11. Semaine 11 : 10 decembre 2018

11.1. **Partie 1.**

11.1.1. *Rappel.*

Examen Pratique

11.2. **Partie 2.**

11.2.1. *Récapitulation - Un grand rappel.* Qu'est-ce que vous aimeriez voir ?

(1) **Longueur de courbes planes** Soit $y = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}$. Trouver la longueur de la courbe entre l'origine et le point $(2, 2)$.

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = \int_{\_}^{\_} \sqrt{1 + (\underline{\qquad})^2}\, dx$$

$$= \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$= \left. \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_1^3$$

$$= \frac{2 \cdot 3^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2}{3}$$

(2) **Intégration de fonctions rationnelles par décomposition en une somme de fractions partielles** Trouver l'intégrale suivante :

$$\int \frac{3x^2 + 11x + 9}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}\, dx$$

$$\frac{3x^2 + 11x + 9}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4} = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$= \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$3x^2 + 11x + 9 = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$A = \underline{\quad}$$

$$B = \underline{\quad}$$

$$C = \underline{\quad}$$

$$\int \frac{3x^2 + 11x + 9}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}\, dx = \int \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}\, dx$$

$$= \ln(|x + 1|) + 2\ln(|x + 2|) + \frac{-2}{x + 2} + c$$

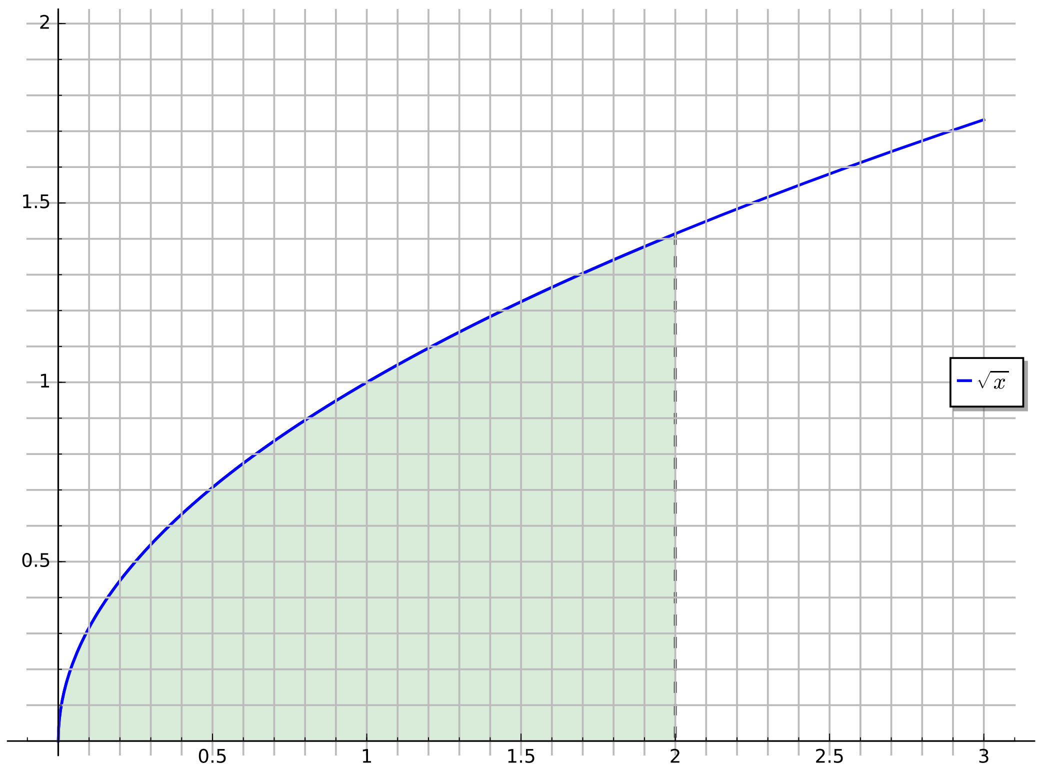
(3) **Volume de solides** On avait trois façons differentes pour trouver les volumes de la rotation d'une courbe autour d'un axe.

$$\int_a^b \pi\,(f(x))^2\, dx \quad \text{Méthode des } \underline{\qquad\qquad}$$

$$\int_a^b \pi\,(f(x))^2 - \pi\,(g(x))^2\, dx \quad \text{Méthode des } \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\int_a^b 2\pi x\,(f(x)-g(x))\ dx \quad \text{Méthode des } \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Exemple 11.1 Trouver le volume du solide engendré par la révolution autour de l'axe des x de la surface plane bornée par $y=\sqrt{x}$, $y=0$ et $x=2$.



$$\begin{aligned}\int_0^2 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\ dx &= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\\ &= \pi \frac{x^2}{2}\Big|_0^2\\ &= 2\pi\end{aligned}$$

(4) **Intégrales impropres**

(a) Si f est continue sur $[a,b[$ et $\lim_{x\to b^-} f(x)=\pm\infty$ alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

si la limite existe.

(b) Si f est continue sur $]a,b]$ et $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \rule{8cm}{0.4pt}$$

si la limite existe.

(c) Si f est continue sur $]a,b[$, $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$ alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \rule{17cm}{0.4pt}$$

si les limites existent pour un $c \in]a,b[$.

(a) Si f est continue sur $[a,\infty[$ alors

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \rule{8cm}{0.4pt}$$

si la limite existe.

(b) Si f est continue sur $]-\infty,b]$ alors

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \rule{8cm}{0.4pt}$$

si la limite existe.

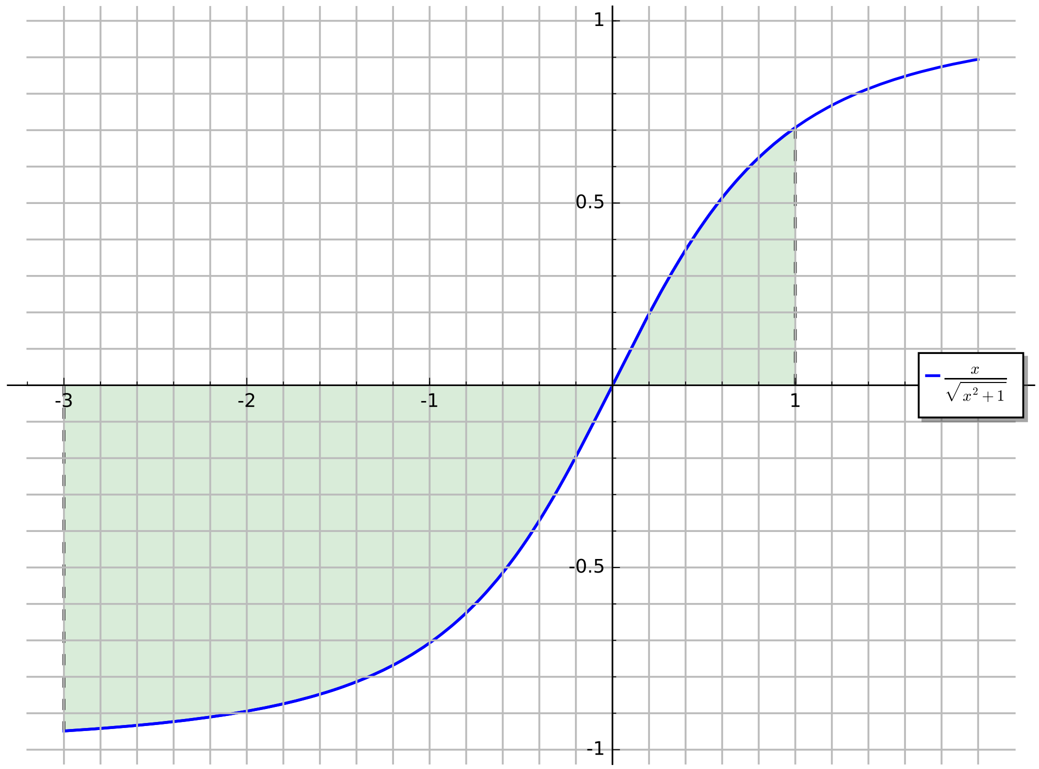
(c) Si f est continue sur $\mathbb{R}$ alors

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \rule{17cm}{0.4pt}$$

si les limites existent pour un $c \in \mathbb{R}$.

Exemple 11.2 Évaluer

$$\int_{-\infty}^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$



$$\int_{-\infty}^{1} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \underline{\hspace{12cm}}\,dx$$

$$= \underline{\hspace{13cm}}$$

$$= \lim_{A\to-\infty} \sqrt{u}\Big|_{x=A}^{x=1}$$

$$= \lim_{A\to-\infty} \sqrt{1+x^2}\Big|_{A}^{1}$$

$$= \sqrt{1+1^2} - \lim_{A\to-\infty}\sqrt{1+A^2}$$

$$= -\infty$$

Donc, l'intégrale diverge.

(5) **Aire d'une surface de révolution**

		Axe de rotation	
		Rotation autour de l'axe des x	Rotation autour de l'axe des y
Description de la courbe	$y = f(x)$ $x \in [a, b]$	$\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$	$\int_a^b 2\pi x\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$
	$x = g(y)$ $y \in [c, d]$	$\int_c^d 2\pi y\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$	$\int_c^d 2\pi g(y)\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$

Exemple 11.3 Calculer l'aire de la surface engendrée par la rotation de l'arc $y = \frac{x^3}{3}$ autour de l'axe des x de $x = 0$ à $x = 3$

$$\begin{aligned}
\int_{_}^{_} 2\pi \underline{\hspace{2em}} \sqrt{1 + (\underline{\hspace{2em}})^2}\, dx &= \underline{\hspace{15em}} \\
&= 2\pi \int_1^{82} \frac{\sqrt{u}}{12}\, du \\
&= \frac{\pi}{6}\, \frac{u^{3/2}}{3/2}\Big|_1^{82} \\
&= \frac{\pi}{9}\left(82^{3/2} - 1\right)
\end{aligned}$$

(6) **Équations différentielles**

$$y'' = 6x + 2$$

(a) C'est quoi l'ordre ? __

(b) C'est à variables séparables ? _____

(c) Donne une solution générale.

$$\begin{aligned}
y'' &= 6x + 2 \\
\underline{\hspace{8em}} &= \underline{\hspace{12em}} \\
y' &= 3x^2 + 2x + c_1 \\
\underline{\hspace{6em}} &= \underline{\hspace{18em}} \\
y &= x^3 + x^2 + c_1 x + c_2
\end{aligned}$$

(d) Si $(0, 1)$ et $(2, 14)$, c'est quoi la solution particulière ?

$x = 0,\ y = 1 \quad \Rightarrow \quad$ __________

$x = 2,\ y = 14 \quad \Rightarrow \quad$ __________

$y =$ ____________________

(7) **Suites**

Mot	Défn ou exemple
Suite	$1, 1, 1, 1, 1, \ldots$
Terme Général	$\{a_n\} = \{1\}$
Par Récurrence	Si on a des premiers termes et un terme général
Croissante	$a_n \geq a_{n-1}\ \forall n$
Strictement Croissante	$a_n > a_{n-1}\ \forall n$
Décroissante	$a_n \leq a_{n-1}\ \forall n$
Strictement Décroissante	$a_n < a_{n-1}\ \forall n$
Monotone	Soit croissante, soit décroissante
Bornée supérieurement	$\exists B \in \mathbb{R}$ t.q. $a_n \leq B\ \forall n$
Bornée inférieurement	$\exists b \in \mathbb{R}$ t.q. $a_n \geq b\ \forall n$
Bornée	Soit bornée sup, soit bornée inf
Convergente	Si il existe $L \in \mathbb{R}$ t.q. $\lim_{n\to\infty} a_n = L$
Divergente	Si $\lim_{n\to\infty} a_n$ n'existe pas ou c'est $\pm\infty$

On avait plein des théorèmes en plus.

Théorème 11.4 *Soit une suite $\{a_n\}$.*

- *Si $\{a_n\}$ converge alors elle est bornée.*
- *Si $\{a_n\}$ n'est pas bornée alors elle diverge.*
- *Si $\{a_n\}$ est monotone, alors elle converge ssi elle est bornée.*
- *Si $\{a_n\}$ converge vers 0 ssi $\{|a_n|\}$ coverge vers 0.*

Théorème 11.5 (Théorème du sandwich) *Soit les suites $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, t.q. $a_n \leq c_n \leq b_n$ pour tout $n \geq m$ pour $m \in \mathbb{N}$. Alors si $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ covergent vers L, alors $\{c_n\}$ converge vers L.*

Exemple 11.6 Est-ce que les suites suivantes convergent ou pas ?

(a) $\left\{\frac{3}{n}\right\}$? ______

(b) $\left\{\frac{n^2+1}{n+1}\right\}$? ______

(c) $\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$? ______

(d) $\left\{\frac{\sin(n)}{n}\right\}$? ______

(8) **Séries infinies** Une série est la somme $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ d'une suite $\{a_n\}$ où les sommes partielles sont $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

La série converge si $\lim_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$. Sinon, elle diverge.

Séries importantes

— Série arithmétique de premier terme a et de raison d : $\sum_{i=1}^{\infty} a+(i-1)d$.

$$S_n = na + \frac{n(n-1)}{2}d$$

— Série géométrique de premier terme a et de raison r : $\sum_{i=1}^{\infty} ar^{i-1}$.

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

Séries à termes positifs Soit $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum a_i$ où $a_i > 0$.

Critère	
Critère de l'intégrale	Si $f(n) = a_n$ est continue et décroissante sur $[1, \infty[$ alors $\sum a_i$ est convergente ssi $\int_1^\infty f(x)\,dx$ est convergente.
Série de Riemann	$\sum \frac{1}{i^p}$ converge ssi $p > 1$.
Critère des polynômes	Si $a_i = \frac{P(i)}{Q(i)}$ alors $\sum a_i$ converge ssi $\deg(Q) - \deg(P) > 1$.
Critère de d'Alembert	Soit $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$. Si $r > 1$ alors $\sum a_i$ diverge. Si $r < 1$ alors $\sum a_i$ converge.
Critère de Cauchy	Soit $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r$. Si $r < 1$ alors $\sum a_i$ converge. Si $r > 1$ alors $\sum a_i$ diverge.
Critère de comparaison	Si $\sum c_i$ converge et $c_i \geq a_i$ pour tout $i \geq k \in \mathbb{N}$ alors $\sum a_i$ converge. Si $\sum d_i$ diverge et $d_i \leq a_i$ pour tout $i \geq k \in \mathbb{N}$ alors $\sum a_i$ diverge.
Critère de comparaison à l'aide d'une limite	Si $\sum b_i$ t.q. $b_i > 0$. Soit $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in \mathbb{R}^+$, alors $\sum a_i$ converge ssi $\sum b_i$ converge.
Critère de la série alternée	Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ et $\{a_n\}$ est décroissante à partir d'un certain indice, alors $\sum (-1)^i a_i$ et $\sum (-1)^{i+1} a_i$ convergent.
Asboluement convergente	Si $\sum \lvert a_i \rvert$ converge, alors $\sum a_i$ converge.

Exemples 11.7 Est-ce que les séries suivantes converge ou diverge ?

(a) $\sum_{i=1}^\infty \frac{1}{i}$? ______

(b) $\sum_{i=1}^\infty \left(\frac{2n}{3n+4}\right)^n$? ______

(c) $\sum_{i=1}^\infty \frac{1}{i^3}$? ______

(d) $\sum_{i=1}^\infty \frac{i+3}{i^2+i}$? ______

(9) **Séries de puissances, de Taylor et de Maclaurin**

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i (x-a)^i = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

Le rayon de convergence r :

(a) Si la série converge seulement pour $x = a$ alors $r = 0$.

(b) Si la série converge pour tout x t.q. $|x - a| < r$ et diverge pour tout x t.q. $|x - a| > r$, alors le nombre r est le rayon de convergence.

(c) si la série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors $r = \infty$.

Théorème 11.8 *Si $\sum_{i=0}^{\infty} c_i(x-a)^i$ est une série de puissance, alors le rayon de convergence est donné par $r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$, dans le mesure où cette limite existe ou vaut l'infini.*

Série de Taylor :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$

Si $a = 0$ alors, c'est un série de Maclaurin.

Exemple 11.9 Développer la fonction $f(x) = \ln(x)$ en série de Taylor centrée en 1 et donner le rayon de convergence.

$f(x)$		$f(1)$	
$f'(x)$		$f'(1)$	
$f''(x)$		$f''(1)$	
$f'''(x)$		$f'''(1)$	
$f^{(4)}(x)$		$f^{(4)}(1)$	

$\ln(x) =$

Le rayon est donné par :

$r =$