6. Semaine 6 : 29 octobre 2018

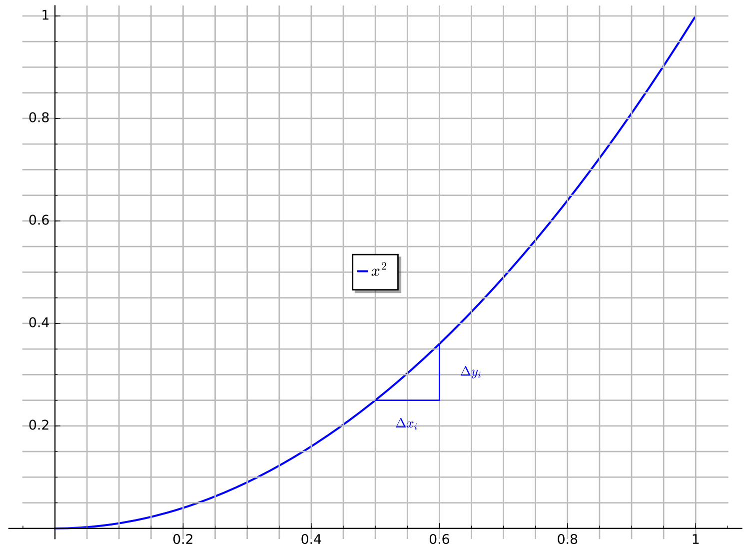
6.1. Partie 1.

6.1.1. *Rappel.*

Examen Pratique

6.2. Partie 2.

6.2.1. *Longueur de courbes planes (§3.4 ou §5.3).* Soit une courbe, on veut maintenant calculer sa longueur.



Pour calculer la longueur de la courbe de 0 à 1, il nous faut retourner à la sommation de Riemann. Rappelons la sommation de Riemann :

Si on veut calculer la longueur, on peut calculer la longueur un petit morceau à la fois. C'est-à-dire, on peut calculer :

______________________ = ____

$$= \sqrt{\Delta x_i^2 + (f'(c_i)\Delta x_i)^2}$$
$$= \sqrt{1 + f'(c_i)^2}\Delta x_i$$

Ainsi la longueur est donnée par,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'(c_i)^2}\Delta x_i = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Exemple 6.1 Calculer la longueur de la courbe $f(x) = 4 + 2\sqrt{x^3}$ de $(0, 4)$ à $(1, 6)$.

Donc, il faut calculer :

$$\int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

Premièrement il faut calculer $f'(x)$. Ainsi, $f'(x) =$ ____________. Alors,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx &= \underline{\hspace{8cm}} \\
&= \int_0^1 \sqrt{1+9x}\,dx \\
&\underline{\hspace{10cm}} \\
&= \frac{1}{9}\int_1^{10} \sqrt{u}\,du \\
&= \underline{\hspace{5cm}} \\
&= \frac{2}{9*3}\left(10^{3/2} - 1^{3/2}\right) \\
&= \frac{20\sqrt{10}-2}{27}
\end{aligned}$$

Des fois, il vaut mieux utiliser l'axe des y.

Exemple 6.2 Voyons ça avec un autre exemple. Calculons la longueur de la courbe $f(x) = 2x^{\frac{2}{3}}$ de $(0,0)$ à $(1,2)$.

Si on le fait de façon normale, on trouve que ce problème est difficile :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx &= \int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right)^2} \mid dx \\
&= \int_0^1 \sqrt{1+\frac{16}{9}x^{\frac{-2}{3}}}\,dx
\end{aligned}$$

On n'a pas encore vu une façon de résoudre ce problème.

Mais, on peut le faire avec l'axe des y. Donc si $y = 2x^{\frac{2}{3}}$ alors $x = \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$.

$$\int_{\_}^{\_} \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \, dy = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{32}{9} \int_{y=0}^{y=2} \sqrt{u}\, du \\
&= \frac{32}{9} \, \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_{y=0}^{y=2} \\
&= \frac{64}{27} \left(1 + \frac{9}{32} y\right)^{3/2} \Big|_0^2 \\
&= \frac{64}{27} \left(\left(1 + \frac{9}{16}\right)^{3/2} - 1^{3/2} \right) \\
&= \frac{64}{27} \left(\left(\frac{25}{16}\right)^{3/2} - 1 \right) \\
&= \frac{64}{27} \left(\frac{5^3}{4^3} - 1 \right) \\
&= \frac{64}{27} \cdot \frac{125 - 64}{64} \\
&= \frac{61}{27}
\end{aligned}$$

6.2.2. *Récapitulation - Un grand rappel.* Qu'est-ce que vous aimeriez voir ?

(1) **Règle de L'Hôptial** Si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ ou $= \pm\frac{\infty}{\infty}$ et si la limite $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe ou est infinie, alors

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Exemple 6.3

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^5 - x^4 + x^3 - x^2 - 2 * x + 2}{(x-1)^2} = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

Et si la limite est de la forme $\infty - \infty$, $0 \cdot \pm\infty$ ou la forme 0^0, ∞^0, $1^{\pm\infty}$.

Exemples 6.4

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \qquad \lim_{x\to 0} x \ln(x) \qquad \lim_{x\to 0} x^x$$

(2) **Sommation** Abréger la sommation suivante avec Σ :

$$f(4) - \frac{f(6)}{2} + \frac{f(8)}{3} - \frac{f(10)}{4} + \frac{f(12)}{5} - \frac{f(14)}{6}$$

(3) **Intégrable au sens de Riemann** Ça veut dire quoi d'être intégrable au sens de Riemann ?

---

(4) **Théorème fondamental du calcul intégrale** Si $f(x)$ est une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et si $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ alors $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$.

(5) **Changement de variable/Méthode de substitution**

Version indéfinie :

(a) Mettez $u = f(x)$.

(b) Faites les derivées.

(c) Remplacez les variables.

(d) Faites l'intégrale.

(e) Re-remplacez les variables.

Version définie :

(a) Mettez $u = f(x)$.

(b) Faites les derivées.

(c) Remplacez les variables.

(d) Calculer les nouvelle bournes.

(e) Faites l'intégrale.

La partie la plus dure : Décider u

Exemple 6.5

$$\int \frac{(ln(x))^4}{x}\, dx \quad = \underline{\hspace{3em}}$$

$$= \frac{(\ln(x))^5}{5} + c$$

(6) **Complétion du carré**

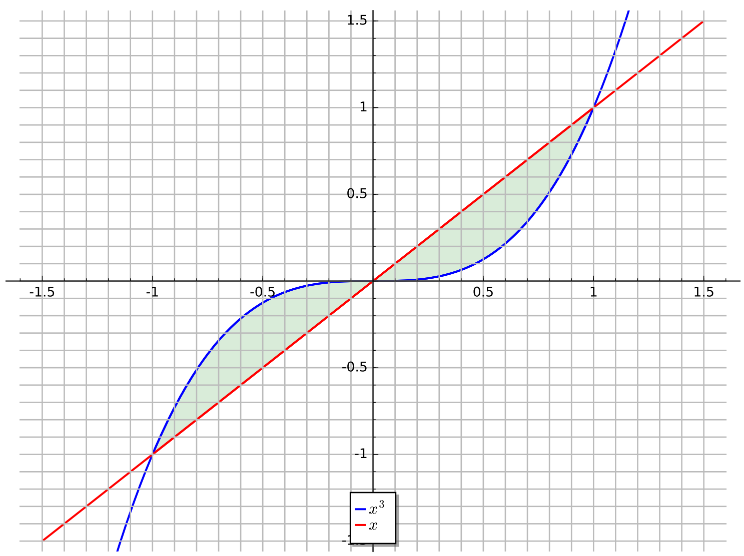
$$ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right)$$

Exemple 6.6

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2-6x-8}}\,dx \quad =$$

$$= \arcsin(x+3) + c$$

(7) **L'aire d'une surface plane**



(8) **Intégration par parties**

(a) Trouvez u et dv (utilisez LIATE !)

(b) Trouvez du et v

(c) Remplacez les variables

$$\int udv = uv - \int vdu \quad \int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu$$

Exemple 6.7

$\int_1^2 x\ln(x)\,dx$

$= 2\ln(2) - \frac{3}{4}$

(9) **Intégration de fonctions trigonométriques** $\int \sin^m(ax)\cos^n(ax)\,dx$

Si m ou n est impair, on essaye de le changer pour qu'il soit pair. Si tous les deux sont positifs et pairs, on utilise nos identités pour diminuer l'exposant.

Exemple 6.8

$$\int \sin^2(x)\cos^4(x)\,dx \quad =$$

$$= \frac{x}{16} - \frac{\sin(4x)}{64} + \frac{\sin^3(2x)}{48} + c$$

(10) **Sécantes, cosécantes, tangentes, cotangentes** Il faut faire une substitution de la forme $u = \tan(x)$ après avoir fait des substitutions trigonométriques. Rappelons qu'il faut utiliser la méthode par parties si n est impair pour la sécante : $\sec^n(x)$.

Exemple 6.9 (a)

$$\int \tan^3(x)\,dx \quad =$$

$$= \frac{\tan^2(x)}{2} - \ln(|\sin(x)|) + c$$

(b)

$$\int \sec^4(x)\,dx \quad =$$

$$= \tfrac{\tan^3(x)}{3} + \tan(x) + c$$

(11) **Intégration par substitution trigonométrique** Si on a des quadratiques, on utilise intégration par substitution avec un changement de variable selon la formule dans la racine carrée. On a les trois options suivantes :

$$a^2 - x^2 \Rightarrow x = a\sin(\theta)$$
$$a^2 + x^2 \Rightarrow x = a\tan(\theta)$$
$$x^2 - a^2 \Rightarrow x = a\sec(\theta)$$

Exemple 6.10

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-8x+20}} =$$

$$= \ln\left(\left|\sec\left(\frac{\sqrt{x^2-8x+20}}{2}\right)\right|\right) + c$$