10. Semaine 10 : 3 decembre 2018

Devoir 2 - Date d'échéance

10.1. **Partie 1.**

10.1.1. *Rappel.*

10.1.2. *Séries à termes positifs (§6.7 ou §6.3).* Maintenant, notre but est de savoir si les séries sont convergentes ou pas. Pour ça il existe plein de critères qu'on peut utiliser pour nous aider.

(1) **Critère de l'intégrale**

Théorème 10.1 *Soit $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ où $a_i > 0$ et f une fonction positive, continue et décroissante sur $[1, \infty[$ t.q. $f(n) = a_n$ pour tout n. Alors $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ et $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ sont convergentes toutes les deux ou sont divergentes toutes les deux.*

Exemple 10.2 Montrons que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i}}$ diverge. Posons $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ qui est bien positive, continue et décroissante sure $[\,1, \infty\,[$. Alors,

$$\int_1^{\infty} f(x) = \lim_{a\to\infty} \lim_1^a \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{a\to\infty} 2\sqrt{x}\Big|_1^a = 2 \lim_{a\to\infty} \sqrt{a} - 1 = \underline{\qquad}$$

Alors $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i}}$ diverge.

Une *série de Riemann* est une série de la forme ______________________________.

Théorème 10.3 *Soit une série de Riemann, $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^p}$, où $p \in \mathbb{R}$. Si $p \leq 1$ alors la série diverge. Si $p > 1$ alors la série converge.*

(2) **Critère des polynômes**

Théorème 10.4 *Soit la série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ où $a_i > 0$ et $a_i = \frac{P(i)}{Q(i)}$ t.q. $P(i)$ et $Q(i)$ sont deux polynômes de degrés respectifs p et q. Si $q - p \leq 1$ alors la série diverge. Si $q - p > 1$ alors la série converge.*

Exemple 10.5 Est-ce que les séries suivantes convergent ou divergent ?

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i+2}{i^4 + i^3 - i^2} \text{ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ },$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^3 + 3i^2}{i} \text{ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ },$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i+2}{i^2} \text{ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ }.$$

(3) **Critère de d'Alembert**

Théorème 10.6 *Soit la série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ où $a_i > 0$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$. Alors si $r < 1$ la série converge. Si $r > 1$ ou $r = \infty$ la série diverge. Si $r = 1$, alors on ne peut rien conclure.*

Exemple 10.7 Soit $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{e^i}$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{e^{i+1}}}{\frac{1}{e^i}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^i}{e^{i+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e} < 1$$

Alors $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{e^i}$ ________________.

Exemple 10.8 Soit $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{n}{2(n+1)}$. Alors,

(4) **Critère de Cauchy**

Théorème 10.9 *Soit la série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ où $a_i > 0$ et $r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. Si $r < 1$ alors $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge. Si $r > 1$ ou $r = \infty$ alors $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ diverge. Si $r = 1$ on peut rien conclure.*

Exemple 10.10 Soit $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^3 3^n}{n^3}$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n+1)^3 3^n}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} 3\left(\frac{2n+1}{n}\right)^{\frac{3}{n}} = 3\lim_{n\to\infty}\left(2 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{n}} = \_\_.$$

Donc, $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^3 3^n}{n^3}$ ______________.

(5) **Critère de comparaison**

Théorème 10.11 *Soit la série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ où $a_i > 0$. Si $a_i \leq c_i$ pour tout $i \geq n$ où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ et si $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$ converge, alors $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge. Si $a_i \geq d_i > 0$ pour tout $i \geq n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ et si $\sum_{i=1}^{\infty} d_i$ diverge, alors $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ diverge.*

Exemple 10.12 Soit la série $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{98+2\sin(i)}{i!}$. Parce que $0 \leq \frac{98+2\sin(i)}{i!}$ on peut utiliser le critère de comparaison.

$$\frac{98+2\sin(i)}{i!} \leq \frac{98+2}{i!} = \frac{100}{i!}$$

Et, car $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{100}{i!}$ ______________ on sait que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{98+2\sin(i)}{i!}$ ______________ aussi.

(6) **Critère de comparaison à l'aide d'une limite**

Théorème 10.13 *Soit la série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ où $a_i >$ et la série $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ où $b_i > 0$. Soit $L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$, si la limite existe, où $0 < L < \infty$, alors si $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ converge alors $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge aussi. Si $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ diverge alors $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ diverge aussi.*

Exemple 10.14 Vérifions si $\sum_{i=1}^{\infty} \sin\left(\frac{2}{\sqrt{i}}\right)$ converge ou pas. Soit $b_i = \frac{1}{\sqrt{i}}$. Alors

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\cos\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)\left(-x^{\frac{-3}{2}}\right)}{\frac{-1}{2}x^{\frac{-3}{2}}} \cdot n \\
&= \lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right) \cdot -1 \cdot -2 \\
&= 2 \cdot 1 = 2
\end{aligned}$$

Et parce que $\sum_{i=1}^{\infty} b_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i}}$ ____________, alors $\sum_{i=1}^{\infty} \sin\left(\frac{2}{\sqrt{i}}\right)$ ____________ aussi.

10.1.3. *Convergence absolue et convergence conditionnelle (§6.8 ou §6.4).* Une série alternée est une série de la forme suivante :

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} a_i \quad \text{ou} \quad -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \ldots = \underline{\hspace{4cm}}$$

Théorème 10.15 (Critère de Leibniz ou Critère de la série alternée) *Soit les séries alternées $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i a_i$ et $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} a_i$ où $a_i > 0$. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ et si la suite $\{a_n\}$ est décroissant à partir d'un certain indice, alors les deux séries convergent.*

Rappelons que si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ alors les séries divergent.

Exemple 10.16 Est-ce que la version alternée de la série harmonique converge ? $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{k}$. Alors on peut voir que $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$. De plus, elle est décroissante parce que si $f(x) = \frac{1}{x}$ alors $f'(x) = \frac{-1}{x^2} < 0$ pour tout $x > 0$. Donc la série converge !

On dit une série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ est ____________________ *convergente* si $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ converge.

Théorème 10.17 *Si $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ est absolument convergente alors elle est convergente.*

Si une série est convergente mais pas absolument convergente on dit qu'elle est ______________________________ *convergente.*

Exemple 10.18 On voit que $\sum_{i=1} \frac{(-1)^i}{i}$ n'est pas absolument convergente parce que la série harmonique :

$$\sum_{i=1} \left| \frac{(-1)^i}{i} \right| = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$$

ne converge pas. Mais parce que elle est convergente, on sait qu'elle est conditionnellement convergente.

Exemple 10.19 Soit $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos(i)}{i^3}$.

10.2. **Partie 2.**

10.2.1. *Séries de puissances (§6.9 ou §6.5).* Une *série de puissance en* $(x-a)$ (ou une ____) est une série de la forme :

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i(x-a)^i = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \dots$$

où $c_i \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.

Exemples 10.20 Des exemples :

(1) $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$
(2) $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(x-1)^i}{i}$
(3) $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{2i}{\sqrt{i+1}} (x-2)^i$
(4) __________________________

Si on regarde le premier exemple, on peut voir que si $|x| < 1$ alors elle va converger, et si $|x| > 1$ alors elle va diverger.

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^i = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} (2)^i = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots$$

Donc on peut voir que, selon notre choix de x, la série peut diverger ou converger. L'ensemble I de tous les x tels que la série de puissance converge s'appelle ____________________ *convergence*. Toute série de puissance a au moins un x tel que la série converge. En particulier si $x = a$ alors $\sum_{i=0}^{\infty} c_i(x-a)^i = 0$.

Le __________ *de convergence* r est défini comme suit :

(1) Si la série converge seulement pour $x = a$ alors $r = 0$.

(2) Si la série converge pour tout x t.q. $|x - a| < r$ et diverge pour tout x t.q. $|x - a| > r$, alors le nombre r est le rayon de convergence.

(3) si la série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors $r = \infty$.

Théorème 10.21 (Critère généralisé de d'Alembert) *Soit la série $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ où $u_i \neq 0$, et soit $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$. Si $R < 1$ alors la série converge absolument. Si $R > 1$ ou si $R = \infty$ alors la série diverge. Si $R = 1$ alors on peut rien conclure.*

Théorème 10.22 (Critère généralisé de Cauchy) *Soit la série $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ et soit $R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|}$. Si $R < 1$ alors elle converge absolument. Si $R > 1$ ou $R = \infty$ alors elle diverge. Si $R = 1$ alors on peut rien conclure.*

Théorème 10.23 *Si $\sum_{i=0}^{\infty} c_i(x-a)^i$ est une série de puissance, alors le rayon de convergence est donné par $r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$, dans le mesure où cette limite existe ou vaut l'infini.*

10.2.2. *Séries de Taylor et de Maclaurin (§6.10 ou §6.6).* Finalement, on veut savoir si on peut intégrer une série entière. La réponse est donné par le théorème suivant :

Théorème 10.24 *Si la série entière $\sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-a)^i$ a un rayon de convergence $r > 0$, alors la fonction définie par $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-a)^i$ est dérivable et intégrable sur $]a - r, a + r[$. De plus,*

$$f'(x) = \underline{\hspace{8cm}}$$

et

$$\int f(x)\,dx = \underline{\hspace{9cm}}$$

le rayon de convergence de ces deux nouvelles séries vaut également r.

Maintenant, faisons quelque chose un peu bizarre (comme toujours).

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-a)^i \Rightarrow f(a) = \underline{\hspace{2em}}$$

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{\infty} ia_i(x-a)^{i-1} \Rightarrow f'(a) = \underline{\hspace{2em}}$$

$$f''(x) = \sum_{i=2}^{\infty} i \cdot i-1 \cdot a_i(x-a)^{i-2} \Rightarrow f''(a) = \underline{\hspace{3em}}$$

$$f'''(x) = \sum_{i=3}^{\infty} i \cdot i-1 \cdot i-2 \cdot a_i(x-a)^{i-3} \Rightarrow f'''(a) = \underline{\hspace{8em}}$$

$$f^{(4)}(x) = \sum_{i=4}^{\infty} i \cdot i-1 \cdot i-2 \cdot i-3 \cdot a_i(x-a)^{i-4} \Rightarrow f''(a) = \underline{\hspace{9em}}$$

Donc, on a

$$f(x) = \underline{\hspace{18em}}$$

On appelle cette expression la *série de* ____________ *centrée en* a. Si $a = 0$ alors, c'est plutôt le *série de* ___________________.

Pour nous, la partie la plus importante c'est de trouver le développement de la fonction $f(x) = e^x$.

Exemple 10.25 Rappelons que si $f(x) = e^x$ alors $f'(x) = e^x$, et que $e^0 = 1$. Alors, si on veut la série de Maclaurin de $f(x) = e^x$ on trouve :

$$f(x) = \underline{\hspace{12em}} =$$

Mais quel est le rayon de convergence ? On a

$$\begin{aligned} r &= \underline{\hspace{11em}} \\ &= \underline{\hspace{16em}} \\ &= \lim_{n\to\infty} |n+1| \\ &= \infty \end{aligned}$$

Donc la série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier, pour x^2 ! Alors, on peut finalement résoudre un problème qu'on a vu au debut de cours : $\int e^{(x^2)}\, dx$.

$$e^{(x^2)} = \underline{\hspace{9em}}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\int e^{(x^2)}\,dx &= \underline{\hspace{6cm}} \\ &= \underline{\hspace{10cm}}\end{aligned}$$