Exercices 9

by Aram Dermenjian

26 novembre 2018

Un exercice marqué du symbole $\star$ est considéré comme plus difficile et ne sera pas une question d'examen.

Exercice 1 Déterminez si la fonction $y = f(x)$ est une solution de l'équation différentielle.

(1) $y = 5\,e^{(2\,x)}$; $\frac{dy}{dx} = 5y$

(2) $y = -\frac{x^2-4}{2\,x}$; $\frac{dy}{dx} + \frac{x+y}{x} = 0$

(3) $y = \frac{1}{x}$; $\frac{d^2y}{dx^2} = x^2 + y^2$

(4) $y = \frac{1}{2}\,xe^x$; $\frac{d^2y}{dx^2} - y = e^x$

Démonstration. (1) `non`

(2) `oui`

(3) `non`

(4) `oui`

□

Exercice 2 Donnez l'ordre de l'équation différentielle.

(1) $\left[y^{(4)}\right]^2 + 2y^{(3)} - (y')^6 + 6y = \sqrt{x}$

(2) $e^t + \left(\frac{dx}{dt}\right)^4 = 6\cos(t)$

(3) $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 - 4x\frac{dy}{dx} + x = e^x\sin(x)$

(4) $y'' - y^2 = 2y''' + \cos(x)$

Démonstration. (1) 4

(2) 1

(3) 3

(4) 3

□

Exercice 3 Vérifiez que la fonction $y = f(x)$ satisfait à l'équation différentielle et trouvez les valeurs des constantes arbitraires A et B telles que la fonction satisfait à la condition initiale ou aux conditions initiales.

(1) $y = Ae^x$; $y' - y = 0$; $y(0) = 3$

(2) $y = Ae^{-x} + 2x$; $\frac{dy}{dx} + y = 2x + 2$; $y(0) = 5$

(3) $y = -\ln(A - x)$; $\frac{dy}{dx} = e^y$; $y(0) = 0$

(4) $y = Ae^{2x} + Bxe^{2x}$; $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$; $y(0) = 3$, $y'(0) = 8$.

(5) $y = A\sin(2x) + B\cos(2x)$; $y'' + 4y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Démonstration. (1) $A = 3$

(2) $A = 5$

(3) $A = 1$

(4) $A = 3\,;\, B = 2$
(5) $A = 0\,;\, B = 1$

□

Exercice 4 Trouvez la solution générale de l'équatio différentielle et, s'il y a lieu, la solution particulére satisfaisant à la condition initial.

(1) $\frac{dy}{dx} = x + 2\,;\, y(0) = 2$
(2) $\frac{dy}{dx} = (x + 1)^2$
(3) $\frac{dx}{dt} = \sqrt{t}\,;\, x(9) = 0$
(4) $(1 + e^x)y\,dy - e^x\,dx = 0$
(5) $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos(x)}{e^y}\,;\, y(0) = 1$
(6) $y(x^2 - 1)\,dy + x(y^2 + 1)\,dx = 0\,;\, y(0) = 1$
(7) $\frac{dy}{dx} = e^{2x+y}\,;\, y(0) = 2$

Démonstration. (1) $y = \frac{x^2}{2} + 2x + c\,;\, y = x^2 + 2x + 2$
(2) $y = \frac{x^3}{3} + x^2 + x + c$
(3) $x = \frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3} + c\,;\, x = \frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3} - 18$
(4) $\frac{y^2}{2} = \ln(1 + e^x) + C$
(5) $e^y = \sin(x) + C\,;\, e^y = \sin(x) + e$
(6) $\frac{\ln(\left|y^2+1\right|)}{2} = -\frac{\ln(\left|x^2-1\right|)}{2} + C\,;\, y^2 + 1 = \frac{2}{|x-1|}$
(7) $-e^{-y} = \frac{e^{2x}}{2} + C\,;\, y = -\ln(e^{-2} + \frac{1}{2} - \frac{e^{2x}}{2})$

□

Exercice 5 Quels sont les six premiers termes de la suite $\{a_n\}$?

(1) $\{4\}$
(2) $\left\{\frac{(-2)^n}{3n}\right\}$
(3) $\left\{\frac{e^n}{\sqrt{10n}}\right\}$
(4) $\left\{\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^3}\right\}$
(5) $a_1 = 2$ et $a_n = \frac{1}{a_{n-1}}$ pour $n \geq 2$.
(6) $a_1 = 3$ et $a_n = a_{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ pour $n \geq 2$
(7) $a_1 = 3$, $a_2 = -1$ et $a_n = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$ pour $n \geq 3$
(8) $a_1 = 8$, $a_2 = 16$ et $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2}$ pour $n \geq 3$

Démonstration. (1) 4, 4, 4, 4, 4, 4
(2) $\frac{(-2)}{3}$, $\frac{(-2)^2}{3\cdot 2} = \frac{2}{3}$, $\frac{(-2)^3}{3\cdot 3} = \frac{-8}{9}$, $\frac{(-2)^4}{3\cdot 4} = \frac{4}{3}$, $\frac{-32}{15}$, $\frac{32}{9}$
(3) $\frac{e}{\sqrt{10}}$, $\frac{e^2}{\sqrt{20}}$, $\frac{e^3}{\sqrt{30}}$, $\frac{e^4}{\sqrt{40}}$, $\frac{e^5}{\sqrt{5)}}$, $\frac{e^6}{\sqrt{60}}$
(4) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{1^3} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{1} = 1$, $\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{2}\right)}{2^3} = \frac{\sin(\pi)}{8} = 0$, $\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{3^3} = \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{27} = \frac{-1}{27}$, $\frac{\sin\left(\frac{4\pi}{2}\right)}{4^3} = \frac{\sin(2\pi)}{64} = 0$, $\frac{1}{125}$, 0

(5) $2,\ \frac{1}{2},\ 2,\ \frac{1}{2},\ 2,\ \frac{1}{2}$

(6) $3,\ 3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2},\ \frac{7}{2}+\frac{1}{4}=\frac{15}{4},\ \frac{15}{4}+\frac{1}{8}=\frac{31}{8},\ \frac{63}{16},\ \frac{127}{32}$

(7) $3,\ -1,\ \frac{-1}{3},\ \frac{1}{3},\ -1,\ -3$

(8) $8,\ 16,\ 12,\ 14,\ 13,\ \frac{27}{2}$

□

Exercice 6 Quelle est l'expression du terme générale a_n de la suite ?

(1) $[1, 10, 100, 1000, 10000, 100000]$

(2) $[2, 5, 10, 17, 26, 37]$

(3) $\left[1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{2}{7}\right]$

(4) $\left[1, \frac{1}{9}, \frac{1}{25}, \frac{1}{49}, \frac{1}{81}, \frac{1}{121}\right]$

(5) $\left[-\frac{1}{4}, -\frac{2}{9}, -\frac{3}{16}, -\frac{4}{25}, -\frac{5}{36}, -\frac{6}{49}\right]$

Démonstration. (1) 10^{x-1}

(2) x^2+1

(3) $\frac{2}{x+1}$

(4) $\frac{1}{(2\,x-1)^2}$

(5) $-\frac{x}{(x+1)^2}$

□

Exercice 7 Déterminez les cinq premiers termes de la suite $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ainsi que l'expression du terme général a_n.

(1) $a_n = f^{(n)}(0)$ si $f(x) = (1+x)^{-1}$

(2) $a_n = f^{(n)}(1)$ si $f(x) = \frac{1}{x}$

(3) $a_n = f^{(n)}(0)$ si $f(x) = 2^x$

(4) $a_n = f^{(n)}(\frac{1}{2})$ si $f(x) = e^{1-2x}$

Démonstration. (1) $a_0 = 1,\ a_1 = -1,\ a_2 = 2,\ a_3 = -3!,\ a_4 = 4!,\ a_n = (-1)^n n!$

(2) $a_0 = 1,\ a_1 = -1,\ a_2 = 2,\ a_3 = -3!,\ a_4 = 4!,\ a_n = (-1)^n n!$

(3) $a_0 = 1,\ a_1 = \ln(2),\ a_2 = (\ln(2))^2,\ a_3 = (\ln(2))^3,\ a_4 = (\ln(2))^4,\ a_n = (\ln(2))^n$

(4) $a_0 = 1,\ a_1 = -2,\ a_2 = 4,\ a_3 = -2^3,\ a_4 = 2^4,\ a_n = (-1)^n 2^n$

□

Exercice 8 Dites si la suite est convergente ou divergente, et, s'il y a lieu, déterminez la valeur vers laquelle la suite converge.

(1) $\left\{\frac{50}{n}\right\}$

(2) $\left\{-\frac{3\,n-1}{2\,n+1}\right\}$

(3) $\left\{\left(\frac{5}{8}\right)^n + 2\right\}$

(4) $\left\{\frac{\cos(n)^2}{\sqrt{n}}\right\}$

(5) $\left\{n\cos\left(\frac{1}{2}\,\pi n\right)\right\}$

(6) $\left\{\frac{1}{2}\,\cos\left(\pi n\right)\right\}$

(7) $\left\{n^4 e^{(-n)}\right\}$

(8) $\left\{\left(\frac{3}{n}\right)^{\frac{2}{n}}\right\}$

(9) $\left\{\frac{(-1)^n}{5^n}\right\}$

(10) $\left\{\frac{n^3+n^2}{n^2+7n+2}\right\}$

(11) $\left\{\left(-\frac{3}{n}+1\right)^n\right\}$

(12) $\left\{\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$

(13) $\left\{\frac{n!}{n^n}\right\}$

Démonstration. (1) La suite converge vers 0.

(2) La suite converge vers $-\frac{3}{2}$.

(3) La suite converge vers 2.

(4) La suite converge vers 0.

(5) La suite diverge.

(6) La suite diverge.

(7) La suite converge vers 0.

(8) La suite converge vers 1.

(9) La suite converge vers 0.

(10) La suite diverge.

(11) La suite converge vers e^{-3}.

(12) La suite converge vers 1.

(13) La suite converge vers 0.

□

Exercice 9 Soit la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ dont la n-ième partielle vaut

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{2n+3}{3n+1}$$

(1) Que vaut S_5 ?

(2) Que vaut a_4 ?

(3) Si la série converge, déterminez-en la valeur ; sinon, concluez qu'elle diverge.

Démonstration. (1) $\frac{13}{16}$

(2) $-\frac{7}{130}$

(3) $\frac{2}{3}$

□

Exercice 10 Déterminez si la série converge et, s'ily a lieu, donnez-en la valeur.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(2+3n)$

(2) $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{5}{8}\right)^i$

(3) $\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{j-2}$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$

(5) $\sum_{x=5}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x$

(6) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{4^{i-1}}{5^{i+2}}$

(7) $\sum_{t=1}^{\infty} e^{2-t}$

Démonstration. (1) Diverge

(2) $\frac{5}{3}$

(3) $\frac{16}{3}$

(4) Diverge

(5) $\frac{32}{81}$

(6) $\frac{1}{25}$

(7) $\frac{e^2}{e-1}$

□