 & 15 & -12 \\ 11 & 25 & -5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\square$

Exercice 5 Démontrer la proposition 1.1.

Démonstration. (i) Il faut montrer que $A + B = B + A$:

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] = [b_{ij} + a_{ij}] = [b_{ij}] + [a_{ij}] = B + A$$

(ii) Il faut montrer que $(A+B)+C = A+(B+C)$:

$$\begin{aligned}(A+B)+C &= ([a_{ij}]+[b_{ij}])+[c_{ij}] = [(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}] = [a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})] \\ &= [a_{ij}]+([b_{ij}]+[c_{ij}]) = A+(B+C)\end{aligned}$$

(iii) Il faut montrer que $A+0_{m\times n} = 0_{m\times n}+A = A$. Faissons $A+0_{m\times n} = A$.

$$A+0_{m\times n} = [a_{ij}]+[0_{ij}] = [a_{ij}+0_{ij}] = [a_{ij}] = A$$

L'autre égalité est similaire.

(iv) Il faut montrer que $A+(-A) = 0_{m\times n}$.

$$A+(-A) = [a_{ij}]+(-[a_{ij}]) = [a_{ij}]+[-a_{ij}] = [a_{ij}-a_{ij}] = [0_{ij}] = 0_{m\times n}$$

(v) Il faut montrer que $1A = A$:

$$1A = 1[a_{ij}] = [1\cdot a_{ij}] = [a_{ij}] = A$$

(vi) Il faut montrer que $(\alpha+\beta)A = \alpha A+\beta A$:

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)A &= (\alpha+\beta)[a_{ij}] = [(\alpha+\beta)a_{ij}] = [\alpha a_{ij}+\beta a_{ij}] = [\alpha a_{ij}]+[\beta a_{ij}] \\ &= \alpha[a_{ij}]+\beta[a_{ij}] = \alpha A+\beta A\end{aligned}$$

(vii) Il faut montrer que $\alpha(A+B) = \alpha A+\alpha B$:

$$\begin{aligned}\alpha(A+B) &= \alpha([a_{ij}]+[b_{ij}]) = \alpha[a_{ij}+b_{ij}] = [\alpha(a_{ij}+b_{ij})] = [\alpha a_{ij}+\alpha b_{ij}] \\ &= [\alpha a_{ij}]+[\alpha b_{ij}] = \alpha[a_{ij}]+\alpha[b_{ij}] = \alpha A+\alpha B\end{aligned}$$

(viii) Il faut montrer que $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$:

$$\begin{aligned}\alpha(\beta A) &= \alpha(\beta[a_{ij}]) = \alpha[\beta a_{ij}] = [\alpha(\beta a_{ij})] = [(\alpha\beta)a_{ij}] \\ &= (\alpha\beta)[a_{ij}] = (\alpha\beta)A\end{aligned}$$

$\square$

Exercice 6 (†) Soit les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -5 & 1 & 4 & -2 \\ 7 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & 0 \\ 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & -5 \\ 10 & 8 & -9 \end{bmatrix}$$

Indiquer si chacune des opérations suivantes est bien définie et effectuer ce calcul dans le cas où l'opération est bien définie :

(i) BAC

(ii) B^2A

(iii) $(BC)^2$

(iv) B^2C^2

(v) $A(B+3C)$

(vi) $(B+3C)A$

(vii) $A^T(B+5C^T)$

(viii) $A+A^T$

Démonstration. (i) Pas bien définie (problème quand on fait la multiplication avec C).

(ii) $\begin{bmatrix} 386 & 111 & -190 & 51 \\ -189 & 9 & 32 & 10 \\ 575 & 38 & -142 & -7 \end{bmatrix}$

(iii) $(BC)^2 = BCBC = \begin{bmatrix} 868 & 3696 & -3320 \\ -1464 & -286 & 565 \\ 4476 & 358 & -1289 \end{bmatrix}$

(iv) $B^2C^2 = BBCC = \begin{bmatrix} 1898 & -950 & 410 \\ 64 & 782 & -805 \\ 634 & -2196 & 2031 \end{bmatrix}$

(v) Pas bien définie (problème quand on fait la multiplication avec A)

(vi)

$$\begin{aligned}
(B+3C)A &= \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & 0 \\ 10 & -6 & 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & -5 \\ 10 & 8 & -9 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -5 & 1 & 4 & -2 \\ 7 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & 0 \\ 10 & -6 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15 & -3 & 0 \\ 6 & 18 & -15 \\ 30 & 24 & -27 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -5 & 1 & 4 & -2 \\ 7 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 17 & -4 & 5 \\ 2 & 19 & -15 \\ 40 & 18 & -26 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -5 & 1 & 4 & -2 \\ 7 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 89 & 37 & -33 & 3 \\ -196 & 55 & 74 & -23 \\ -192 & 190 & 32 & -10 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(vii)

$$\begin{aligned}
A^T(B+5C^T) &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -5 & 1 & 4 & -2 \\ 7 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & 0 \\ 10 & -6 & 1 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & -5 \\ 10 & 8 & -9 \end{bmatrix}^T \right) \\
&= \begin{bmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & 0 \\ 10 & -6 & 1 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 5 & 2 & 10 \\ -1 & 6 & 8 \\ 0 & -5 & -9 \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & 0 \\ 10 & -6 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 25 & 10 & 50 \\ -5 & 30 & 40 \\ 0 & -25 & -45 \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 27 & 9 & 55 \\ -9 & 31 & 40 \\ 10 & -31 & -44 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 169 & -354 & -398 \\ 52 & 120 & 293 \\ -63 & 115 & 105 \\ 8 & -31 & -36 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(viii) Pas bien définie.

□

Exercice 7 Faire les multiplications suivantes :

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

(iii) $(I_3) \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(v) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$

(vi) $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \\ -q & p \end{bmatrix}$

Démonstration. (i) $\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} -4 & -8 & -12 & -16 \\ -3 & -6 & -9 & -12 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(v) $\begin{bmatrix} ax+bz & bw+ay \\ cx+dz & dw+cy \end{bmatrix}$

(vi) $\begin{bmatrix} ap-bq & bp+aq \\ -bp-aq & ap-bq \end{bmatrix}$

□

Exercice 8 Soit les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Vérifier que $AB = BA = 0$, $AC = A$, et $CA = C$.

Exercice 9 Soit la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculer A^2 et vérifier que $A^2A = AA^2 = I_3$.

Démonstration.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

□

Exercice 10 Démontrer la proposition 1.2.

Démonstration. (i) Il faut montrer que $(AB)C = A(BC)$:

$$\begin{aligned}
(AB)C &= ([a_{ij}]\,[b_{ij}])\,[c_{ij}] \\
&= \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right][c_{ij}] \\
&= \left[\sum_{\ell=1}^{m}(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{k\ell})c_{\ell j}\right] \\
&= \left[\sum_{\ell=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}((a_{ik}b_{k\ell})c_{\ell j})\right] \\
&= \left[\sum_{\ell=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}(b_{k\ell}c_{\ell j}))\right] \\
&= \left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{m}(a_{ik}(b_{k\ell}c_{\ell j}))\right] \\
&= \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(\sum_{\ell=1}^{m} b_{k\ell}c_{\ell j}\right)\right] \\
&= [a_{ij}]\left[\sum_{\ell=1}^{m} b_{i\ell}c_{\ell j}\right] \\
&= [a_{ij}]\,([b_{ij}]\,[c_{ij}]) = A(BC)
\end{aligned}$$

(ii) Il faut montrer que $AI_n = I_mA = A$. Faissons $AI_n = A$:

$$AI_n = [a_{ij}]\,[b_{ij}] = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right]$$

Notons que $b_{kj} = 0$ sauf quand $k = j$. Donc

$$\left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right] = [a_{ij}] = A$$

(iii) Il faut montrer que $A0_{n\times r} = 0_{m\times r}$ et que $0_{s\times m}A = 0_{s\times n}$. Faissons $A0_{n\times r} = 0_{m\times r}$:

$$A0_{n\times r} = [a_{ij}]\,[0_{ij}] = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}0_{kj}\right] = [0_{ij}] = 0_{m\times r}.$$

On a que le format est $m \times r$ car A est de format $m \times n$ et $0_{n\times r}$ est de format $n \times r$. Alors le produit aura un format de $m \times r$.

(iv) Il faut montrer que $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

$$\begin{aligned}\alpha(AB) = \alpha([a_{ij}]\,[b_{ij}]) = \alpha\left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right] = \left[\alpha\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right] = \left[\sum_{k=1}^{n} \alpha a_{ik}b_{kj}\right] \\ = [\alpha a_{ij}]\,[b_{ij}] = (\alpha\,[a_{ij}])\,[b_{ij}] = (\alpha A)B\end{aligned}$$

(v) Il faut montrer que $A(B+B') = AB + AB'$ et $(B+B')C = BC + B'C$. Faissons $A(B+B') = AB + AB'$:

$$\begin{aligned}A(B+B') = [a_{ij}]\,([b_{ij}] + [b'_{ij}]) = [a_{ij}]\,[b_{ij} + b'_{ij}] &= \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj} + b'_{kj})\right] \\ &= \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + a_{ik}b'_{kj}\right] = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b'_{kj}\right] \\ &= \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right] + \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b'_{kj}\right] \\ &= [a_{ij}]\,[b_{ij}] + [a_{ij}]\,[b'_{ij}] = AB + AB'\end{aligned}$$

□

Exercice 11 (†) Soit la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculer chacune des matrices suivantes : (a) A^2, (b) A^3, (c) A^4, (d) A^{100}, (e)* $(I_4 + A)^8$.

Démonstration. (a) $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $A^{100} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(e) $(I_4 + A)^8 = \begin{bmatrix} 1 & 16 & 112 & 448 \\ 0 & 1 & 16 & 112 \\ 0 & 0 & 1 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

□

Exercice 12 Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Montrer que $A^2 - 5A - 2A^0 = 0_{2\times 2}$ et que $A^3 - 27A - 10A^0 = 0_{2\times 2}$.

Démonstration. On peut voir que $A^2 = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}$ et alors $A^3 = \begin{bmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{bmatrix}$. Alors on voit que

$$\begin{aligned} A^2 - 5A - 2A^0 &= \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} A^3 - 27A - 10A^0 &= \begin{bmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{bmatrix} - 27\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - 10\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 27 & 54 \\ 81 & 108 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

□

Exercice 13 Soit $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Calculer $3(A - I_2)(A - 2I_2)$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} 3(A - I_2)(A - 2I_2) &= 3\left(\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= 3\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

□

Exercice 14 Soit une matrice A de format $m \times (m+5)$ et B de format $n \times (11-n)$. Supposons que AB et BA sont bien définies. Quels sont les valeurs de n et m ?

Démonstration. Parce que AB est bien définie, on sait que $(m+5) = n$. Parce que BA est bien définie, on sait que $m = 11 - n$. Alors on a que $m = 11 - (m+5)$, d'où $2m = 6$ et $m = 3$. Et finalement $n = 8$. □

Exercice 15 (†) Soit une matrice A.

(i) Vérifier que la matrice $A^T A$ est une matrice symétrique.

(ii) Dans le cas où A est une matrice de format 2×2, calculer $A^T A$.

Démonstration. (i) Si $A = [a_{ij}]$, par définition $A^T = [b_{ij}] = [a_{ji}]$. Par notre formule $A^TA = [c_{ij}]$ où $c_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik}a_{kj}$. Il faut montrer que $c_{ij} = c_{ji}$.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik}a_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ki}a_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{kj}a_{ki} = \sum_{k=1}^n b_{jk}a_{ki} = c_{ji}$$

(ii) Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ on a $A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$. Alors

$$\begin{aligned} A^TA &= \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

qui est symétrique.

□

Exercice 16 Soit les matrices de Ex 2. Lequelles sont symétriques ? Antisymétriques ?

Démonstration.

Matrice	symétrique	antisymétrique
A	oui	non
B	oui	non
C	non	oui
D	non	non
E	oui	non
F	non	non
G	oui	non

□

Exercice 17 Soit une matrice carrée A, montrer que $A + A^T$ est symétrique.

Démonstration. Soit $A = [a_{ij}]$. Prennons $A + A^T = [b_{ij}]$. Il faut montrer que $b_{ij} = b_{ji}$. On a que $b_{ij} = a_{ij} + a_{ji} = a_{ji} + a_{ij} = b_{ji}$. □

Exercice 18 Montrer que si A est symétrique ou antisymétrique alors $AA^T = A^TA$ et A^2 est symétrique

Démonstration. Soit A symétrique ou antrisymétrique. Alors $A = \pm A^T$. D'où $AA^T = A(\pm A) = (\pm A)A = A^TA$.

Aussi, prennons $A^2 = [b_{ij}]$. Il faut montrer que $b_{ij} = b_{ji}$. Car $A = \pm A^T$ on a que $a_{ij} = \pm a_{ji}$ pour tout i, j.

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}a_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{kj}a_{ik} = \sum_{k=1}^n (\pm a_{jk})(\pm a_{ki}) = \sum_{k=1}^n a_{jk}a_{ki} = b_{ji}$$

□

Exercice 19 ($\star$) Montrer la proposition 1.3.d :

$$(AB)^T = B^TA^T$$

Démonstration. Soit $A = [a_{ij}]$ et $B = [b_{ij}]$. On note $A^T = [a^T_{ij}] = [a_{ji}]$ et $B^T = [b^T_{ij}] = [b_{ji}]$. On a que $AB = [c_{ij}] = [\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}]$. Alors, les entrées de $(AB)^T$ sont $c_{ji} = \sum_{k=1}^n a_{jk}b_{ki}$. Donc $(AB)^T = [\sum_{k=1}^n a_{jk}b_{ki}]$.

Par contre une entrée de B^TA^T est d_{ij} tel que $d_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik}^T a_{kj}^T$. Car $b_{ik}^T = b_{ki}$ et $a_{kj}^T = a_{jk}$ on a que $d_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ki}a_{jk}$. Ensuite $b_{ki}a_{jk} = a_{jk}b_{ki}$ implique que

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ki}a_{jk} = \sum_{k=1}^n a_{jk}b_{ki} = c_{ij}.$$

Donc, $(AB)^T = B^TA^T$. □

Exercice 20 ($\star$) Montrez que si $\alpha A = 0_{m\times n}$ alors soit $\alpha = 0$ ou $A = 0_{m\times n}$.

Démonstration. Supposons que $\alpha A = 0_{m\times n}$. Alors $\alpha A = [\alpha a_{ij}] = [0]$. Donc, $\alpha a_{ij} = 0$ pour tout i, j.

Alors on a que soit $\alpha = 0$ ou soit $a_{ij} = 0$. Si $\alpha = 0$ on est finit. Si $\alpha \neq 0$ ça force que tout $a_{ij} = 0$ pour tout i, j. Donc $A = 0_{m\times n}$. □

Exercice 21 ($\star$) Soit deux matrices diagonales A et B de même ordre. Montrer que $AB = BA$.

Démonstration. Tout à bord, il faut voir que, car A et B sont diagonales, $a_{ij} = b_{ij} = 0$ quand $i \neq j$. Rappelons que $AB = [\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}]$. Or $a_{ik} = 0$ si $i \neq k$ et $b_{kj} = 0$ si $k \neq j$ on a des valeurs non nulles seuelement si $i = k$ et $k = j$. Donc on peut changers les indices sans changer les valeurs $[\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}] = [\sum_{k=1}^n b_{ik}a_{kj}] = BA$. □

Exercice 22 ($\star$) Soit une matrice A et une matrice diagonale D avec des entrées non-negatives, montrer que $AD^p = D^pA$ si et seulement si $AD = DA$.

Démonstration. Soit

$$A = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1j} & \cdots & m_{1a} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2j} & \cdots & m_{2a} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ m_{i1} & m_{i2} & \cdots & m_{ij} & \cdots & m_{ia} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nj} & \cdots & m_{na} \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

Si $AD = DA$ alors $AD^p = DAD^{p-1} = \cdots = D^{p-1}AD = D^pA$.

Si $AD^p = D^pA$ on a que

$$AD^p = \begin{bmatrix} a_{11}d_1^p & a_{12}d_2^p & a_{13}d_3^p & \cdots & a_{1n}d_n^p \\ a_{21}d_1^p & a_{22}d_2^p & a_{23}d_3^p & \cdots & a_{2n}d_n^p \\ a_{31}d_1^p & a_{32}d_2^p & a_{33}d_3^p & \cdots & a_{3n}d_n^p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}d_1^p & a_{m2}d_2^p & a_{m3}d_3^p & \cdots & a_{mn}d_n^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}d_1^p & a_{12}d_1^p & a_{13}d_1^p & \cdots & a_{1n}d_1^p \\ a_{21}d_2^p & a_{22}d_2^p & a_{23}d_2^p & \cdots & a_{2n}d_2^p \\ a_{31}d_3^p & a_{32}d_3^p & a_{33}d_3^p & \cdots & a_{3n}d_3^p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}d_m^p & a_{m2}d_m^p & a_{m3}d_m^p & \cdots & a_{mn}d_n^p \end{bmatrix} = D^pA$$

C'est facile à voir qu'on doit avoir $m = n$. Alors A et D sont des matrices carrées d'ordre n.

Ensuite, on peut voir que $a_{ij}d_i^p = a_{ij}d_j^p$ par notre éegalité. Alors soit $a_{ij} = a_{ji} = 0$ ou soit $d_i^p = d_j^p$ pour n'importe quel i et j. Car les d_i n'ont pas negatives, on a que, si $d_i^p = d_j^p$ alors $d_i = d_j$ en faissent le n-ième racine de chaque coté. Donc, $a_{ij}d_i = a_{ij}d_j$ pour tout i et j. Alors, $AD = DA$. □

Exercice 23 (†) Soit les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 7 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(i) Vérifier que la matrice A n'a pas d'inverse B à gauche.

(ii) Vérifier que la matrice C est un inverse à droite de A.

(iii) Vérifier que la matrice ci-dessous est aussi un inverse à droite de A pour tous les scalaires α, β, γ et δ :

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\gamma + \frac{1}{2}\delta - \frac{1}{2} \\ 3\alpha & 3\gamma + 1 \\ \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}$$

La matrice A a une infinité d'inverse à droite et aucun inverse à gauche.

Démonstration. (i) Supposons qu'il existe une telle matrice B. Alors $BA = I_4$. Soit $B = [b_{ij}]$.

$$\begin{aligned} BA &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \\ g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2a & a+b & -3b & -a \\ 2c & c+d & -3d & -c \\ 2e & e+f & -3f & -e \\ 2g & g+h & -3h & -g \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_4 \end{aligned}$$

Ensuite, on voit que $2a = 1$ et $-a = 0$ pour la première et la dernièrnier entrées. Alors a est à la fois 0 et 1. Ceci n'est pas possible, donc il n'existe pas un inverse à gauce.

(ii) C est un inverse à droite de A si et seuelement si $AC = I_2$. On a

$$AC = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 7 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Donc C est un inverse à droite de A.

(iii) On a

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\gamma + \frac{1}{2}\delta - \frac{1}{2} \\ 3\alpha & 3\gamma + 1 \\ \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Donc, la matrice est un inverse à droite de A.

□

Exercice 24 ($\star$) Montrer par induction que si A est une matrice carée et si $AB = \lambda B$ pour λ un scalaire et B une matrice, alors $A^p B = \lambda^p B$ pour tout entier positif p.

Démonstration. Soit A une matrice carrée tel que $AB = \lambda B$. Supposons que $p = 1$. Alors on a bien que $A^1 B = \lambda^1 B$. Ensuite, supposons que on a que $A^p B = \lambda^p B$ pour $p \geq 1$.

$$A^{p+1}B = A(\lambda^p B) = (\lambda^p A)B = \lambda^p(AB) = \lambda^p(\lambda B) = \lambda^{p+1}B$$

□

Exercice 25 Trouver l'inverse de la matrice :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Démonstration.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

□