Exercices 10

by Aram Dermenjian

21 novembre 2017

Un exercice marqué du symbole $\star$ est considéré comme plus difficile et ne sera pas une question d'examen. Un exercice marqué du symbole † est trouvé dans les notes du cours.

Exercice 1 (†) Considérons $V = \mathbb{R}^4_\ell$ et les cinq vecteurs suivants

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \overrightarrow{v_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \overrightarrow{v_3} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\overrightarrow{v_4} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \text{ et } \overrightarrow{v_5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(i) Est-ce que le vecteur $\overrightarrow{v_4}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$?

(ii) Déterminer une équation de la forme $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0$ qui décrit tous les vecteurs qui sont des combinaisons linéaires des vecteurs $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$.

(iii) Est-ce que le vecteur $\overrightarrow{v_5}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$?

(iv) Est-ce que les 4 vecteurs $\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_3}$, $\overrightarrow{v_4}$ et $\overrightarrow{v_5}$ sont linéairement indépendants ou non ?

(v) Est-ce que $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4}, \overrightarrow{v_5}\}$ est une base de $\mathbb{R}^4_\ell$?

Démonstration. (i) Oui

(ii) $(-\frac{5}{4})x_1 + (\frac{3}{4})x_2 + (-\frac{3}{4})x_3 + x_4$

(iii) Non

(iv) Oui, ils sont linéairement indépendants

(v) Oui

□

Exercice 2 (†) Considérons $V = \mathbb{R}^4_c$ et les quatres vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \overrightarrow{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \overrightarrow{v_3} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \overrightarrow{v_4} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Est-ce que ces quatre vecteurs sont linéairement indépendants ou pas ?

Démonstration. Oui, ils sont linéairement indépendants. □

Exercice 3 Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^4_\ell$ sont-ils des sous-espaces ?

(i) $U = \{[x_1\ x_2\ x_3\ x_4] \in \mathbb{R}^4_\ell \mid x_1 \geq 0\}$.

(ii) $U = \{[x_1\ x_2\ x_3\ x_4] \in \mathbb{R}^4_\ell \mid x_3 = 2x_1 - x_2\}$.

(iii) $U = \{[x_1\ x_2\ x_3\ x_4] \in \mathbb{R}^4_\ell \mid x_2x_4 = 0\}$.

(iv) $U = \{[x_1\ x_2\ x_3\ x_4] \in \mathbb{R}^4_\ell \mid x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1\}$.

(v) $U = \{[x_1\ x_2\ x_3\ x_4] \in \mathbb{R}^4_\ell \mid x_1^2 = x_3 = x_4\}$

Démonstration. (i) Non

(ii) Oui

(iii) Non

(iv) Non

(v) Non

□

Exercice 4 ($\star$) Soit U_1 et U_2 deux sous-espaces de V. Montrer que

$$U_1 + U_2 = \{\overrightarrow{v} \in V \mid \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2},\ \overrightarrow{u_1} \in U_1 \text{ et } \overrightarrow{u_2} \in U_2\}$$

est un sous-espace de V.

Démonstration. Car $\overrightarrow{0}$ est dans U_1 et U_2, $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0}$ nous donne que $\overrightarrow{0}$ est dans $U_1 + U_2$.

Si $v, v' \in U_1 + U_2$, donc

$$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v'} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{u_1'} + \overrightarrow{u_2'} = (\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_1'}) + (\overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{u_2'})$$

Donc $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v'} \in U_1 + U_2$.

Finalement, si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $v \in U_1 + U_2$ on a

$$\alpha\overrightarrow{v} = \alpha(\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}) = \alpha\overrightarrow{u_1} + \alpha\overrightarrow{u_2}$$

Car $\alpha\overrightarrow{u_1} \in U_1$ et $\alpha\overrightarrow{u_2} \in U_2$ on a que $\alpha\overrightarrow{v} \in U_1 + U_2$. □

Exercice 5 Soit l'espace $V = \mathbb{R}^4_\ell$ et la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Donner le noyau $\ker(A)$ de A.

Démonstration.

$$\ker(A) = \left\{\alpha \begin{bmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}$$

□

Exercice 6 Soit les quatres vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \overrightarrow{v_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \overrightarrow{v_3} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \overrightarrow{v_4} = \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Noter par U le sous-espace de $\mathbb{R}^4_\ell$ qui contient toutes les combinaisons linéaires de ce 4 vecteurs. Construire une forme explicite de U.

Démonstration.

$$U = \left\{\alpha \begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix} \mid \frac{1}{2}a + \frac{13}{2}b + 6c + d = 0\right\}$$

□