Exercices 11

by Aram Dermenjian

28 novembre 2017

Un exercice marqué du symbole $\star$ est considéré comme plus difficile et ne sera pas une question d'examen. Un exercice marqué du symbole † est trouvé dans les notes du cours.

Exercice 1 (†) Considérons $V = \mathbb{R}^4_\ell$ et $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4}\}$, où

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \overrightarrow{v_2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$
$$\overrightarrow{v_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } \overrightarrow{v_4} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(i) Vérifier que $\mathcal{B}$ est une base de V.

(ii) Déterminer la matrice des coordonnées du vecteur $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & {}_3 & x_4 \end{bmatrix}$ par rapport à la base $\mathcal{B}$.

Démonstration. La matrice des coordonnées est

$$\begin{bmatrix} \frac{-x_1}{15} + \frac{2x_2}{5} + \frac{x_3}{15} + \frac{4x_4}{15} \\ \frac{2x_1}{5} + \frac{x_2}{10} + \frac{x_3}{10} - \frac{x_4}{10} \\ \frac{4x_1}{15} - \frac{x_2}{10} + \frac{yx_3}{30} + \frac{13x_4}{30} \\ \frac{x_1}{5} - \frac{x_2}{5} - \frac{x_3}{5} + \frac{x_4}{5} \end{bmatrix}$$

□

Exercice 2 (†) Considérons $V = \mathbb{R}^4_\ell$ et le sous-espace linéaire

$$U = \{\alpha_1\overrightarrow{v_1} + \alpha_2\overrightarrow{v_2} + \alpha_3\overrightarrow{v_3} + \alpha_4\overrightarrow{v_4} \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}\}$$

où

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \overrightarrow{v_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix},$$
$$\overrightarrow{v_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } \overrightarrow{v_4} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

U est l'espace-ligne $\mathcal{L}(A)$ de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

(i) Déterminuer une base $\mathcal{B}$ de U et la dimension $\dim(U)$ de U en utilisant le fait que $U = \mathcal{L}(A)$.

(ii) Est-ce que le vecteur $\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ appartient au sous-espace U ? Si oui, alors déterminer la matrice des coordonnées $[\overrightarrow{v}]_\mathcal{B}$ du vecteur $\overrightarrow{v}$ par rapport à la base $\mathcal{B}$.

(iii) Est-ce que le vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ appartient au sous-espace U ? Si oui, alors déterminer la matrice des coordonnées $[\overrightarrow{u}]_\mathcal{B}$ du vecteur $\overrightarrow{u}$ par rapport à la base $\mathcal{B}$.

Démonstration. (i) On aura que

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Donc le base pour $U = \mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(A')$ est

$$\mathcal{B} = \{A.rref()[0,:], A.rref()[1,:], A.rref()[2,:]\}$$

De plus on a $\dim(U) = 3$.

(ii) Il faut que $2a + b + 5c - 3d = 0$. Donc non.

(iii) Oui. $[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

□

Exercice 3 (†) Considérons $V = \mathbb{R}^4_c$ et le sous-espace linéaire

$$U = \left\{ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4_c \mid AX = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

où

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Soit les vecteurs

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \overrightarrow{v_2} = \begin{bmatrix} 6 \\ -11 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \overrightarrow{v_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(i) Déterminer une base $\mathcal{B}$ de U et la dimension $\dim(U)$ de U en utilisant le fait que U est le noyau $\ker(A)$ de A.

(ii) Est-ce que le vecteur $\overrightarrow{v_1}$ appartient au sous-espace U ? Si oui, alors déterminer la matrice des coordonnées $[\overrightarrow{v_1}]_{\mathcal{B}}$ du vecteur $\overrightarrow{v_1}$ par rapport à la base $\mathcal{B}$.

(iii) Est-ce que le vecteur $\overrightarrow{v_2}$ appartient au sous-espace U ? Si oui, alors déterminer la matrice des coordonnées $[\overrightarrow{v_2}]_{\mathcal{B}}$ du vecteur $\overrightarrow{v_2}$ par rapport à la base $\mathcal{B}$.

(iv) Est-ce que le vecteur $\overrightarrow{v_3}$ appartient au sous-espace U ? Si oui, alors déterminer la matrice des coordonnées $[\overrightarrow{v_3}]_{\mathcal{B}}$ du vecteur $\overrightarrow{v_3}$ par rapport à la base $\mathcal{B}$.

Démonstration. (i) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$

(ii) Oui. $[\overrightarrow{v_1}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(iii) Oui. $[\overrightarrow{v_2}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 6 & -11 \end{bmatrix}$

(iv) Non.

□

Exercice 4 (†) Considérons les 5 points suivants du plan : $(1,1)$, $(-2,-7)$, $(3,8)$, $(5,14)$ et $(-3,10)$. Déterminer l'équation $y = \hat{a}x + \hat{b}$ de la droite des moindres carrés pour ce nuage de points.

Démonstration. $\frac{291}{224}x + \frac{233}{56}$ □