Exercices 12

by Aram Dermenjian

5 décembre 2017

Un exercice marqué du symbole $\star$ est considéré comme plus difficile et ne sera pas une question d'examen. Un exercice marqué du symbole † est trouvé dans les notes du cours.

Exercice 1 (†) Considérons $V = \mathbb{R}^4_\ell$, la base $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{u_4}\}$ où

$$\overrightarrow{u_1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \overrightarrow{u_2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$
$$\overrightarrow{u_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } \overrightarrow{u_4} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

et la base standard $\mathcal{B}' = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4}\}$, où

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \overrightarrow{v_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\overrightarrow{v_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \overrightarrow{v_4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(i) Déterminer la matrice de passage ${}_{\mathcal{B}}[I]_{\mathcal{B}'}$ de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.

(ii) Déterminer la matrice de passage ${}_{\mathcal{B}'}[I]_{\mathcal{B}}$ de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

(iii) Vérifier que les deux matrice ${}_{\mathcal{B}}[I]_{\mathcal{B}'}$ et ${}_{\mathcal{B}'}[I]_{\mathcal{B}}$ sont l'inverse l'une de l'autre.

Démonstration. (i)

$${}_{\mathcal{B}}[I]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ \frac{4}{15} & -\frac{1}{10} & \frac{7}{30} & \frac{13}{30} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{15} & \frac{2}{5} & \frac{1}{15} & \frac{4}{15} \end{bmatrix}$$

(ii)

$${}_{\mathcal{B}'}[I]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

□

Exercice 2 (†) Considérons $V = \mathbb{R}^3_\ell$, la base $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$, où

$$\overrightarrow{u_1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{u_2} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{u_3} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

la base standard $\mathcal{B}' = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$, où

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{v_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{v_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et la base $\mathcal{B}'' = \{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_3}\}$, où

$$\overrightarrow{w_1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{w_2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{w_3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Vous pouvez prendre pour acquis qu'il s'agit bien de trois bases de $V = \mathbb{R}^3_\ell$.

(i) Déterminer la matrice de passage ${}_{\mathcal{B}'}[I]_{\mathcal{B}}$ de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

(ii) Déterminer la matrice de passage ${}_{\mathcal{B}''}[I]_{\mathcal{B}'}$ de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}''$.

(iii) Déterminer la matrice de passage ${}_{\mathcal{B}''}[I]_{\mathcal{B}}$ de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}''$.

(iv) Soit le vectuer $\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$. Déterminer les matrices de coordonnées $[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{B}}$, $[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{B}'}$ et $[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{B}''}$ de $\overrightarrow{u}$ par rapport aux bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ respectivement.

Démonstration. (i)

$$ {}_{\mathcal{B}'}[I]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} $$

(ii)

$$ {}_{\mathcal{B}''}[I]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} $$

(iii)

$$ {}_{\mathcal{B}''}[I]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} $$

(iv)

$$ [\overrightarrow{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix} \quad [\overrightarrow{u}]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad [\overrightarrow{u}]_{\mathcal{B}''} = \begin{bmatrix} 6 \\ -7 \\ -2 \end{bmatrix} $$

□

Exercice 3 (†) Indiquer pour chacune des fonctions suivantes s'il s'agit d'une transformation linéaire ou pas

(i) $T_1 : \mathbb{R}^3_\ell \to \mathbb{R}^2_\ell$ définie par

$$ T_1([x\ y\ z]) = [(3x - y + 2z)\ (x - y + z)] $$

(ii) $T_2 : \mathbb{R}^3_\ell \to \mathbb{R}^3_\ell$ définie par

$$ T_2([x\ y\ z]) = [(x + 2y + z^2)\ (2x + 3y + 1)\ (x - y)] $$

(iii) $T_3 : \mathbb{R}^2_\ell \to \mathbb{R}^3_\ell$ définie par

$$ T_3([x\ y]) = [(x + 2y)\ (x - 4y)\ (5x - y)] $$

Démonstration. (i) Oui

(ii) Non

(iii) Oui

□

Exercice 4 Soit la transofmration linéaire $T : \mathbb{R}^3_\ell \to \mathbb{R}^3_\ell$ définie par

$$ T([x\ y\ z]) = [(x - 2y + z)\ (3x - y + 2z)\ (x + y - z)] $$

et les bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$, et $\mathcal{B}''$ de l'exercice 2.

(i) Déterminer la matrice de la transformation linéaire ${}_{\mathcal{B}'}[T]_{\mathcal{B}}$ de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

(ii) Déterminer la matrice de la transformation linéaire ${}_{\mathcal{B}''}[T]_{\mathcal{B}'}$ de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}''$.

(iii) Déterminer la matrice de la transformation linéaire ${}_{\mathcal{B}''}[T]_{\mathcal{B}}$ de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}''$.

(iv) Soit le vecteur $\overrightarrow{u} = [3\ \ -1\ \ 4]$. Déterminer les matrices de coordonnées $[T(\overrightarrow{u})]_{\mathcal{B}'}$ et $[T(\overrightarrow{u})]_{\mathcal{B}''}$ de $\overrightarrow{u}$ par rapport aux bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ respectivement.

Démonstration. (i)

$$_{\mathcal{B}'}[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -4 & -5 & -3 \\ -6 & -4 & -7 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

(ii)

$$_{\mathcal{B}''}[T]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -5 \\ 2 & -8 & 7 \\ 3 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

(iii)

$$_{\mathcal{B}''}[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 12 & 15 & 12 \\ -17 & -23 & -16 \\ -11 & -12 & -11 \end{bmatrix}$$

(iv)

$$[T(\overrightarrow{u})]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 9 \\ 18 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad [T(\overrightarrow{u})]_{\mathcal{B}''} = \begin{bmatrix} -31 \\ 42 \\ 29 \end{bmatrix}$$

□