Exercices 8

by Aram Dermenjian

19 novembre 2018

Un exercice marqué du symbole $\star$ est considéré comme plus difficile et ne sera pas une question d'examen.

Exercice 1 Évaluez l'intégrale impropre.

(1) $\int_{1}^{\infty} \frac{3}{(x+5)(x+2)}\,dx$

(2) $\int_{e}^{\infty} \frac{1}{x\ln(x^2)^2}\,dx$

(3) $\int_{0}^{\infty} \frac{2\,x+1}{x^2+x+1}\,dx$

(4) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(-x)}}{e^{(-2\,x)}+1}\,dx$

(5) $\int_{0}^{\infty} xe^{(-3\,x)}\,dx$

(6) $\int_{0}^{1} x\ln(x)\,dx$

(7) $\int_{0}^{2} -\frac{1}{x^2-1}\,dx$

(8) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x)}{\sqrt{2\,\cos(x)-1}}\,dx$

(9) $\int_{0}^{4} \frac{1}{(x-3)^{\frac{5}{3}}}\,dx$

(10) $\int_{\frac{1}{5}}^{1} \frac{1}{\sqrt{5\,x-1}}\,dx$

(11) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \tan(x)\,dx$

(12) $\int_{0}^{4} \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\,dx$

(13) $\int_{2}^{6} \frac{1}{(x-2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$

(14) $\int_{0}^{3} \frac{2}{(x-1)^3}\,dx$

Démonstration. (1) convergente vers $\ln(6) - \ln(3)$

(2) convergente vers $\frac{1}{4}$

(3) `divergente`

(4) convergente vers $\frac{1}{2}\,\pi$

(5) convergente vers $\frac{1}{9}$

(6) convergente vers $-\frac{1}{4}$

(7) `divergente`

(8) convergente vers 1

(9) convergente vers $\int_{0}^{4} \frac{1}{(x-3)^{\frac{5}{3}}}\,dx$

(10) convergente vers $\frac{4}{5}$

(11) `divergente`

(12) convergente vers 8

(13) `divergente`

(14) `divergente`

$\square$

Exercice 2 Évaluez l'aire de la surface de révolution obtenue par la rotation de la courbe donnée autour de l'axe indiqué.

(1) La surface de révolution obtenue par la rotation, autour de l'axe y, de $f(x) = \ln(x)$ pour $x \in [1, 5]$.

(2) La surface de révolution obtenue par la rotation, autour de l'axe y, de la courbe $x = \sqrt{-y^2 + 25}$ pour $y \in [-3, 4]$

(3) La surface de révolution obtenue par la rotation, autour de l'axe y de $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{x^2}$ pour $x \in [1, 2]$.

(4) La surface de révolution obtenue par la rotation, autour de l'axe x, de $f(x) = x^2 - \frac{1}{8}\ln(x)$ pour $x \in [1, 2]$.

(5) La surface de révolution obtenue par la rotation, autour de l'axe y de $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln(x)$ pour $x \in [2, 6]$.

(6) La surface de révolution obtenue par la rotation, autour de l'axe x, de $f(x) = -\frac{1}{3}(x-3)\sqrt{x}$ pour $y \in [1, 3]$.

(7) La surface de révolution obtenue par la rotation, autoud de l'axe y de $g(y) = \frac{1}{2}e^{(-y)} + \frac{1}{2}e^{y}$ pour $y \in [-2, 2]$.

Démonstration. (1) $\frac{1}{2}\pi\left(10\sqrt{26} - 2\sqrt{2} + \ln\left(\frac{1}{5}\sqrt{26}+1\right) - \ln\left(\frac{1}{5}\sqrt{26}-1\right) - \ln\left(\sqrt{2}+1\right) + \ln\left(\sqrt{2}-1\right)\right)$

(2) 70π

(3) $2\pi\int_1^2 \sqrt{\frac{1}{4}\left(x^2 - \frac{4}{x^3}\right)^2 + 1}x\,dx$

(4) $-\frac{1}{64}\pi\left(\ln(2)^2 + 64\ln(2) - 1008\right)$

(5) $\frac{220}{3}\pi$

(6) $\frac{16}{9}\pi$

(7) $\frac{1}{2}\pi\left(e^8 + 8e^4 - 1\right)e^{(-4)}$

□