8. Semaine 8 : 19 novembre 2018

8.1. **Partie 1.**

8.1.1. *Rappel.*

8.2. **Intégrales impropres (§5.4 ou §5.5).**

On commence aujourd'hui avec un exemple.

Exemple 8.1 Disons qu'on veut calculer l'intégrale suivante :

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx$$

On trouve que

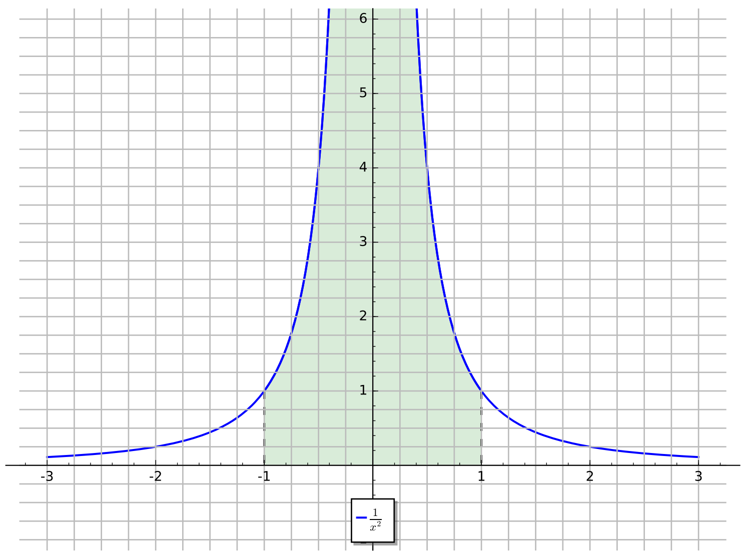
$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx &= \left.\frac{-1}{x}\right|_{-1}^{1} \\ &= \frac{-1}{1} - \frac{-1}{-1} \\ &= -1 - 1 \\ &= -2\end{aligned}$$

Est-ce que c'est correct ? _______

Pourqoui ?

On voit que $\frac{1}{x^2}$ est toujours ______________. Donc l'aire doit être ______________ ! Mais ce n'est pas ce qu'on a trouvé.

En effet, si on regarde le graphe on voit :



Donc, il y a un problème. Le problème vient de notre théorème.

Théorème 8.2 *Si $f(x)$ est une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et si $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ alors $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.*

Alors, le problème vient du fait que $\frac{1}{x^2}$ n'est pas _______________ à __.

Pour résoudre ce problème on utilise les ____________. Déjà comme notre fonction est _________ on sait que :

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

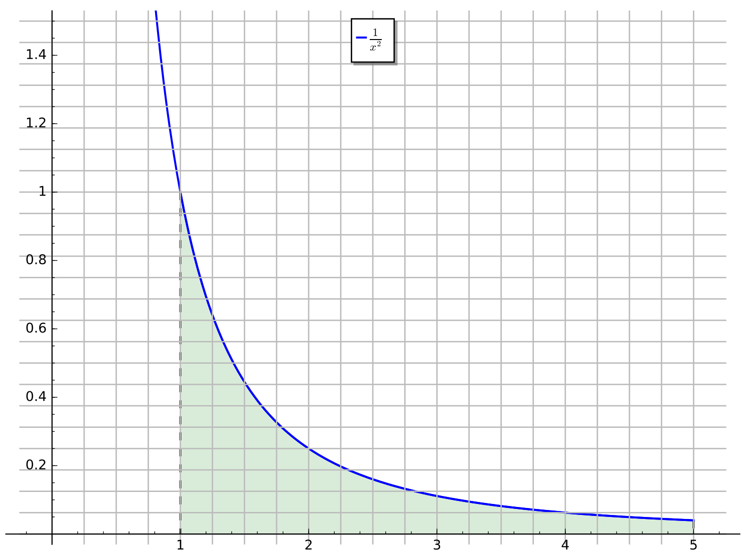
Maintenant, on va utiliser les limites.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx &= \lim_{n\to 0}\int_n^1 \frac{1}{x^2}\,dx\\ &= \lim_{n\to 0} -\frac{1}{x}\Big|_n^1\\ &= \lim_{n\to 0} -\frac{1}{1} - \frac{-1}{n}\\ &= \lim_{n\to 0} -1 + \frac{1}{n}\\ &= \infty\end{aligned}$$

Alors

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,dx = 2\cdot\infty = \infty$$

On peut faire la même chose vers l'infinie.



$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx &= \underline{\hspace{6cm}}\\ &= \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^n\\ &= \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} - \frac{-1}{1}\\ &= \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n}\\ &= 1\end{aligned}$$

Donc on a la définition suivante. Une intégrale est une *intégrale* ________________

(1) si l'intégrande tend vers $\pm\infty$ en une ou plusieurs valeurs entre les bornes ou

(2) si au moins une des bornes d'intégration est infinie.

Pour le premier cas, soit $\int_a^b f(x)\,dx$

(1) Si f est continue sur $[a, b[$ et $\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$ alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\hspace{6cm}}$$

si la limite existe.

(2) Si f est continue sur $]a, b]$ et $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\hspace{6cm}}$$

si la limite existe.

(3) Si f est continue sur $]a, b[$, $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$ alors

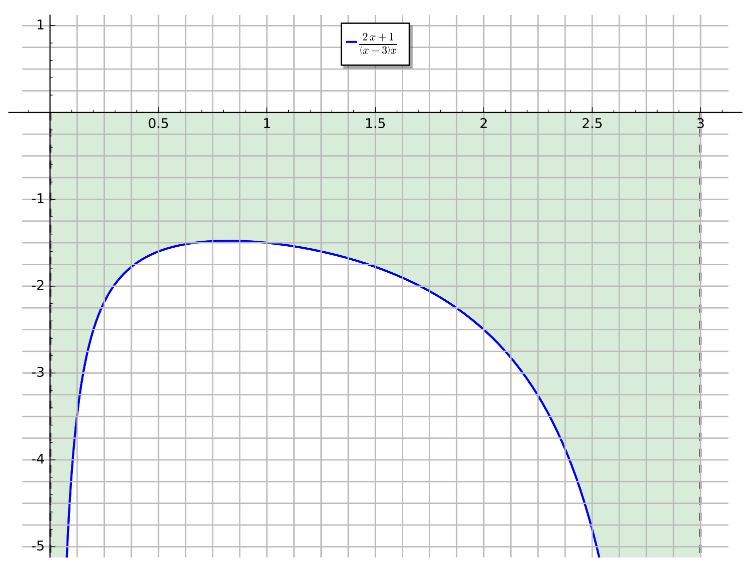
$$\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\hspace{12cm}}$$

si les limites existent pour un $c \in]a, b[$.

Si les limites donnent un nombre réel, l'intégrale impropre est __________________.
Si elles existent pas ou sont infinies, alors l'intégrale impropre est __________________.

Pour nos exemples on a $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$ est __________________ et $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ est ____________________.

Exemple 8.3 L'intégrale $\int_0^3 \frac{2x+1}{x(x-3)}\,dx$ est-elle convergente ou divergente ?



$$\int_0^3 \frac{2x+1}{x(x-3)}\,dx = \underline{\hspace{20em}}$$

$$\frac{2x+1}{x(x-3)} = \underline{\hspace{8em}}$$

$$2x+1 = \underline{\hspace{12em}}$$

$$A = \underline{\hspace{3em}}$$

$$B = \underline{\hspace{1.5em}}$$

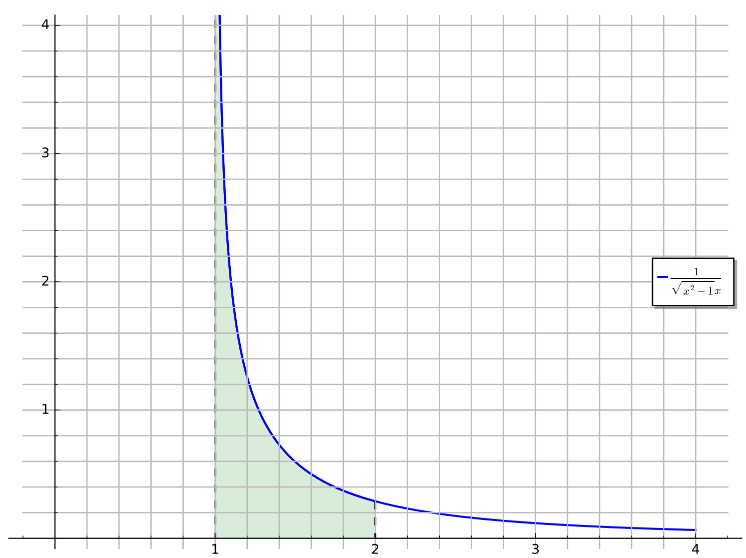
$$\frac{2x+1}{x(x-3} = \underline{\hspace{11em}}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \frac{2x+1}{x(x-3)}\,dx &= \lim_{A\to 0^+} \int_A^1 \frac{-1}{3x} + \frac{7}{3(x-3)}\,dx + \lim_{B\to 3^-} \int_1^B \frac{-1}{3x} + \frac{7}{3(x-3)}\,dx \\
&= \lim_{A\to 0^+} \left. \frac{-\ln(|x|)}{3} + \frac{7\ln(|x-3|)}{3} \right|_A^1 + \lim_{B\to 3^-} \left. \frac{-\ln(|x|)}{3} + \frac{7\ln(|x-3|)}{3} \right|_1^B \\
&= \lim_{A\to 0^+} \frac{-\ln(1)}{3} + \frac{7\ln(|1-3|)}{3} - \frac{-\ln(|A|)}{3} - \frac{7\ln(|A-3|)}{3} \\
&\quad + \lim_{B\to 3^-} \frac{-\ln(|B|)}{3} + \frac{7\ln(|B-3|)}{3} - \frac{-\ln(1)}{3} + \frac{7\ln(|1-3|)}{3} \\
&= \underline{\hspace{7em}}
\end{aligned}$$

Alors, c'est ________________.

Exemple 8.4 Un autre exemple. L'intégrale $\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$ est-elle convergente ou c'est divergent ?



Alors, on a que l'intégrande tend vers ∞ à 1. Donc, on a

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx &= \underline{\hspace{10cm}} \\
&= \lim_{A\to 1^+} \operatorname{arcsec}(|x|)\Big|_A^2 \\
&= \lim_{A\to 1^+} \operatorname{arcsec}(|2|) - \operatorname{arcsec}(|A|) \\
&= \underline{\hspace{2.5cm}} \\
&= \frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

Alors, c'est ____________________.

Pour le deuxième cas, soit $\int_a^b f(x)\,dx$

(1) Si f est continue sur $[a,\infty[$ alors

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \underline{\hspace{8cm}}$$

si la limite existe.

(2) Si f est continue sur $]-\infty,b]$ alors

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \underline{\hspace{8cm}}$$

si la limite existe.

(3) Si f est continue sur $\mathbb{R}$ alors

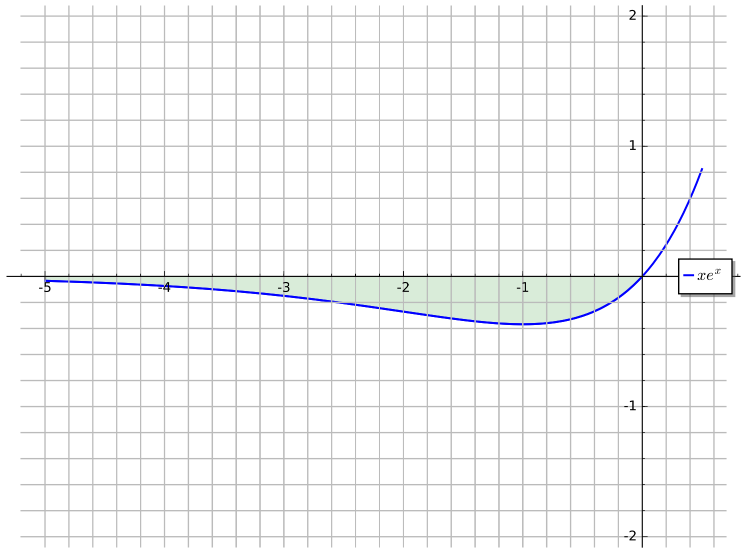
$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \underline{\hspace{16cm}}$$

si les limites existent pour un $c\in\mathbb{R}$.

Faisons des exemples.

Exemples 8.5 (1) Déterminer si $\int_{-\infty}^0 xe^x\,dx$ est convergente ou divergente.

On voit que xe^x est continue sur $]-\infty,0]$:



Alors, on a

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} xe^x\,dx &= \underline{\hspace{8cm}} \\
&= \underline{\hspace{11cm}} \\
&= \lim_{A\to-\infty} xe^x - e^x|_A^0 \\
&= \lim_{A\to-\infty} 0e^0 - e^0 - Ae^A + e^A \\
&= 0 - 1 - \lim_{A\to-\infty} Ae^A + e^A \\
&= \underline{\hspace{10cm}} \\
&= \underline{\hspace{9cm}} \\
&= -1
\end{aligned}$$

Ainsi, c'est __________________.

(2) Déterminer si $\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x)\,dx$ est convergente ou divergente. Au début on commence en faisant une mauvaise chose !

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x)\,dx &= \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} \sin(x)\,dx \\
&= \lim_{A\to\infty} 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

NOOOON !!!!!

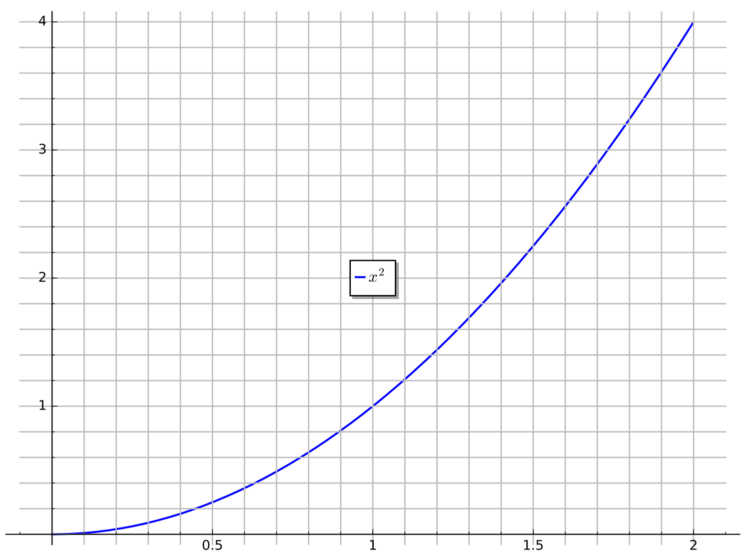
Le problème c'est que on a pas utilisé la bonne formule !

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x)\,dx &= \underline{\hspace{10cm}}\\ &= \underline{\hspace{8cm}}\\ &= \lim_{A\to-\infty} \cos(1) - \cos(A) + \lim_{B\to\infty} \cos(B) - \cos(1)\\ &= \lim_{A\to-\infty} -\cos(A) + \lim_{B\to\infty} \cos(B)\end{aligned}$$

Mais aucun entre ces deux limites n'est pas bien définie ! Alors, les limites n'existent pas ! D'où $\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x)\,dx$ est ________________.

8.3. **Partie 2.**

8.3.1. *Aire d'une surface de révolution (§3.5 ou §5.4).* On a calculé le volume de la rotation d'une courbe autour d'un axe, mais comment est-ce qu'on peut calculer l'aire de la surface ? Là il faut utiliser les mêmes méthodes qu'on a vu avec le calcul de la longeur d'un arc d'une courbe plane. Si on peut calculer la longeur d'un arc, on peut calculer l'aire de la surface. Donc, disons qu'on a la courbe suivante entre $(0, 0)$ et $(1, 4)$:



Avec une rotation autour de l'axe des x on a la formule :

$$2\pi r_i \Delta\ell_i$$

C'est quoi notre r_i ? __________
C'est quoi notre $\Delta\ell_i$?

Alors on a

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 2\pi f(x_i^\star)\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\Delta x_i = \rule{8cm}{0.4pt}$$

Et si on a fait la rotation autour de l'axe des y on aura :

$$r_i = \rule{1cm}{0.4pt} \qquad \Delta\ell_i = \rule{4cm}{0.4pt}$$

Donc, selon l'axe des y, on change la formule de l'intégration pour :

Exemple 8.6 Faisons un exemple assez simple : $f(x) = \sqrt{x}$. Avec une rotation autour de l'axe des x de $(0,0)$ à $(4,2)$ on a que l'aire de la surface est :

$$\begin{aligned}
\int_a^b \rule{6cm}{0.4pt}\, dx &= \rule{8cm}{0.4pt} \\
&= \rule{6cm}{0.4pt} \\
&= \rule{6cm}{0.4pt} \\
&= \pi\int_0^4 \sqrt{4x+1}\, dx \\
&= \pi\int_1^{17} \sqrt{u}\frac{du}{4} \\
&= \frac{\pi}{4}\left.\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_1^{17} \\
&= \frac{\pi}{6}\left(17^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right) \\
&= \frac{\pi}{6}\left(17^{\frac{3}{2}} - 1\right)
\end{aligned}$$

Exemple 8.7 Et si maintenant on fait un exemple avec la formule $f(x) = x^2$ où on fait une rotation autour de l'axe des y de $(0,0)$ à $(2,4)$.

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \underline{\hspace{6cm}}\, dx &= \underline{\hspace{7cm}} \\
&= \underline{\hspace{7cm}} \\
&= \frac{\pi}{4}\int_1^{17} \sqrt{u}\, du \\
&= \frac{\pi}{4}\,\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_1^{17} \\
&= \frac{\pi}{6}\left(17^{\frac{3}{2}} - 1\right)
\end{aligned}
$$

		Axe de rotation	
		Rotation autour de l'axe des x	Rotation autour de l'axe des y
Description de la courbe	$y = f(x)\ x \in [a,b]$	$\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$	$\int_a^b 2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$
	$x = g(y)\ y \in [c,d]$	$\int_c^d 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$	$\int_c^d 2\pi g(y)\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$