## 5. Semaine 5 : 22 octobre 2018

Devoir 1 - Date d'échéance

### 5.1. **Partie 1.**

#### 5.1.1. *Rappel.*

#### 5.1.2. *Sécantes, cosécantes, tangentes, cotangentes ! (§2.5.3 ou §4.2).*

Commençons avec $\int \tan^n(ax)\,dx$ où $n \geq 1$. En général on a

$$\begin{aligned}\int \tan^n(ax)\,dx &= \int \tan^2(ax)\tan^{n-2}(ax)\,dx \\ &= \underline{\hspace{8cm}} \\ &= \int \sec^2(ax)\tan^{n-2}(ax)\,dx - \int \tan^{n-2}(ax)\,dx\end{aligned}$$

Cette intégrale n'a pas l'air plus simple que celle d'avant. Alors, on va essayer d'utiliser les méthodes qu'on a déjà vu dans le cours : ____________________.
Commençons avec ____________. Posons $u =$ ______, alors $du =$ __________. D'où

$$\begin{aligned}\int \sec^2(ax)\tan^{n-2}(ax)\,dx - \int \tan^{n-2}(ax)\,dx &= \underline{\hspace{8cm}} \\ &= \underline{\hspace{8cm}} \\ &= \frac{u^{n-1}}{a(n-1)} + c - \int \tan^{n-2}(ax)\,dx \\ &= \frac{\tan^{n-1}(ax)}{a(n-1)} + c - \int \tan^{n-2}(ax)\,dx\end{aligned}$$

Alors

$$\int \tan^n(ax)\,dx = \underline{\hspace{10cm}}$$

qui est beaucoup mieux !

**Exemple 5.1** Faisons ça avec un exemple : $\int \tan^5(2x)\,dx$.

$$\begin{aligned}
\int \tan^5(2x)\,dx &= \underline{\hspace{6cm}}\\
&= \underline{\hspace{8cm}}\\
&= \int \tan^3(2x)\sec^2(2x)\,dx - \int \tan^3(2x)\,dx\\
u &= \underline{\hspace{2cm}} \qquad du = \underline{\hspace{3cm}}\\
&= \int u^3 \sec^2(2x)\frac{du}{2\sec^2(2x)} - \int \tan^3(2x)\,dx\\
&= \underline{\hspace{9cm}}\\
&= \int \frac{u^3}{2}du - \int \tan(2x)\left(\sec^2(2x) - 1\right)\,dx\\
&= \int \frac{u^3}{2}du - \int \tan(2x)\sec^2(2x)\,dx + \int \tan(2x)\,dx\\
&= \underline{\hspace{13cm}}\\
&= \int \frac{u^3}{2}du - \int \frac{u}{2}du + \int \tan(2x)\,dx\\
&= \frac{u^4}{2\cdot 4} - \frac{u^2}{2\cdot 2} + \frac{\ln(|\sec(2x)|)}{2} + c\\
&= \frac{\tan^4(2x)}{8} - \frac{\tan^2(2x)}{4} + \frac{\ln(|\sec(2x)|)}{2} + c
\end{aligned}$$

On peut utiliser une stratégie similaire pour la sécante : $\int \sec^n(ax)\,dx$.

**Exemple 5.2** Faisons $\int \sec^8(x)\,dx$

$$\begin{aligned}
\int \sec^8(x)\,dx &= \underline{\hspace{5cm}} \\
&= \int \sec^2(x)\left(\tan^2(x)+1\right)^3\,dx \\
u &= \underline{\hspace{1.5cm}} \qquad du = \underline{\hspace{2.5cm}} \\
&= \int \sec^2(x)\left(u^2+1\right)^3 \frac{du}{\sec^2(x)} \\
&= \underline{\hspace{3.5cm}} \\
&= \int u^6+3u^4+3u^2+1 \\
&= \frac{u^7}{7}+\frac{3u^5}{5}+\frac{3u^3}{3}+u+c \\
&= \underline{\hspace{10cm}}
\end{aligned}$$

Cette méthode ne marche que quand $n$ est pair. Si $n$ est impair, il faut utiliser la formule de l'intégration par parties.

5.1.3. *Intégration par substitution trigonométrique (§2.6 ou §4.3).* L'idée maintenant est de trouver une façon d'intégrer les intégrales comme : ________________________. Pour l'instant aucune méthode nous donne une façon facile pour le faire. Par contre, on peut utiliser les identités trigonométriques pour les résoludre.

**Exemple 5.3** Si on a $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ on va utiliser le fait que $\sin(x)^2+\cos(x)^2=1$ pour résoudre cette intégrale. Comment ça nous aide ? Parce que, on peut jouer avec la formule ! En particulier, $\cos(x)^2 = 1 - \sin(x)^2$, donc si on remplace $x$ par

____________ on aura quelque chose plus de simple.

$\sqrt{a^2 - x^2} =$ ______________________________________________________________________ .

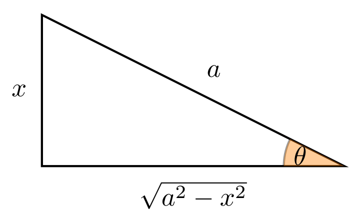
Prenons la dérivée, on a $dx =$ ________________ ! Donc, $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int a^2 \cos^2(\theta)\, d\theta$.

Et de là on a déjà vu comment faire ça :

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx &= \int a^2 \cos^2(\theta)\, d\theta \\
&= \underline{\hspace{8cm}} \\
&= \frac{a^2}{2}\theta + \frac{1}{2}\sin(2\theta) + c.
\end{aligned}$$

MAIS ! On a un autre problème maintenant. On veut la formule avec les $x$. Alors, il faut trouver ce que vaut $\theta$ et $\sin(2\theta)$ en fonction $x$.

Si $x = a\sin(\theta)$ alors $\arcsin(\frac{x}{a}) = \theta$. Pour $\sin 2\theta$ on a $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$. En utilisant le triangle :




on a $\sin(\theta) =$ ___ et $\cos(\theta) =$ ____________ . Alors,

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx &= \frac{a^2}{2}\theta + \frac{1}{2}\sin(2\theta) + c \\
&= \underline{\hspace{12cm}} \\
&= \frac{a^2}{2}\arcsin(\frac{x}{a}) + \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + c.
\end{aligned}$$

Mais on a plusieurs identités qu'on peut utiliser pour nous aider ! Pour chaque

cas on utilise une substitution différente :

| | | |
|---|---|---|
| $a^2 - x^2$ | $x =$ __________ | $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ |
| $a^2 + x^2$ | $x =$ __________ | $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ |
| $x^2 - a^2$ | $x =$ __________ | $\begin{cases} \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[ & \text{pour } x \geq a \\ \theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right] & \text{pour } x \leq -a \end{cases}$ |

Faisons quelques exemples.

**Exemples 5.4** (1) $\int \left(25 + (x-3)^2\right)^{-3/2} \, dx$

La formule $25 + (x-3)^2$ est comme $1 + x^2$, alors on va utiliser $x =$ __________ comme substitution.

$$x - 3 = \underline{\qquad\qquad} \Rightarrow dx = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$\begin{aligned}
\int \left(25 + (x-3)^2\right)^{-3/2} \, dx &= \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
&= \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
&= \int \frac{5\sec^2(\theta)}{5^3\left(\sec^2(\theta)\right)^{3/2}} \, d\theta \\
&= \int \frac{1}{5^2 \sec(\theta)} \, d\theta \\
&= \frac{1}{25} \int \cos(\theta) \, d\theta \\
&= \frac{\sin(\theta)}{25} + c \\
&= \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}
\end{aligned}$$

(2) $\int \frac{1}{x\sqrt{2x^2 - 16}} \, dx$

Disons que $\sqrt{2}x > 4$ et alors ________________

$$\sqrt{2}x = \underline{\hspace{3cm}} \Rightarrow dx = \underline{\hspace{7cm}}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x\sqrt{2x^2-16}}\,dx &= \underline{\hspace{12cm}} \\
&= \int \frac{\tan(\theta)}{4\sqrt{\sec^2(\theta)-1}}\,d\theta \\
&= \int \frac{\tan(\theta)}{4\sqrt{\tan^2(\theta)}}\,d\theta \\
&= \int \frac{\tan(\theta)}{4\tan(\theta)}\,d\theta \\
&= \frac{1}{4}\theta + c \\
\theta &= \\
&= \frac{1}{4}\arccos\left(\frac{\sqrt{8}}{x}\right) + c
\end{aligned}$$

5.2. **Partie 2.**

5.2.1. *Intégration d'expressions comportant des fonctions quadratiques (§2.7 ou §4.3).* On a déjà tous les outils nécessaires pour intégrer les fonctions qui contiennent $ax^2 + bx + c$ (n'importe où).

Rappelons comment compléter le carré.

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= \underline{\hspace{7cm}} \\
&= \underline{\hspace{12cm}} \\
&= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right)
\end{aligned}$$

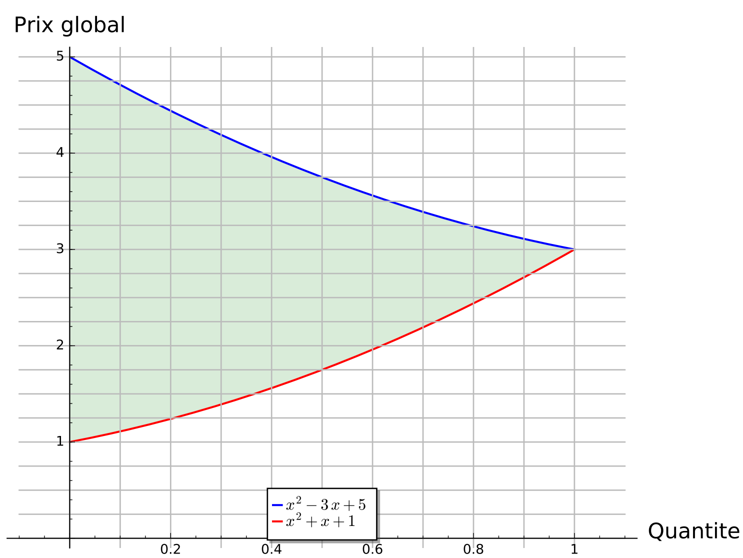
D'ici, on peut utiliser les méthodes précedentes pour trouver l'intégrale.

**Exemple 5.5** Faisons un exemple : $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-6x+14}}\,dx$.

$$
\begin{aligned}
x^2-6x+14 &= \underline{\hspace{20em}}\\
\int \frac{1}{\sqrt{x^2-6x+14}}\,dx &= \underline{\hspace{12em}}\\
\Rightarrow &\ \underline{\hspace{24em}}\\
\therefore \quad &= \int \frac{\sqrt{5}\sec^2(\theta)}{\sqrt{5\tan^2(\theta)+5}}\,d\theta\\
&= \int \frac{\sqrt{5}\sec^2(\theta)}{\sqrt{5}\sqrt{\tan^2(\theta)+1}}\,d\theta\\
&= \int \frac{\sec^2(\theta)}{\sqrt{\sec^2(\theta)}}\,d\theta\\
&= \int \sec(\theta)\,d\theta\\
&= \underline{\hspace{14em}}\\
&= \ln\left(\left|\frac{\sqrt{(x-3)^2+5}}{\sqrt{5}}+\frac{x-3}{\sqrt{5}}\right|\right)+c
\end{aligned}
$$

5.2.2. *Applications en économie (§3.1 ou §3.5).*

(1) **Surplus du consommateur et surplus du producteur :**




La ________________ est la quantité demandée selon le prix. Quand le prix diminue, la publique veut en acheter plus, alors la quantité demandée augmente. L'________ est la quantité offert selon le prix. Si le prix augmente, le/lau vendeur/vendeuxe veut vendre plus, alors la quantité offerte augmente aussi. Donc la courbe du haut $D(x)$ est la fonction de demande et le courbe en bas $O(x)$ est la fonction d'offre.

Le *surplus du consommateur* ______ représente l'économie que l'ensemble des consommateurs ont pu réaliser en achetant l'article au prix courant plutôt qu'à un prix plus élevé qu'ils étaient prêts à payer. Le *surplus du producteur* ______ est le montant supplémentaire que l'ensemble des producteurs ont pu amasser en vendant le produit au prix courant plutôt qu'à un prix moindre qu'ils étaient prêts à accepter.

Le *surplus total* ______ est la somme du surplus du consommateur et du surplus du producteur. Ça veut dire que ____________________________. Alors, $ST =$ l'aire entre $D(X)$ et $O(x)$.

Donc, pour trouver le total il faut trouver le ______________________________ qui est le point où les deux courbes sont égales. Après on fait l'intégrale.

Si $D(x) = x^2 - 3x + 5$ et $O(x) = x^2 + x + 1$ il faut tout d'abord, trouver quand les deux fonctions sont égales. On a $D(x) = O(x)$ quand $x^2 - 3x + 5 = x^2 + x + 1$. Alors Alors, c'est quand $x =$ __.

Donc on a

$$\begin{aligned} ST &= \underline{\hspace{6cm}} \\ &= \int_0^1 x^2 - 3x + 5 - x^2 - x - 1\,dx \\ &= \underline{\hspace{4.5cm}} \\ &= -2x^2 + 4x\Big|_0^1 \\ &= -2 + 4 = 2. \end{aligned}$$

Ainsi, il y a un surplus de \$ 2.

(2) **Courbe de Lorenz et coefficient de Gini**

Il y a plusieurs mesures pour quantifier l'inégalité des revenus dans une société. Vers 1905 Max Otto Lorenz a introduit une approche graphique permettant de mesurer l'inégalité. Il a utilisé ce qu'on appelle la

________________________. Une courbe de Lorenz $L(x)$ possède les propriétés suivantes :

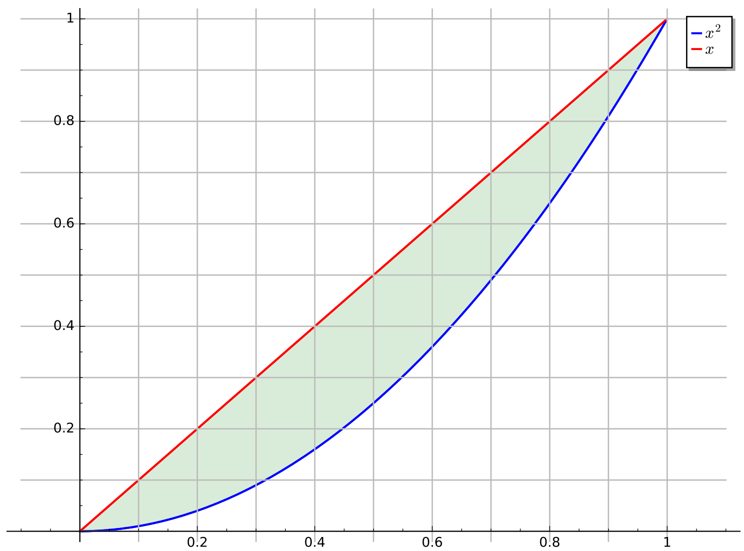
(a) Le domaine et l'image sont entre 0 et 1

(b) $L(0) =$ __ et $L(1) =$ __.

(c) $L$ doit être une fonction ______________ sur $[0, 1]$.

(d) $L$ doit être concave vers le haut sur $]0, 1[$.

(e) $L(x) \leq$ __ pour tout $x$.




Donc on veut minimiser l'aire entre les deux courbes ! Ça c'est exactement ce l'italien Corrado Gini a pensé à l'époque. Ainsi, il a decidé de calculer le quotient entre l'aire en dessous de la courbe $x$ et l'aire entre les deux courbes. Cette quotient est appellé ______________________________.
Il est donné par

**Exemple 5.6** Faisons un exemple. Supposons que la courbe de Lorenz est donnée par $L(x) = x^{1.8}$. Alors

$$\begin{aligned}
G &= \underline{\hspace{6cm}} \\
&= \underline{\hspace{5.7cm}} \\
&= 2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^{2.8}}{2.8}\right)\bigg|_0^1 \\
&= 2\left(\frac{1^2}{2} - \frac{1^{2.8}}{2.8}\right) \\
&= \underline{\hspace{3cm}} \\
&= 1 - \frac{10}{14} \\
&= \frac{14}{14} - \frac{10}{14} \\
&= \frac{4}{14} \\
&= \frac{2}{7} \cong 0.2857
\end{aligned}$$