3. Semaine 3 : 24 septembre 2018

3.1. **Partie 1.**

3.1.1. *Rappel.*

3.1.2. *Changement de variable(§2.3 ou §2.2).*

Soit deux polynômes $P(x)$ et $Q(x)$. Une fonction ________________ est une fonction de la forme $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Rappelons que le ________ d'un polynôme est le degré le plus élevé de ses termes. Si le degré du numérateur est inférieur au degré du dénominateur, on dit que la fonction est une ________________________. Sinon, c'est une ____________________________.

Exemple 3.1 Lequelles sont propres ?

$$\frac{x^7 - x^6 + 2}{x^5 - 97} \;\_\_\_\_\_\_\_\_ \qquad \frac{x^3 + 1}{x^3 + 2} \;\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$\frac{x^2 + 99001}{x^3} \;\_\_\_\_\_\_\_\_ \qquad \frac{(x+1)(x^2-3)^3}{(x-8)(x^3+2)(x^2+x-1)^2} \;\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Si notre fraction n'est pas propre, on fait la division.

Exemple 3.2 Soit

$$P(x) = 2x^6 - x^5 - x^4 + 3x - 3 \quad Q(x) = x^4 - x^3 \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x^6 - x^5 - x^4 + 3x - 3}{x^4 - x^3}$$

une fraction impropre. Faisons la division. Alors

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x^6 - x^5 - x^4 + 3x - 3}{x^4 - x^3} = 2x^2+x+\frac{3x-3}{x^4-x^3} = 2x^2+x+\frac{3(x-1)}{x^3(x-1)} = 2x^2+x+\frac{3}{x^3}$$

Et pourquoi on a fait ça ? Pour avoir une fonction plus facile pour faire l'intégration :

Mais, on a encore un problème. Qu'est-ce qu'on peut faire avec une intégrale comme : ________________________ ?

Avec les choses qu'on a vu, on a aucun moyen de faire cette intégrale. Heureusement, on peut appliquer une strategie qui s'appelle ____.

On aimerait avoir quelque chose plus simple. Ça serait cool si on peut changer notre intégrale pour être : $\int x^{7/9}\,dx$ parce que là, on sait ce qu'il faut faire. Alors, on va essayer de faire ça.

Mettons $u = 3x+2$. Alors, on a bien $\int u^{7/9}\,dx$. C'est quoi le problème ? ____________________

Alors on va faire :

$$u = 3x + 2 \Rightarrow \underline{\hspace{4cm}}$$

et alors

$$\begin{aligned}\int (3x+2)^{7/9}\,dx &= \underline{\hspace{4cm}} \\ &= \frac{1}{3}\int u^{7/9}\,du \\ &= \underline{\hspace{4cm}} \\ &= \frac{9}{3\cdot 16}u^{16/9} + c \\ &= \frac{3}{16}(3x+2)^{16/9} + c\end{aligned}$$

Et voilà, c'est fait ! Qu'est-ce qu'on a fait ?

(1) ______________________________
(2) _________________________________
(3) ____
(4) ______________________________
(5) ____

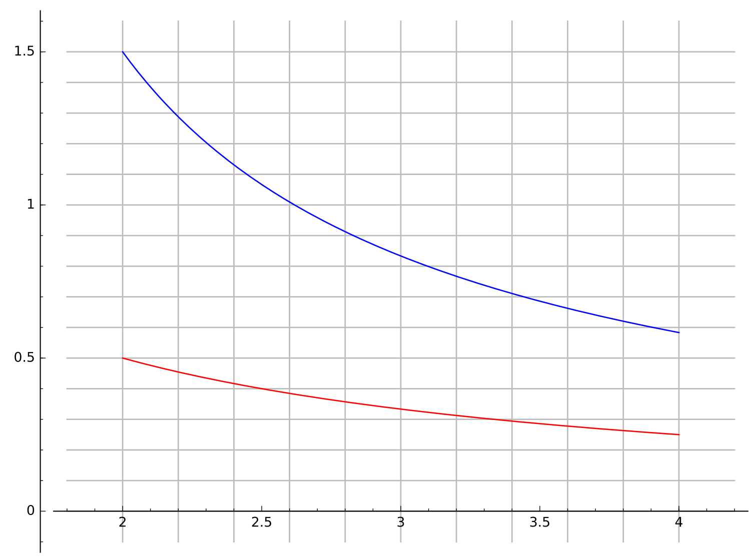
À ton tour, essaye-le. Trouver l'intégrale indéfinie : $\int x(7x^2-8)^{16/7}\,dx$

Mais on a fait tout ça pour pouvoir calculer des intégrales définies ! Alors, qu'est-ce que passe pour ça ?

Trouvons l'intégrale définie : $\int_2^4 \frac{2x-1}{x^2-x}\,dx$ Les changements de variable : Alors

Mais il y a encore un nouveau problème ! ______________________________.

Regardons les deux fonctions ensemble. Celui de x en haut (bleue) et celui de u en bas (rouge).



Alors, on va faire comme on a fait avec le dx.

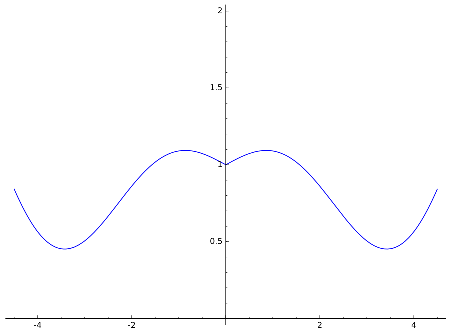
Théorème 3.3 (Changement de variable dans une intégrale définie) *Si $g'(x)$ est une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ et si $f(x)$ est une fonction continue qui admet ____________________ sur l'intervalle couvrant les valeurs $g(a)$ et $g(b)$, alors*

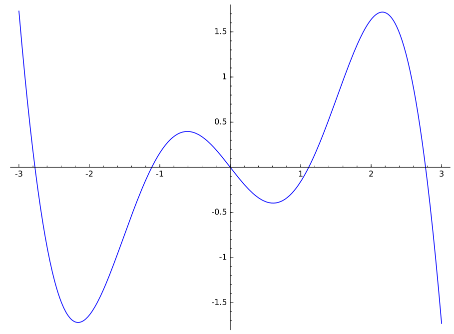
$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \underline{\hspace{6cm}}$$

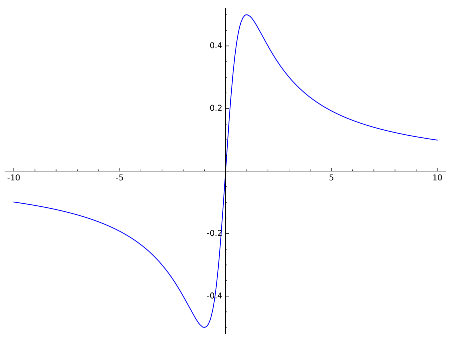
Essayons quelque chose plus fun : $\int \operatorname{cotan}(ax)\,dx$ pour $a \in \mathbb{R}$.

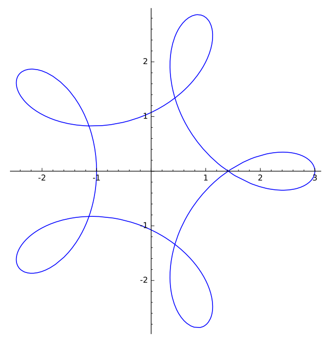
3.2. **Partie 2.**

3.2.1. *Fonctions paires et impaires (§2.3.3 ou -).* On dit qu'une fonction $f(x)$ est ________ si $f(-x) = f(x)$ et ____________ si $f(-x) = -f(x)$ Des exemples :









Théorème 3.4 (Propriétés des fonctions paires et impaires) *Si $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont des fonctions paires et si $g_1(x)$ et $g_2(x)$ sont des fonctions impaires, alors, là où les opérations sont définies :*

(1) $f_1(x)f_2(x)$ et $g_1(x)g_2(x)$ sont fonctions $\underline{\hspace{3cm}}$.

(2) $f_1(x)g_1(x)$ est une fonction $\underline{\hspace{4cm}}$.

(3) $\int_{-a}^{a} f_1(x)\,dx = \underline{\hspace{7cm}}$

(4) $\int_{-a}^{a} g_1(x)\,dx = \underline{\hspace{0.6cm}}$

Démonstration. On va montrer que

$$\int_{-a}^{a} f_1(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f_1(x)\,dx$$

Soit une fonction paire $f(x)$. Par définition $f(-x) = f(x)$.

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\
&= \underline{\hspace{10cm}} \\
&= -\int_{a}^{0} f(u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\
&= \int_{0}^{a} f(u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\
&= \underline{\hspace{9cm}} \\
&= 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx
\end{aligned}$$

$\square$

Exemple 3.5

$$\int_{-a}^{a} x^2\sin(x) - x^7 + x\cos(x)\,dx = \underline{\hspace{0.5cm}}$$

3.2.2. *Complétion du carré (§2.3.4 ou -).* On va regarder les trois intégrales suivantes :

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \underline{\hspace{5cm}} \\
\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx &= \underline{\hspace{5.5cm}} \\
\int \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \underline{\hspace{5cm}}
\end{aligned}$$

Ils ont tous la forme : ______________. Alors, on va trouver une façon de changer un polynôme $ax^2 + bx + c$ en un polynôme de la forme $\pm x^2 \pm 1$. On appelle ça : ___________________________________. Cela consiste à transformer notre polynôme dans la façon suivante :

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\
&= \underline{\hspace{12cm}} \\
&= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b}{4a^2}\right)\right)
\end{aligned}$$

Mais, pour vrai, c'est trop difficile de mémoriser cette formule. La seule partie qu'il faut vraiment se rappeler est comment choisir notre $\frac{b^2}{4a^2}$. Et pour ça, c'est plus simple de commencer avec un exemple très facile :

Exemple 3.6

$$x^2 + bx$$

Ici, on a déjà que $a = 1$ et $c = 0$, mais comme j'ai dit, on ne va pas regarder ça pour l'instant. On veut changer $x^2 + bx$ en "un carré".

Donc, on va faire l'inverse. Supposons qu'on a :

$$(x+d)^2 = \rule{5cm}{0.4pt}$$

Ainsi, dans l'autre sense, il faut diviser notre b par 2 ce qui nous donne :

$$x^2 + bx =$$

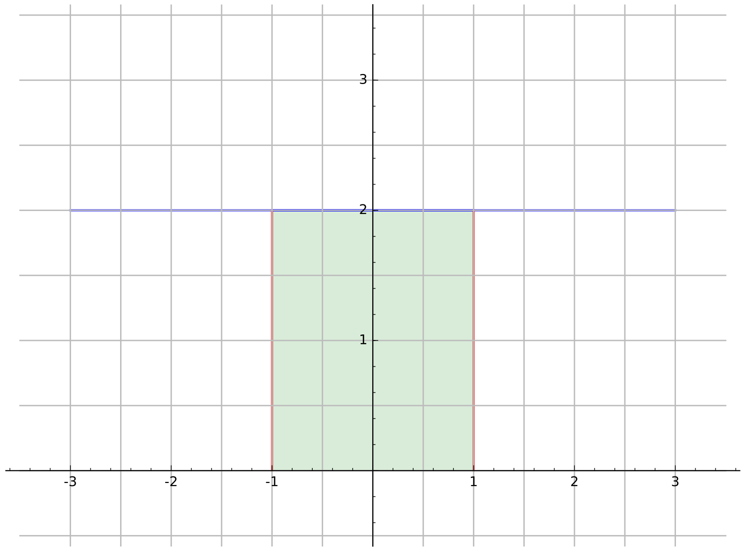
Exemple 3.7 Essayons avec des exemples réel :

$$\begin{aligned}
x^2 + 8x &= x^2 + 8x + 4^2 - 4^2 = (x+4)^2 - 4^2 \\
x^2 - 7x &= \\
2x^2 + 4x &= \\
3x^2 - 5x &= \\
x^2 + 4x - 1 &=
\end{aligned}$$

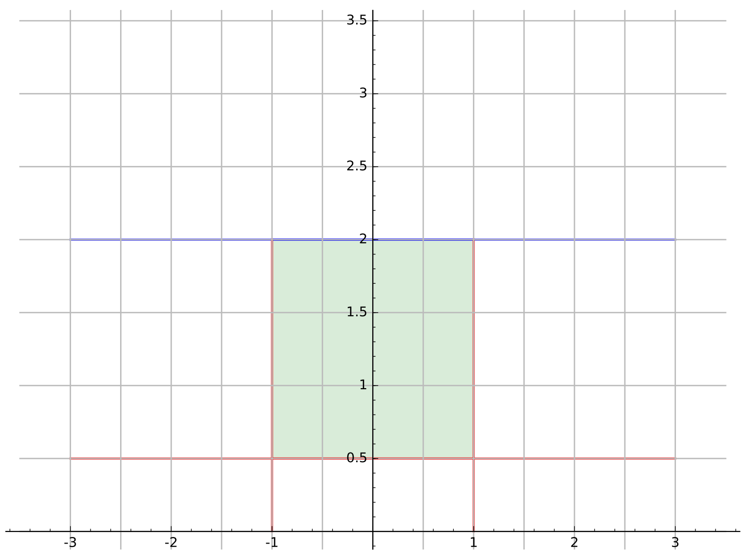
Alors, maintenant, on peut faire les intégrations qu'on voulait au début :

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{-2x^2 - 12x - 10}}\,dx$$

3.2.3. *L'aire d'une surface plane (§3.1 ou §3.4).* Disons qu'on veut l'aire d'une surface comme une carrée



On veut utiliser l'intégration pour trouver l'aire. Depuis le début du cours, on sait déjà que $\int_{-1}^{1} 2\,dx$ va nous donner l'aire. Mais qu'est-ce qu'on peut faire si on change la taille de notre carrée ?



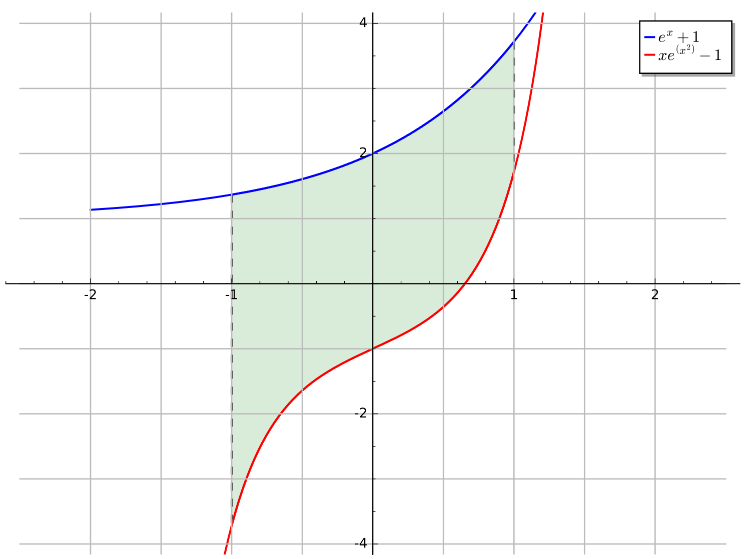
On peut le voir comme l'aire de la fonction en haut moins l'aire de la fonction en bas. C'est-à-dire

$$\int_{-1}^{1} \left(2 - \frac{1}{2}\right) dx =$$

$$= 3$$

Mais ça c'était trop facile. Donc prenons quelque chose de plus difficile.

Exemple 3.8 C'est quoi l'aire entre ces deux courbes ?



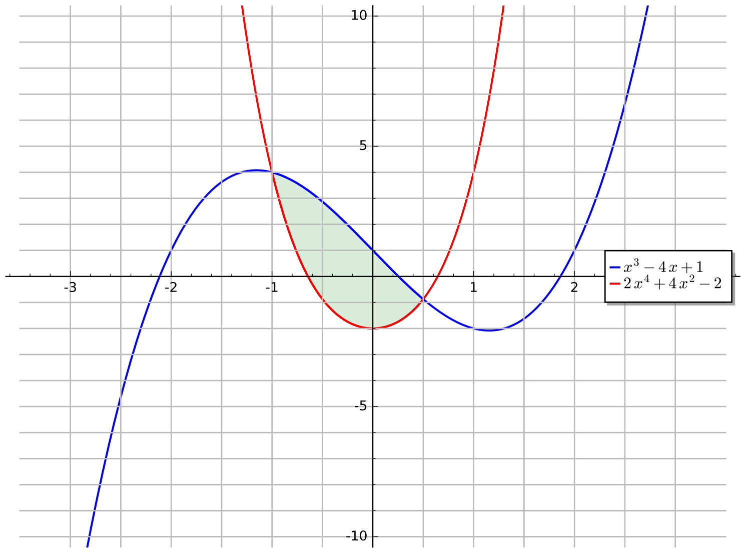
En bleu on a la fonction $e^x + 1$ et en rouge on a la fonction $xe^x - 1$.

On va faire la même chose. On trouve l'aire sous la courbe du haut et on soustrait l'aire sous la courbe du bas. Donc, on a

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} e^x \, dx &= e^x\big|_{-1}^{1} = e^1 - e^{-1} \\
\int_{-1}^{1} 2 \, dx &= 2x\big|_{-1}^{1} = 2 \cdot 1 - 2 \cdot -1 = 2 + 2 = 4 \\
\int_{-1}^{1} xe^{(x^2)} \, dx &= \\
&= 0
\end{aligned}$$

Alors l'aire est $e^1 - e^{-1} + 4$.

Exemple 3.9 Faisons un autre exemple



Donc en bleue on a $x^3 - 4x + 1$ et en rouge on a $2x^4 + 4x^2 - 2$. Si on veut l'aire du milieu il faut premièrement trouver où ces deux courbes intersectent.

Elles intersectent quand ____.
Donc il faut trouver les racines de $2x^4 - x^3 + 4x^2 + 4x - 3$.

Ainsi, il faut utiliser les ______________________ : p/q est une racine d'un polynôme $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ si $p|a_0$ et $q|a_n$. Alors, on sait que les racines doivent être dans l'ensemble : $\left\{\pm 3, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\}$.

Si on regarde notre image, ça nous donne des indices. Donc, on va voir si -1 et $\frac{1}{2}$ sont des racines.

$$\text{Si } x = -1 \;\Rightarrow\; \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

Alors ____________________________.

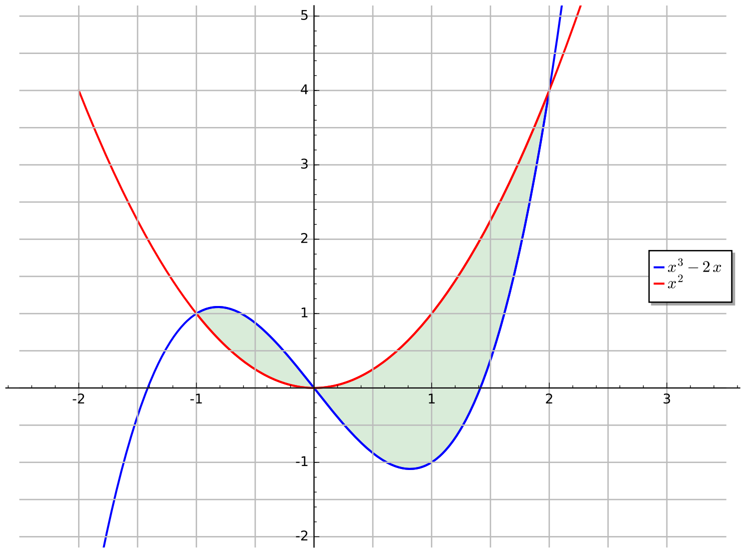
Si $x = \dfrac{1}{2} \;\Rightarrow$ ____

Ainsi __________________________________.

Alors, on peut maintenant trouver l'aire. Mais, il faut savoir quelle fonction on soutraite de l'autre. On peut voir que la bleue est au dessus donc, on fait

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \left(x^3 - 4x + 1\right) - \left(2x^4 + 4x^2 - 2\right)\, dx &= \overline{} \\
&= \frac{-2x^5}{5} + \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 3x \Big|_{-1}^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{-2}{5 \cdot 2^5} + \frac{1}{2^2 \cdot 2^4} - \frac{2^2}{3 \cdot 2^3} - \frac{2^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{3}{2}\right) \\
&\quad - \left(\frac{-2 \cdot -1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{4 \cdot -1}{3} - \frac{4}{2} + 3 \cdot -1\right) \\
&= \frac{-2 \cdot 2 \cdot 3 + 5 \cdot 3 - 2^2 \cdot 2^3 \cdot 5 - 2^2 \cdot 2^3 \cdot 5 \cdot 3 + 3 \cdot 2^5 \cdot 5 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 2^6} \\
&\quad - \frac{2 \cdot 4 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 4 \cdot 5 - 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 - 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5}{5 \cdot 4 \cdot 3} \\
&= \frac{-12 + 15 - 160 - 480 + 1440}{3 \cdot 5 \cdot 2^6} - \frac{24 + 15 + 80 - 120 - 180}{3 \cdot 4 \cdot 5} \\
&= \frac{803}{3 \cdot 5 \cdot 2^6} - \frac{-181}{3 \cdot 5 \cdot 2^2} \\
&= \frac{803 + 181 \cdot 2^4}{3 \cdot 5 \cdot 2^6} \\
&= \frac{803 + 2896}{3 \cdot 5 \cdot 2^6} \\
&= \frac{3699}{3 \cdot 5 \cdot 2^6} \\
&= \frac{1233}{5 \cdot 2^6} \\
&= \frac{1233}{320}
\end{aligned}
$$

Exemple 3.10 Un dernier exemple. Si on veut l'air dans les deux regions suivant :



5
4
3
2
1
-1
-2
-2
-1
1
2
3
$x^3 - 2x$
x^2