4. Semaine 4 : 15 octobre 2018

4.1. **Partie 1.**

4.1.1. *Rappel.*

4.1.2. *Intégration par parties (§2.4 ou §4.1).* Disons que $f(x) = u$ et $g(x) = v$. Alors $d(uv) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x) = udv + vdu$. Donc, on peut avoir $\int_a^b d(uv) = \int_a^b udv + \int_a^b vdu$. Ça nous donne :

La version indéfinie est donnée par :

Une intégration utilisant la propriété a-dessus est une ____. Faisons des exemples.

Exemples 4.1 (1) $\int (e^x)^2\,dx = ?$

$$u = e^x \qquad dv = e^x\,dx$$
$$du = e^x\,dx \qquad v = e^x$$
$$\int (e^x)^2\,dx = (e^x)^2 - \int (e^x)(e^x\,dx)$$
$$2\int (e^x)^2\,dx = (e^x)^2$$
$$\int (e^x)^2\,dx = \frac{(e^x)^2}{2} + c$$

(2) $\int x\cos(x)\,dx =$

(3) $\int x^2\sin(x)\,dx =$

(4) $\int e^x \sin(x)\, dx =$

Des indices : Supposons qu'on a $\int f(x)g(x)\, dx$. Si $f(x)$ est un polynôme, on veut toujours essayer avec $u = f(x)$ et $dv = g(x)\, dx$. Si $f(x)$ est une exponentielle et $g(x)$ une fonction trigonométrique, on peut choisir n'importe laquelle pour u et l'autre pour dv.

Aide mémoire

L ______

I ____

A ____________

T _________________________

E ____________________

4.1.3. *Intégration de fonctions trigonométriques (§2.5 ou §4.2).* Des fois, il faut utiliser des identités trigonométriques pour faciliter les intégrales. Voici une liste qui peut t'aider :

(1) $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

(2) $1 + \tan^2(x) =$ ____________

(3) $1 + \cot^2(x) =$ ____________

(4) $\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\left(\sin(x-y) + \sin(x+y)\right)$

(5) $\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)$

(6) $\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) + \cos(x+y)\right)$

(7) $\sin(x \pm y) =$ ____

(8) $\cos(x \pm y) =$ ____

On peut utiliser cette liste pour avoir des identitées plus simple :

Pourquoi ça nous aide ?

Exemple 4.2 Essayons de trouver l'intégrale : $\int \sin(32x)\cos(3501x)\,dx$. Utilisons l'intégration par parties !

$$u = \sin(32x) \qquad dv = \cos(3501x)\,dx$$
$$du = \cos(32x) \qquad v = \frac{\sin(3501x)}{3501}$$

$\int \sin(32x)\cos(3501x)\,dx =$ ____

On a le même problème ! Rien a changé. ☹ Alors on va utiliser une identité trigonométrique.

$\sin(32x)\cos(3501x) =$ ____

$\int \sin(32x)\cos(3501x)\,dx =$ ____

$$= \frac{-\cos(-3469x)}{2 * -3469} + \frac{-\cos(3533x)}{2 * 3533}$$
$$= \frac{\cos(-3469x)}{6938} + \frac{-\cos(3533x)}{7066}$$

4.1.4. *Les intégrales du type $\int \sin^m(x)\cos^n(x)\,dx$ (§2.5.2 ou §4.2).* Supposons qu'on a l'intégrale : $\int \sin^m(x)\cos^n(x)\,dx$. On a plusieurs astuces pour trouver une primitive.

(1) Si m ou n est impair, on a un moyen pour la trouver. Supposons $m = 2k+1$. On peut utiliser l'intégration par substitution !

$$u = \cos(x) \qquad du = -\sin(x)\,dx$$

$$\begin{aligned}
\int \sin^m(x)\cos^n(x)\,dx &= \int \sin^{2k+1}(x)u^n \frac{du}{-\sin(x)} \\
&= -\int \sin^{2k}(x)u^n du \\
&= -\int (\sin^2(x))^k u^n du \\
&= -\int (1-\cos^2(x))^k u^n du \\
&= -\int (1-u^2)^k u^n du
\end{aligned}$$

Alors essayons ça dans un vrai exemple : $\int \cos^5(x)\sin^2(x)\,dx$. On a $5 = 2\cdot 2+1$, donc impair !

$$u = \sin(x) \qquad du = \cos(x)\,dx$$

$$\begin{aligned}
\int \cos^5(x)\sin^2(x)\,dx &= \rule{8cm}{0.4pt} \\
&= \int \left(\cos^2(x)\right)^2 u^2 du \\
&= \rule{7cm}{0.4pt} \\
&= \int \left(1-u^2\right)^2 u^2 du \\
&= \rule{7cm}{0.4pt} \\
&= \int u^2 - 2u^4 + u^6 du \\
&= \int u^2 du - 2\int u^4 du + \int u^6 du \\
&= \frac{u^3}{3} - 2\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + c \\
&= \frac{\sin^3(x)}{3} - \frac{2\sin^5(x)}{5} + \frac{\sin^7(x)}{7} + c
\end{aligned}$$

Et quelque chose plus difficile : $\int \sin^3(x)\cos^{(-3/7)}(x)\,dx$

4.2. **Partie 2.**

(2) Si m et n sont pairs et non négatifs. On va utiliser les trois propriétés qu'on a vu avant :

(a) $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$

(b) $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$

(c) $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

En utilisant ces formules, on fait des manipulations pour diminuer au max le degré.

Exemple 4.3 Faison l'exemple : $\int \sin^4(x)\cos^2(x)\,dx$

$$\begin{aligned}
\int \sin^4(x)\cos^2(x)\,dx &= \underline{\hspace{10cm}} \\
&= \int \frac{1-\cos(2x)}{2} \cdot \left(\frac{\sin(2x)}{2}\right)^2 dx \\
&= \int \frac{1-\cos(2x)}{2} \cdot \frac{\sin^2(2x)}{4}\,dx \\
&= \int \frac{\sin^2(2x)}{8} - \frac{\sin^2(2x)\cos(2x)}{8}\,dx \\
&= \underline{\hspace{10cm}} \\
&= \frac{1}{16}\left(\int 1\,dx - \int \cos(4x)\,dx\right) - \frac{1}{8}\int \sin^2(2x)\cos(2x)\,dx \\
&= \frac{x}{16} - \frac{\sin(4x)}{64} + c - \frac{1}{8}\int \sin^2(2x)\cos(2x)\,dx
\end{aligned}$$

Alors il faut résoudre $\int \sin^2(2x)\cos(2x)\,dx$

$$u = \sin(2x) \qquad du = 2\cos(2x)\,dx$$

$$\begin{aligned}
\int \sin^2(2x)\cos(2x)\,dx &= \underline{\hspace{15em}} \\
&= \int \frac{u^2}{2} du \\
&= \frac{u^3}{6} + c \\
&= \frac{\sin^3(2x)}{6} + c
\end{aligned}$$

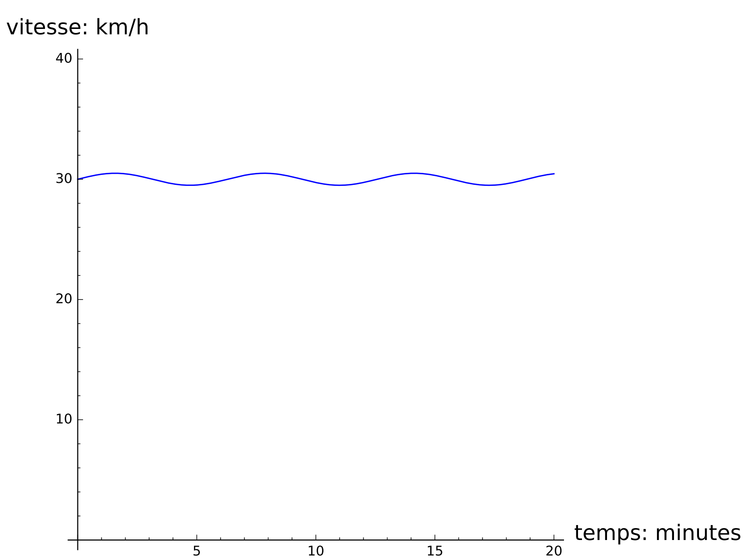
Alors, on a

$$\begin{aligned}
\int \sin^4(x)\cos^2(x)\,dx &= \frac{x}{16} - \frac{\sin(4x)}{64} + c - \frac{1}{8}\int \sin^2(2x)\cos(2x)\,dx \\
&= \frac{x}{16} - \frac{\sin(4x)}{64} + c - \frac{1}{8}\left(\frac{\sin^3(2x)}{6}\right) \\
&= \frac{x}{16} - \frac{\sin(4x)}{64} - \frac{\sin^3(2x)}{48} + c
\end{aligned}$$

4.2.1. *Applications en physique (- ou §3.5).*

(1) **Accélération, vitesse et déplacement**

Dans le cours de calcul différentiel, tu as probablement appris qu'il y a un lien entre l'accélération, la vitesse et le déplacement d'un objet. En effet, si on sait la distance qu'un objet à deplacer pendant un intervalle du temps, on peut trouver sa vitesse et sa acceleratin. Mais on peut utiliser l'intégrale pour aller dans l'ature sens. Supposons que tu est en train de conduire et ta vitesse est donnée par $\sin(x)/2 + 30$:



Donc, ça veut dire que à un chque instant ton pied est sur l'accélérateur ou non. Pour voir l'accélération à un moment donné, on peut calculer la derivée pour trouver notre accélération :

$$\frac{d(\frac{\sin(x)}{2} + 30)}{dx} = \frac{\cos(x)}{2}$$

Mais, si on veut connaître la distance qu'on a parcouré il faut faire l'intégration !

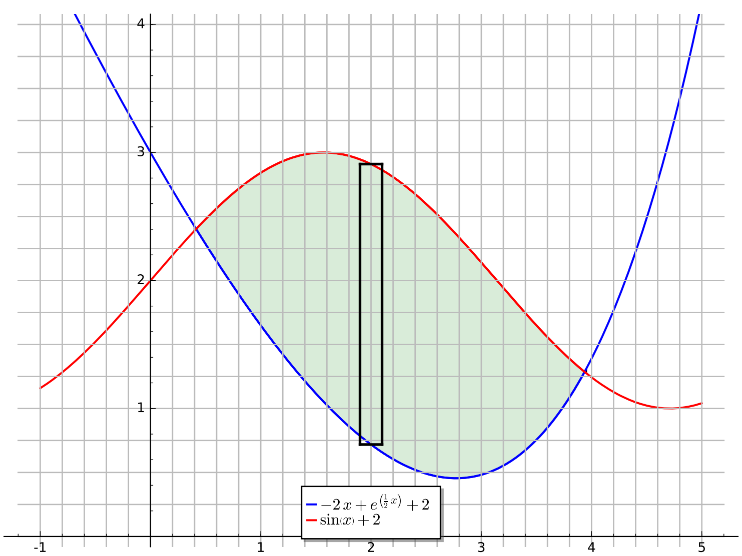
Donc disons que on a conduit pendant 25 minutes, alors, pour calculer la distance parcouré il suffit de faire l'intégrale :

$$\int_0^{25} \frac{\sin(x)}{2} + 30\, dx =$$

Mais, ça nous donne pas la bonne réponse ! Il faut diviser par 60 parce que l'axe vertical est en "heures" et l'axe horizontal est en "minutes". Donc on a

(2) **Centre de gravité**

Le ______________ d'un objet mesure la tendence à tourner autour d'un axe. Les moments par rapport aux axes x et y sont donnés par : où $(\bar{x}, \bar{y})$ est le *centre de gravité* de la surface et A est l'aire. Alors, comment est-ce qu'on peut trouver les moments ?



Ici, le centre de gravité pour la petite boite est donné par $\left(x_i, \frac{f(x_i)+g(x_i)}{2}\right)$. Donc

$$M_{x_i} = \bar{y}_i A_i = \left(\frac{f(x_i) + g(x_i)}{2}\right) \left(\left(f(x_i) - g(x_i)\right) \Delta x_i\right)$$

Alors, on peut faire

$$M_x =$$

Dans l'autre sens

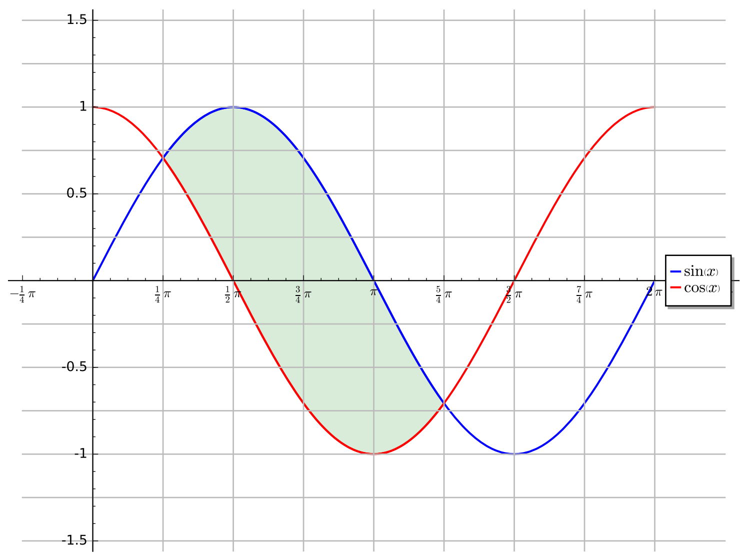
$$M_{y_i} = \bar{x}_i A_i = x_i \left(f(x_i) - g(x_i)\right) \Delta x_i$$

Donc,

$$M_y =$$

Exemple 4.4 Alors, faisons un exemple pour trouver le centre de gravité entre deux fonctions. Posons

$$f(x) = \sin(x) \qquad g(x) = \cos(x)$$



Donc, pour trouver le centre de gravité on a les formules :

$$M_x = \bar{y}A \qquad M_y\bar{x}A$$

Alors il faut trouver A, M_x, et M_y.

$$\begin{aligned}
A &= \\
&= -\cos(x) - \sin(x)|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \\
&= -\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) + \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&= -\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{-\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
&= 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_x &= \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_y &= \\
&= \frac{3\pi\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

Donc

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{\frac{3\pi\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{3\pi}{4} \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{A} = 0$$