9. Semaine 9 : 26 novembre 2018

9.1. **Partie 1.**

9.1.1. *Rappel.*

9.1.2. *Équations différentielles (§4 ou §2.3).* Une équation à plusieurs variables dans laquelle il y a une relation entre une fonction inconnue et une ou plusieurs de ses dérivées, ou une relation des différentielles est appelée une *équation* ____________________.

Exemples 9.1 Des exemples :

(1) $\frac{dy}{dx} = 1$
(2) $V\frac{dP}{dt} = nr$
(3) $y'' + 2y' - 3 = x'$
(4) $y^2 + \frac{dy}{dt} = t^3$
(5) $\frac{dQ}{du} = kQ$ (k une constante)

Une équation différentielle est _______________ si il y a au plus deux variables, ainsi que des dérivées d'ordre supérieur ou égal à 1 d'une des variables par rapport à l'autre. Quels exemples en haut sont ordinaires ?

(1) _____
(2) ______
(3) _____

(4) ______

(5) ______

____________ d'une équation différentielle est le plus élevé des ordres des dérivées contenues.

(1) __

(2) __

(3) __

(4) __

(5) __

Une ______________ d'une équation différentielle est une fonction qui ne contient aucune dérivée et aucune différentielle, et qui satisfait cette équation.

Exemple 9.2 La fonction $y = 2x^2 + \sin(x)$ est une solution de $\frac{d^2y}{2\,dx^2} - x^2 = 2 - \frac{y}{2}$

Exemple 9.3 La fonction $y = 1 - x$ est une solution de $7y'' + y' + y + x = 0$.

Une équation différentielle est *à variables* _________________ si on peut l'écrire sous la forme

Exemple 9.4 Lesquelles sont à variables séparables ?

$\frac{dy}{dx} = \sin(x)\cos(y)$ ______ $\frac{dy}{dx} = \sin(xy)$ _______ $\frac{dy}{dx} = e^{2x+3y}$ ______ $\frac{dy}{dx} = x^y$ _______

Et pourquoi on veut avoir une équation différentielle à variables séparables ? Car dans ce cas, c'est facile de trouver une solution !

Exemple 9.5 Faisons $\frac{dy}{dx} = \sin(x)\cos(y)$. Ça nous donne : $\sec(y)\,dy = \sin(x)\,dx$. On va utiliser l'intégration !

$$\int \sec(y)\,dy = \int \sin(x)\,dx$$

$$\ln(|\sec(y) + \tan(y)|) + c_y = -\cos(x) + c_x$$

$$\ln\left(|\sec(y) + \tan(y)|\right) = -\cos(x) - C$$

Donc, on a une solution générale pour notre équation différentielle.

Une solution est appelée ______________ si on peux mettre la solution sous la forme $F(x, y, C) = 0$. Notre exemple a comme solution implicite :

$$\ln(|\sec(y) + \tan(y)|) + \cos(x) + C = 0$$

Une solution est appelée ______________ si on peux mettre la solution sous la forme $y = f(x, C)$. On peut trouver une solution explicite par rapport à x facilement pour notre exemple :

$$x = \arccos(-\ln(|\sec(y) + \tan(y)|) + C)$$

Par contre, par rapport à y, il n'y a pas de solution explicite.

Exemple 9.6 Faisons un autre exemple : $\frac{dy}{dx} = e^{2x+3y}$. On a ____________________________. Alors

$$\int e^{-3y}\,dy = \int e^{2x}\,dx$$

$$\rule{4cm}{0.4pt} = \rule{3.5cm}{0.4pt}$$

$$e^{-3y} = \rule{4cm}{0.4pt}$$

$$y = \rule{7cm}{0.4pt}$$

On voit que cet exemple a une solution explicite.

Une ____________________________ est une condition imposée pour les valeurs de x ou y. Par exemple, on peut imposer que $y = 0$ lorsque $x = 1$. Ça nous aide à trouver nos constantes C et en même temps nous donne une solution ______________.

Pour trouver une solution particulière il nous faut n conditions initiales où n est l'ordre de l'équation différentielle.

Exemple 9.7 Soit l'équation différentielle $2y''' = 3x + 6$, trouvez une solution particulière.

Pour trouver une solution particulière, il nous faut __ conditions initiales. Donc, disons qu'on a

comme solutions à notre équation differentielle.

Commençons par trouver une solution implicite.

$$\begin{aligned}
2y''' &= 2\frac{d(y'')}{dx} = 3x + 6 \\
\int 2d(y'') &= \int 3x + 6\,dx \\
2y'' &= \underline{\hspace{6cm}} \\
\int 2d(y') &= \int \frac{3}{2}x^2 + 6x + C_1\,dx \\
2y' &= \underline{\hspace{9cm}} \\
\int 2\,dy &= \int \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 + C_1x + C_2\,dx \\
2y &= \underline{\hspace{11cm}}
\end{aligned}$$

Avec nos conditions initiales on a :

$$\begin{aligned}
y = 0,\ x = 0 &\Rightarrow \underline{\hspace{3cm}} \\
y = 1,\ x = 1 &\Rightarrow \underline{\hspace{10cm}} \\
y = 0,\ x = -1 &\Rightarrow \underline{\hspace{9cm}}
\end{aligned}$$

Donc, notre solution particulière est :

9.1.3. *Suites (§6.2 ou §6.1).* Une ________ est une séquences des nombres.

Exemple 9.8 (1) $\{1, 1, 1, 1, 1, \ldots\}$

(2) $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

(3) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\}$

(4) $\{1, 2, 6, 24, 120, \ldots\}$

(5) $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots\}$

(6) $\{1, 1, 2, 5, 14, 42, \ldots\}$

(7) ____________________________

Plus précisement, une *suite* est ____
On a deux façons d'écrire une suite donnée :

$$\{a_1, a_2, a_3, \ldots\} \qquad f(n) = a_n$$

Si notre suite est donné par une fonction explicite, le terme _____ est appellé un *terme* ____________ de la suite. Ça nous permet d'utiliser la notation : $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ou $\{a_n\}$ pour désigner la suite.

Exemple 9.9 (1) $\{1, 1, 1, 1, 1, \ldots\} = \{1\}$

(2) $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\} = \{i\}$

(3) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\} =$ ____________

(4) $\{1, 2, 6, 24, 120, \ldots\} =$ _______

(5) $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots\} = \left\{\frac{\varphi^n-(1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}\right\}$ où $\varphi = 1.61803398874989\ldots$.

(6) $\{1, 1, 2, 5, 14, 42, \ldots\} = \left\{\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}\right\}$

(7) __________________________

Exemple 9.10 C'est quoi le terme général de la suite $\left\{\frac{1}{3}, \frac{-1}{6}, \frac{1}{11}, \frac{-1}{18}, \frac{1}{27}, \ldots\right\}$?

9.2. **Partie 2.** On peut aussi définir une suite en utilisant les termes précédants. Une suite est *définie par* __________________ si la valeur des premiers termes est donnée et que le terme général est défini en fonction des termes précédents.

Exemple 9.11 (1) $\{1, 1, 1, 1, 1, \ldots\}$: $a_1 = 1$ et $a_n = a_{n-1}$.

(2) $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$: $a_1 = 1$ et $a_n = a_{n-1} + 1$.

(3) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\}$: $a_1 = \frac{1}{2}$ et $a_n = \frac{n-1}{n} a_{n-1}$.

(4) $\{1, 2, 6, 24, 120, \ldots\}$: $a_1 =$ __ et $a_n =$ __________.

(5) $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots\}$: $a_1 =$ __ et $a_n =$ _____________________.

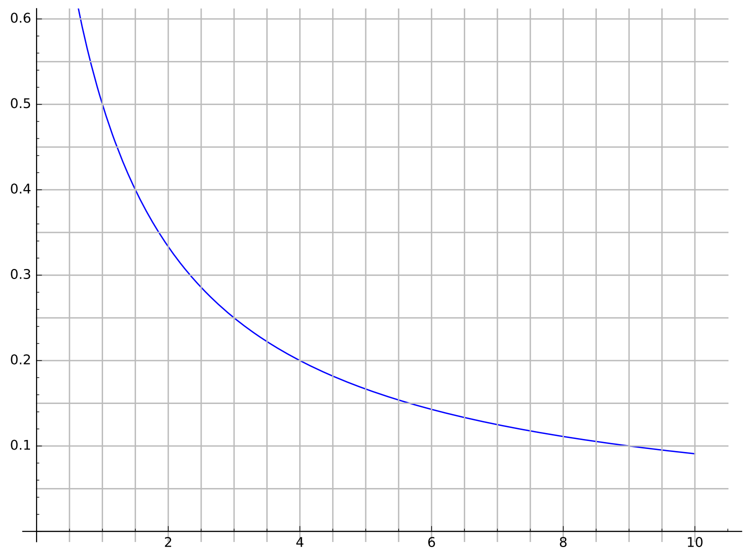
(6) $\{1, 1, 2, 5, 14, 42, \ldots\}$: $a_1 = 1$ et $a_n = \frac{2(2n-1)}{n+1} a_{n-1}$.

(7) __________________________

Donc, on peut voir que, des fois, la définition récursive est plus simple que la définition explicite.

On peut voir les suites commes des graphes.

Exemple 9.12 $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$:



Une suite est *croissante* si $a_n \geq a_{n-1}$ et ____________________ *croissante* si $a_n > a_{n-1}$ pour tout n. De la même façon, une suite est *décroissante* si $a_n \leq a_{n-1}$ et ____________________ *décroissante* si $a_n < a_{n-1}$ pour tout n. Une suite est *monotone* si elle est croissante ou décroissante.

Une suite $\{a_n\}$ est *bornée* ___________________________ s'il existe un nombre réel B t.q $a_n \leq B$ pour tout n. De la même façon, une suite est *bornée* ___________________________ s'il existe un nombre réel b t.q. $a_n \geq b$ pour tout n. Une suite est *bornée* si elle est bornée supérieurement ou bornée inférieurement.

		Bornée sup ?	Bornée inf ?	Monotone ? (si oui, lequelle ?)
$\{\frac{1}{n}\}$	$\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$	1	0	décroissante
$\{(-1)^n\}$	$\{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$	__	_____	______
$\{n\}$	$\{1, 2, 3, 4\}$	__	__	_____
$\{(-1)^n n\}$	$\{-1, 2, -3, 4\}$	__	__	______

Théorème 9.13 *Soit une suite $\{a_n\}$ et une fonction f telles que $f(n) = a_n$ et $f(x)$ est continue. Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ où $L \in \mathbb{R} \cup \pm\infty$ alors $\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} a_n = L$.*

Si $L \in \mathbb{R}$ on dit que la suite $\{a_n\}$ *converge* vers L et que la suite est *convergente*. Si $L \in \pm\infty$ ou L n'existe pas on dit que la suite *diverge* ou que la suite est *divergente*.

Théorème 9.14 *Soit une suite $\{a_n\}$.*

— *Si $\{a_n\}$ converge alors elle est* ___________.

— *Si* $\{a_n\}$ *n'est pas bornée alors elle diverge.*

— *Si* $\{a_n\}$ *est monotone, alors elle converge si et seulement si elle est bornée.*

— $\{a_n\}$ *converge vers* 0 *si et seulement si* $\{|a_n|\}$ *converge vers* 0*.*

Théorème 9.15 *Soit une suite* $\{a_n\}$ *qui converge vers* L_1 *et une suite* $\{b_n\}$ *qui converge vers* L_2 *et* $C \in \mathbb{R}$*. Alors*

— $\{C\}$ *converge vers* C*.*

— $\{a_n \pm b_n\}$ *converge vers* $L_1 \pm L_2$*.*

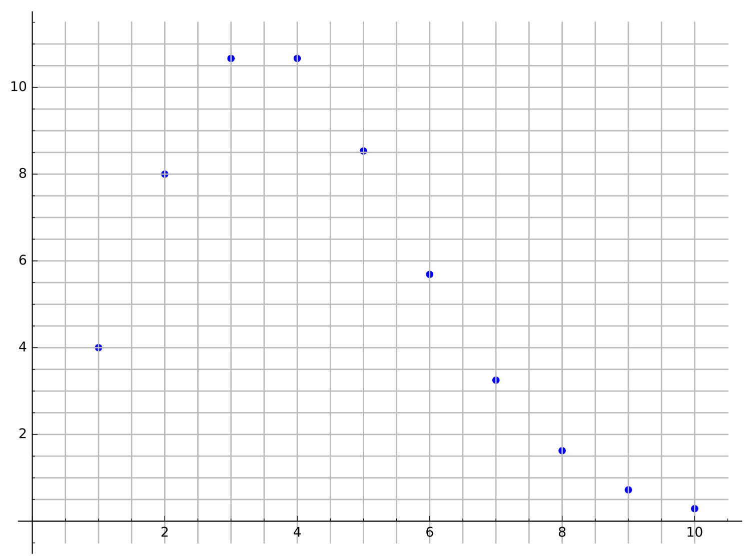
— $\{Ca_n\}$ *converge vers* CL_1*.*

— $\{a_n b_n\}$ *converge vers* $L_1 L_2$*.*

— $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ *converge vers* $\frac{L_1}{L_2}$*.*

Théorème 9.16 (Théorème du sandwich) *Soit les suites* $\{a_n\}$*,* $\{b_n\}$ *et* $\{c_n\}$ *telles que* $a_n \leq c_n \leq b_n$ *pour tout* $n \geq m$ *pour* $m \in \mathbb{N}$*. Alors si* $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ *et* $\lim_{n\to\infty} b_n = L$ *alors* $\lim_{n\to\infty} c_n = L$*.*

Exemple 9.17 Soit $\{a_n\} = \left\{\frac{4^n}{n!}\right\} = \left\{4, 8, \frac{32}{3}, \frac{32}{3}, \frac{128}{15}, \frac{256}{45}, \frac{1024}{315}\right\}$.



Déjà on peut voir qu'elle va converger vers 0. Alors, il nous faut trouver une autre suite qui va faire un sandwich.

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{4^n}{n!} \\
&= \frac{4}{n} \cdot \frac{4}{n-1} \cdot \frac{4}{n-2} \cdot \ldots \cdot \frac{4}{4} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{4}{1} \\
&\leq \frac{4}{n} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{2} \cdot 4 \\
&= \frac{4^4}{6n}
\end{aligned}$$

Mais on peut voir que $\lim_{n\to\infty} \frac{4^4}{6n} = 0$. Alors, parce que $0 \leq \frac{4^n}{n!} \leq \frac{4^4}{6n}$ on a que $\{a_n\}$ converge vers 0.

Exemple 9.18 Soit $\{a_n\} = \left\{2 + \frac{\sin(n)}{n^3}\right\}$.

9.2.1. *Séries infinies (§6.4 ou §6.2).* Une *série infinie* (ou *série*) est la somme suivante d'une suite : $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + \ldots$. Alors chaque suite est associée a une série.

Exemple 9.19 Soit la suite $\{(-1)^n\}$ la série qui lui est associée est la série :

$$\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

Une *somme* ____________________ d'une série est la somme des n premiers termes de la série.

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

La *somme* (si elle existe) de la série est :

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

La *suite des sommes partielles* _________ est la suite des sommes partielles.

On dit que la série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *converge* si $\lim_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$. On dit que la série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *diverge* si $S \in \{\pm\infty\}$ ou n'existe pas.

Exemple 9.20 Soit la suite $\left\{\frac{1}{3^n}\right\}$. Alors la série est donnée par

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \ldots.$$

Les sommes partielles sont données par :

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{1}{3}\\
S_2 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}\\
S_3 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} = \frac{13}{27}\\
S_4 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} = \frac{40}{81}\\
&\vdots\\
S_n &= \underline{\hspace{3cm}}
\end{aligned}$$

Alors on cherche $S = \lim_{n\to\infty} S_n$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{3^x - 1}{2 \cdot 3^x}\\
&= \lim_{n\to\infty} \underline{\hspace{5cm}}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Alors notre série converge vers __.

Théorème 9.21 *Si* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *converge, alors* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Théorème 9.22 *Si* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *et* $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ *sont deux séries convergentes respectivement vers* A *et* B*, et si* $c, k \in \mathbb{R}$ *alors* $\sum_{i=1}^{\infty} (ca_i + kb_i)$ *converge vers* $cA + kB$*.*

Théorème 9.23 *Si* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *diverge,* $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ *converge et* $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$*. Alors* $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i \pm b_i)$ *et* $\sum_{i=1}^{\infty} ca_i$ *divergent.*

9.2.2. *Séries importants (§6.6 ou §6.2).* La *série harmonique* est la série ____________. Elle est divergente vers ∞.

Une série de la forme $\sum_{i=1}^{\infty} (a + (i-1)\, d)$ est une *série* ____________________ de premier terme a et de __________ d.

$$\sum_{i=1}^{\infty} (a + (i-1)\, d) = a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d) + \dots$$

Exemple 9.24 Soit la série suivante :

$$A = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$$

c'est une série arithmétique avec $d =$ __ et $a = 1$. Ainsi, $A =$ ____________________________.

Exemple 9.25 Soit la série suivante :

$$B = 2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17 + \dots$$

C'est une série arithmétique avec $d =$ __ et $a =$ __. Ainsi, $B =$ ________________________________.

Théorème 9.26 *Soit la série arithmétique $\sum_{i=1}^{\infty} (a + (i-1)\,d)$ alors elle diverge pour tout $d \in \mathbb{R}$ sauf si $a = 0$ et $d = 0$. En plus la somme partielle S_n est donnée par :*

$$S_n = na + \frac{n(n-1)}{2}d$$

Exemple 9.27 Pour nos exemples :

$$A: \; S_n = n + \frac{n(n+1)}{2} \qquad B: \; S_n = 2n + \frac{3n(n+1)}{2}$$

Une série de la forme $\sum_{i=1}^{\infty} ar^{i-1}$ est une *série* ____________________ de premier terme a et de ___________ r.

$$\sum_{i=1}^{\infty} ar^{i-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots$$

Exemple 9.28 Soit la série suivante :

$$C: 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \dots$$

C'est une série géométrique avec $r =$ __ et $a =$ __. Ainsi, $C =$ __________________.

Exemple 9.29 Soit la série suivante :

$$D: \pi + \pi 3 + \pi 3^2 + \pi 3^3 + \dots$$

C'est une série géométrique avec $r =$ __ et $a =$ __. Ainsi, $D =$ ____________________.

Théorème 9.30 *Soit la série géométrique $\sum_{i=1}^{\infty} ar^{i-1}$ où $r \neq 1$ alors la somme partielle S_n est donnée par :*

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

Exemple 9.31 Avec nos examples on a :

$$C: \; S_n = \frac{1-2^n}{1-2} \qquad D: \; S_n = \frac{\pi(1-3^n)}{1-3}$$

Théorème 9.32 *Soit la série géométrique $\sum_{i=1}^{\infty} ar^{i-1}$ où $a \neq 0$, alors elle converge vers $\frac{a}{r-1}$ si $|r| < 1$ et diverge autrement.*