7. Semaine 7 : 12 novembre 2018

7.1. **Partie 1.**

7.1.1. *Rappel.*

7.1.2. *Intégration de fonctions rationnelles par décomposition en une somme de fractions partielles (§2.8 ou §4.4).*

Des fois, c'est facile de multiplier plusieurs polynômes ensembles. Mais qu'est-ce qu'on peut faire pour inverser ce processus ? Les fractions partielles !!!

Commençons avec une fonction propre : $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

Rappelons qu'une fraction est propre si le degré du numérateur est inf. au degré du dén.

La première étape qu'on fait c'est de changer $Q(x)$ en un polynôme de facteurs linéaires et quadratiques. Ça veut dire que

$Q(x) =$ ____________________

Exemple 7.1 Un exemple ! Soit

$$Q(x) = 2x^5 + 5x^4 - 12x^3 - 14x^2 + 34x - 15.$$

Il faut utiliser une ________________________.

On a $-15 = a_0$ et $2 = a_n$. Donc p/q peut être : ____
Essayons avec le plus simple : 1.

$Q(1) =$ ____

Donc, $(x-1)|Q(x)$ et

$Q(x) =$ ____

Essayons 1 encore :

$Q(1) =$ ____.

Donc :

$Q(x) =$ ____

Alors, on essaye encore 1.

$Q(1) =$ ________________________________.

Donc :

$Q(x) =$ ______________________________________

Mais, d'ici, c'est évident que 1 ne va pas marcher parce que ça nous donnera quelque chose de positif ! Donc, essayons -1.

$Q(-1) =$ _______________________________.

Nope ! Essayons, -3.

$Q(-3) =$ ____

Alors :

$$Q(x) = (x-1)^3(x+3)\,(2x+5)$$

La deuxième étape est de développer notre quotient selon le dénominateur.

$$\frac{P(x)}{(ax+b)^n} = \frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

$$\frac{P(x)}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \ldots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

Si on en a plusieurs, on les ajoute ensemble.

$$\frac{P(x)}{(ax+b)(cx+d)} = \frac{A}{ax+b} + \frac{B}{cx+d}$$

Exemples 7.2 (1) Dans notre exemple : $\frac{P(x)}{2x^5+5x^4-12x^3-14x^2+34x-15}$.

$$\frac{P(x)}{(x-1)^3(x+3)(2x+5)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{2x+5} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{(x-1)^3}$$

(2) $\frac{P(x)}{(x^2+1)^2(2x+3)}$

(3) $\frac{P(x)}{x^2(x+1)^3\left(x-\frac{5}{2}\right)(x^2+1)^3(x^2+2x+8)}$.

Mais, comment est-ce qu'on peut trouver les variables majuscules ? Si on n'a pas de puissance, c'est facile :

Exemple 7.3 $\frac{12x+3}{x(x-1)} =$ ________________.

$=$ ________________________________

$12x+3 =$ __________________________

Si $x = 0$____________________

Si $x = 1$__________________

Alors $A =$ ______ et $B =$ ____. Donc

$$\frac{12x+3}{x(x-1)} = \underline{\hspace{6cm}}$$

Exemple 7.4 $\frac{2x^2-15x+3}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3}$.

$= \underline{\hspace{8cm}}$

$2x^2 - 15x + 3 = A(x+3) + B(x-1)$

Si $x = 1$ ____

Si $x = -3$ ____

Alors $A =$ ____ et $B =$ ____. Donc,

$$\frac{2x^2-15x+3}{(x-1)(x+3)} = \underline{\hspace{5cm}}$$

Essayons quelque chose plus compliqué.

Exemple 7.5 $\frac{x^2+x}{(x+1)^3} =$ ________________________. Commençons de la même façon :

$$x^2 + x = \underline{\hspace{6cm}}$$

$$C = \underline{\hspace{0.5cm}}$$

Mais, on ne sait pas ce qu'on peut mettre pour les x pour trouver A et B ! Alors, on va faire la multiplication :

$$\begin{aligned} x^2 + x &= Ax^2 + 2Ax + A + Bx + B - 1 \\ &= \underline{\hspace{8cm}} \\ A &= \underline{\hspace{0.5cm}} \\ B &= \underline{\hspace{0.5cm}} \end{aligned}$$

Exemple 7.6 Et si $\frac{x^2+x}{x(x+1)^3} =$ ____________________________.
Alors

$$x^2 + x = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$A = \underline{\hspace{0.5cm}}$$

$$D = \underline{\hspace{0.5cm}}$$

Pour B et C on fait la même chose qu'avant.

$$\begin{aligned} x^2 + x &= Bx^3 + 2Bx^2 + Bx + Cx^2 + Cx \\ &= \underline{\hspace{8cm}} \\ B &= \underline{\hspace{0.5cm}} \\ C &= \underline{\hspace{0.5cm}} \end{aligned}$$

Exemple 7.7 $\frac{2x^4+x^3+17x-20}{(x-1)^3(x+3)(2x+5)} =$ ____ .

Commençons dans le même sens

$$
\begin{aligned}
2x^4 + x^3 + 17x - 20 &= A(x-1)^3(2x+5) + B(x+3)(x-1)^3 + C(x+3)(2x+5)(x-1)^2 \\
&\quad + D(x+3)(2x+5)(x-1) + E(x+3)(2x+5) \\
A &= \_\_ \\
B &= \_\_ \\
E &= \_\_
\end{aligned}
$$

Alors

$$
\begin{aligned}
2x^4 + x^3 - 17x - 20 &= \\
&= (2+2C)x^4 + (-1+7C+2D)x^3 + (-9-5C+9D)x^2 \\
&\quad + (13-19C+4D)x + (-5+15C-15D) \\
C &= \_\_ \\
D &= \_\_
\end{aligned}
$$

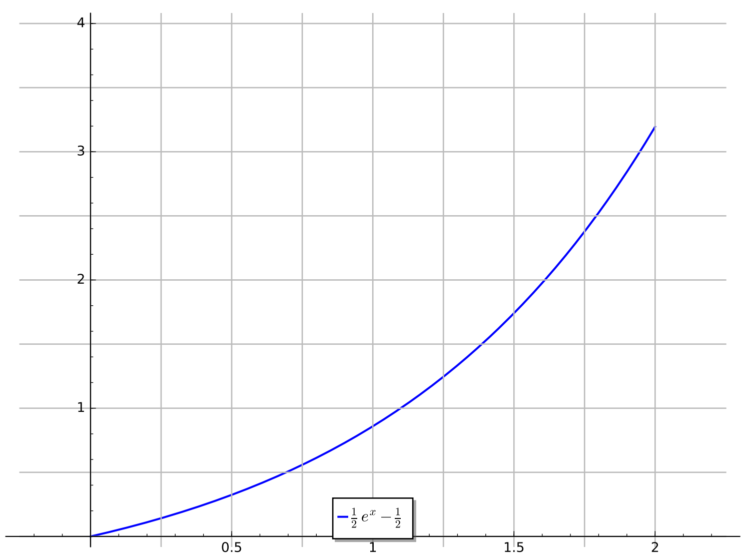
Faisons, l'exemple d'une intégrale.

Exemple 7.8 $\int \frac{3x^2+x+2}{x^3-x^2-x+1}\,dx$

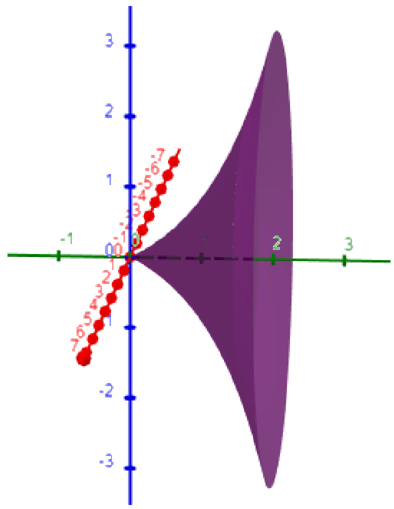
$$
\begin{aligned}
Q(x) &= \underline{\hspace{6cm}} \\
\frac{3x^2+x+2}{(x-1)^2(x+1)} &= \underline{\hspace{10cm}} \\
3x^2+x+2 &= \underline{\hspace{15cm}} \\
A &= \underline{\hspace{0.5cm}} \\
C &= \underline{\hspace{0.5cm}} \\
3x^2+x+2 &= \underline{\hspace{14cm}} \\
&= (1+B)x^2 + (-2+3)x + (1-B+3) \\
B &= \underline{\hspace{0.5cm}} \\
\frac{3x^2+x+2}{(x-1)^2(x+1)} &= \underline{\hspace{10cm}} \\
\int \frac{3x^2+x+2}{x^3-x^2-x+1}\,dx &= \underline{\hspace{12cm}} \\
&= \underline{\hspace{15cm}} \\
&= \ln(|x+1|) + 2\ln(|x-1|) + \frac{-3}{(x-1)} + c
\end{aligned}
$$

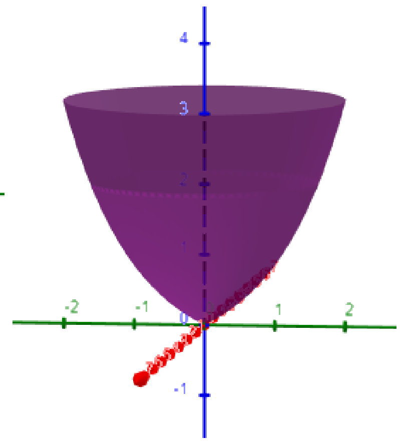
7.2. **Partie 2.**

7.2.1. *Volume de solides (§3.3 ou §5.1).* On va essayer de calculer un volume étant donné une fonction. Donc supposons qu'on a la fonction $\frac{e^x-1}{2}$:



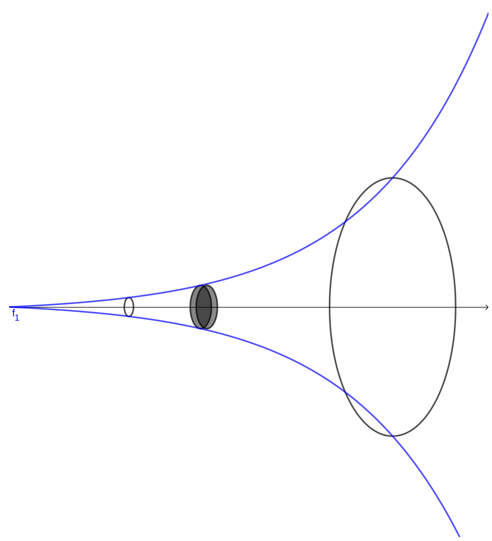
On va faire des rotations selon différents axes :





D'ici on peut se demander, quel est le volume d'une partie de notre fonction en rotation autour d'un axe ? On va faire comme on a fait avec les fonctions en 2d.

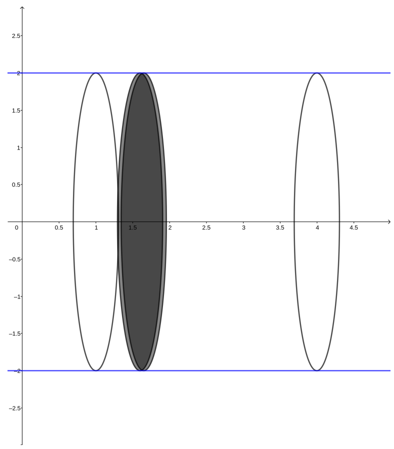
On peut approximer le volume en faisant la somme des volumes des disques très minces.

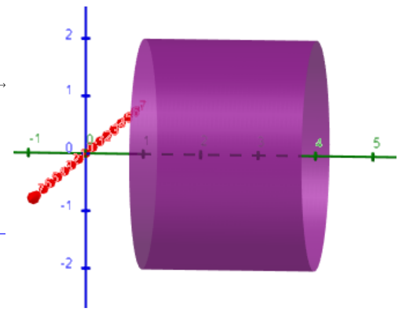


Quel est le volume du petit disque ? ____________. Alors, pour trouver le volume il nous faut calculer l'intégrale :

Cette méthode pour évaluer le volume d'un solide de révolution est la *méthode des* ____________. Alors, faisons des exemples.

Exemple 7.9 Trouver le volume de la courbe $f(x) = 2$ en rotation autour de l'axe des x de $x = 1$ à $x = 4$. On a :





Donc, le volume sera :

Exemple 7.10 Quelque chose plus difficile : Trouver le volume de la courbe $f(x) = \frac{e^x - 1}{2}$ en rotation autour de l'axe des x de $x = 1$ à $x = 4$. On a déjà vu cette courbe. Donc, le volume sera :

$$\begin{aligned}
\int_1^4 \pi\left(f(x)\right)^2\,dx &= \underline{\hspace{8cm}} \\
&= \frac{\pi}{4}\int_1^4 (e^x)^2 - 2e^x + 1\,dx \\
&= \frac{\pi}{4}\left(\int_1^4 e^{2x}\,dx - 2\int_1^4 e^x\,dx + \int_1^4 dx\right) \\
&= \frac{\pi}{4}\left(\left.\frac{e^{2x}}{2}\right|_1^4 - 2\left.(e^x)\right|_1^4 + \left.x\right|_1^4\right) \\
&= \frac{\pi}{4}\left(\frac{e^8}{2} - \frac{e^2}{2} - 2e^4 + 2e^1 + 4 - 1\right) \\
&= \underline{\hspace{14cm}}
\end{aligned}$$

Mais on avait deux façons de faire la rotation !

Exemple 7.11 Donc essayons de trouver le volume de la courbe en rotation autour de l'axe des y de $y = 1$ à $y = 4$.

Pour l'instant, c'est trop compliqué, donc essayons quelque chose de plus facile.

Exemple 7.12 $f(x) = x^{1/3}$. Autour de l'axe des x on a :

et autour de l'axe des y on a :

Donc il faut faire les intégrales.

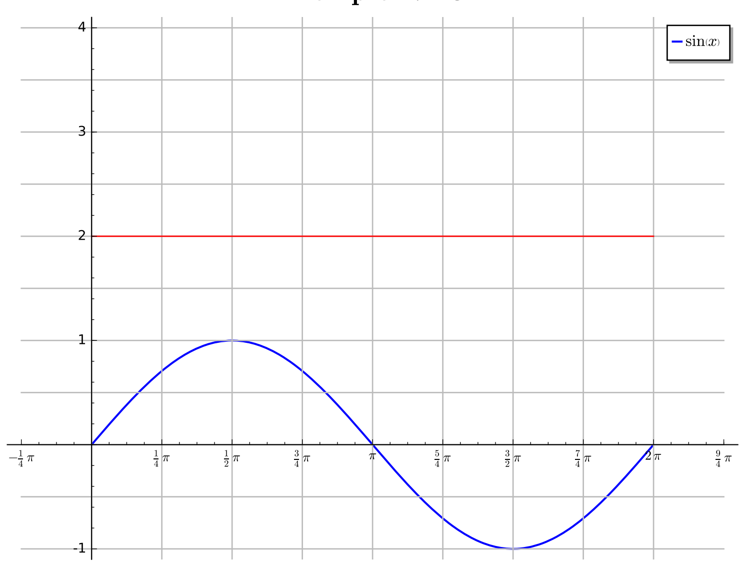
$$\int \pi x^{2/3}\, dx = \underline{\hspace{4cm}}$$

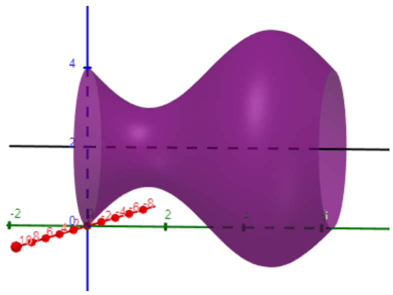
et

$$\int \pi y^6\, dy = \underline{\hspace{3cm}}$$

Finalement, on fait une rotation autour des axes, mais à quoi est-ce qu'on arrive si on fait une rotation autour d'une autre droite ?

Exemple 7.13



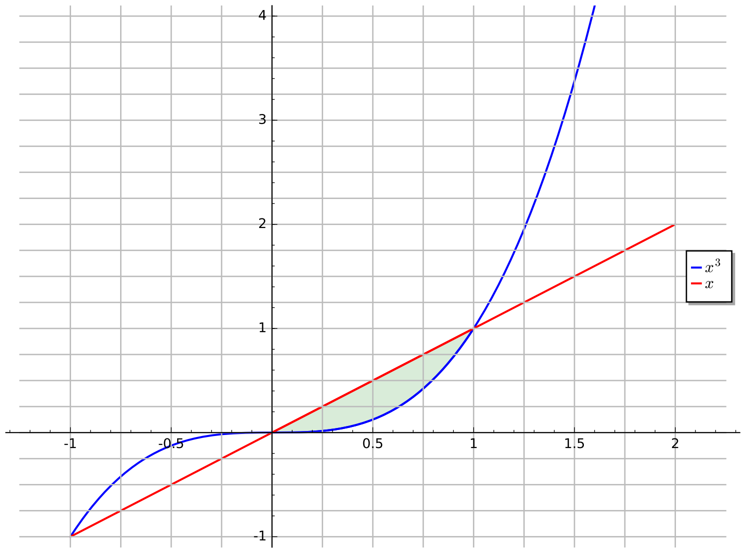


Qu'est-ce qu'on peut faire ? On a toujours $\pi r^2 \Delta x$ pour les disques, mais quoi vaut r ici ? Ce n'est plus $f(x)$! Maintenant, c'est $2 - \sin(x)$. Donc, il nous faut l'intégrale :

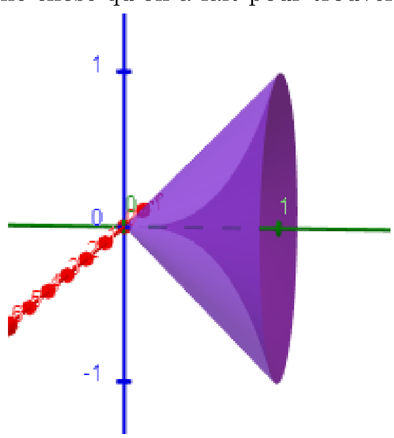
Pour l'intégrer, on a

Continuons à compliquer les choses, qu'est-ce qui peut arriver si on fait une rotation d'un objet entre deux courbes ?

Exemple 7.14 Supposons qu'on a l'objet :



C'est exactement la même chose qu'on a fait pour trouver l'aire.



On prend le grand et on soustrait le petit.

$$\int_0^1 \underline{\hspace{4cm}}\, dx = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$= \pi \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7} \right) \Bigg|_0^1$$

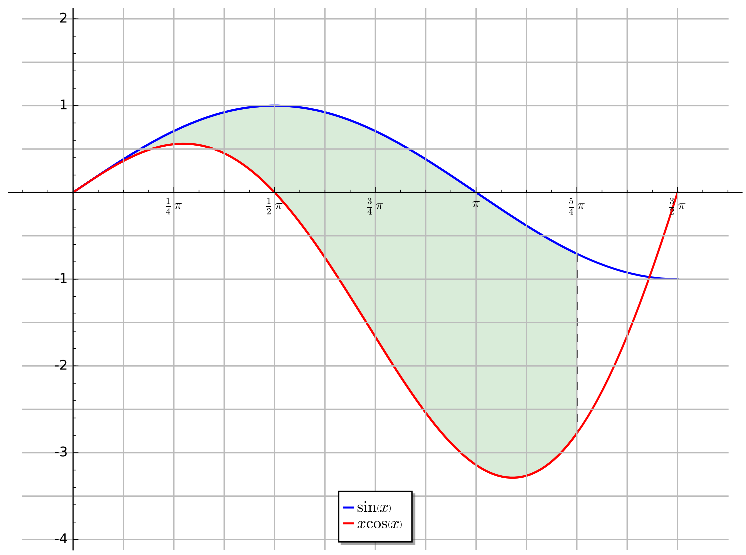
$$= \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \right)$$

$$= \pi \frac{7-3}{21}$$

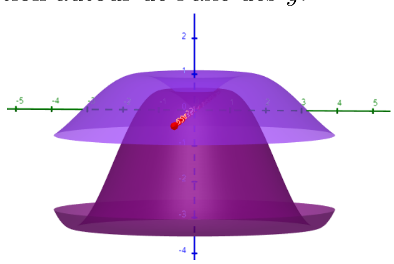
$$= \frac{4\pi}{21}$$

Cette méthode est la *méthode des* ____________________.

Mais, qu'est-ce qu'on peut faire si on veux trouver le volume de



après avoir fait une rotation autour de l'axe des y.



On ne peut pas utiliser les disques parce que ____________________________________.
Donc il faut utiliser une autre forme pour trouver le volume : *méthode de* ________.

Premièrement, il faut calculer le volume de cet objet :

Exemple 7.15 Pour notre exemple, on a $r =$ __ et $h =$ ______________________________.
Alors,

$$\int_0^{\frac{5\pi}{4}} 2\pi x\left(\sin(x) - x\cos(x)\right)\,dx = 2\pi\int_0^{\frac{5\pi}{4}} x\sin(x) - x^2\cos(x)\,dx$$

$$u = x \quad dv = \sin(x)\,dx \qquad u' = x^2 \quad dv' = \cos(x)\,dx$$

$$du = dx \quad v = -\cos(x) \qquad du' = 2x\,dx \quad v' = \sin(x)$$

$$= 2\pi\left(-x\cos(x)\Big|_0^{\frac{5\pi}{4}} - \int_0^{\frac{5\pi}{4}} -\cos(x)\,dx - x^2\sin(x)\Big|_0^{\frac{5\pi}{4}} + \int_0^{\frac{5\pi}{4}} 2x\sin(x)\,dx\right)$$

$$u' = 2x \quad dv' = \sin(x)\,dx$$

$$du' = 2\,dx \quad v' = -\cos(x)$$

$$= 2\pi\left(-x\cos(x) - x^2\sin(x)\Big|_0^{\frac{5\pi}{4}} + \sin(x)\Big|_0^{\frac{5\pi}{4}} - 2x\cos(x)\Big|_0^{\frac{5\pi}{4}} - \int_0^{\frac{5\pi}{4}} -2\cos(x)\,dx\right)$$

$$= 2\pi\left(-x\cos(x) - x^2\sin(x) + \sin(x) - 2x\cos(x)\Big|_0^{\frac{5\pi}{4}} + 2\sin(x)\Big|_0^{\frac{5\pi}{4}}\right)$$

$$= 2\pi\left(\left(-\frac{5\pi}{4}\cos(\frac{5\pi}{4}) - \left(\frac{5\pi}{4}\right)^2\sin(\frac{5\pi}{4}) + \sin(\frac{5\pi}{4}) - 2\cdot\frac{5\pi}{4}\cos(\frac{5\pi}{4}) + 2\sin(\frac{5\pi}{4})\right)\right.$$
$$\left. - \left(-0\cos(0) - 0^2\sin(0) + \sin(0) - 2\cdot 0\cdot\cos(0) + 2\sin(0)\right)\right)$$

$$= 2\pi\left(\left(-\frac{5\pi}{4}\frac{-1}{\sqrt{2}} - \left(\frac{5\pi}{4}\right)^2\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{5\pi}{2}\frac{-1}{\sqrt{2}} + 2\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\right.$$
$$\left. - (0 - 0 + 0 - 0 + 0)\right)$$

$$= 2\pi\left(\frac{5\pi}{4\sqrt{2}} + \frac{25\pi^2}{16\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{5\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= 2\pi\left(\frac{20\pi + 25\pi^2 - 16 + 40\pi - 32}{16\sqrt{2}}\right)$$

$$= \pi\frac{25\pi^2 + 60\pi - 48}{8\sqrt{2}}$$

$$= \frac{25\pi^3 + 60\pi^2 - 48\pi}{8\sqrt{2}}$$