Exercices 4 solutions

by Aram Dermenjian

15 octobre 2018

Un exercice marqué du symbole $\star$ est considéré comme plus difficile et ne sera pas une question d'examen.

Exercice 1 Trouver les intégrales indéfinies suivantes.

(1) $\int xe^x \, dx$

(2) $\int (2\,x+3)\sin(x)\, dx$

(3) $\int x^4 \log(x)\, dx$

(4) $\int \left(x^2+1\right)e^x \, dx$

(5) $\int x\cos(2\,x)\, dx$

(6) $\star$ $\int x^2\cos(x)\, dx$

(7) $\star$ $\int \sin(3\,x)\sin(x)\, dx$

(8) $\star$ $\int 3^x x \, dx$

(9) $\star$ $\int \arcsin(x)\, dx$

(10) $\star$ $\int e^{(2\,x)}\sin(x)\, dx$

(11) $\star\star$ $\int x\arccos(x)\, dx$

Démonstration. (1) $(x-1)e^x + c$

(2) $-2\,x\cos(x) - 3\,\cos(x) + 2\,\sin(x) + c$

(3) $\frac{1}{5}\,x^5\log(x) - \frac{1}{25}\,x^5 + c$

(4) $\left(x^2 - 2\,x + 2\right)e^x + e^x + c$

(5) $\frac{1}{2}\,x\sin(2\,x) + \frac{1}{4}\,\cos(2\,x) + c$

(6) $2\,x\cos(x) + \left(x^2-2\right)\sin(x) + c$

(7) $-\frac{1}{8}\,\sin(4\,x) + \frac{1}{4}\,\sin(2\,x) + c$

(8) $\frac{(x\log(3)-1)e^{(x\log(3))}}{\log(3)^2} + c$

(9) $x\arcsin(x) + \sqrt{-x^2+1} + c$

(10) $-\frac{1}{5}\,(\cos(x) - 2\,\sin(x))e^{(2\,x)} + c$

(11) $\frac{1}{2}\,x^2\arccos(x) - \frac{1}{4}\,\sqrt{-x^2+1}x + \frac{1}{4}\,\arcsin(x) + c$

□

Exercice 2 Trouver les intégrales indéfinies suivantes.

(1) $\int \cos(2\,x)\sin(x)\, dx$

(2) $\int \cos(x)^2\sin(x)\, dx$

(3) $\int \cos(x)^2\sin(x)^3\, dx$

(4) $\int \sin(4\,x)\sin(3\,x)\, dx$

(5) $\int \sin(x)^4\, dx$

(6) $\star$ $\int \cos(x)^2\sin(x)^2\, dx$

(7) $\star$ $\int \sin(x)^6\, dx$

(8) $\star$ $\int \cos(3\,x)\sin(x)^2\ dx$

Démonstration. (1) $-\frac{1}{6}\ \cos(3\,x) + \frac{1}{2}\ \cos(x) + c$

(2) $-\frac{1}{3}\ \cos(x)^3 + c$

(3) $\frac{1}{5}\ \cos(x)^5 - \frac{1}{3}\ \cos(x)^3 + c$

(4) $-\frac{1}{14}\ \sin(7\,x) + \frac{1}{2}\ \sin(x) + c$

(5) $\frac{3}{8}\,x + \frac{1}{32}\ \sin(4\,x) - \frac{1}{4}\ \sin(2\,x) + c$

(6) $\frac{1}{8}\,x - \frac{1}{32}\ \sin(4\,x) + c$

(7) $\frac{1}{48}\ \sin(2\,x)^3 + \frac{5}{16}\,x + \frac{3}{64}\ \sin(4\,x) - \frac{1}{4}\ \sin(2\,x) + c$

(8) $-\frac{4}{5}\ \sin(x)^5 + \frac{1}{3}\ \sin(x)^3 + c$

□

Exercice 3 Un automobiliste A se déplace avec une vitesse $\frac{5t\sin(t^2)}{8}$ km/h. Un autre automobiliste B se déplace avec une vitesse $\cos t \sin t$ km/h. Si l'automobiliste A va $\frac{5}{8}$ km, combien des heures b ça va lui prendre pour y arriver ? Si l'automobiliste B conduit pour les même nombres des heures, est-ce qu'elle déplace A ou pas ? Pour résoudre ces problème il faut résoudre ces deux intégrales :

$$\int_0^b \frac{5t\sin(t^2)}{8}\,dt = \frac{5}{8} \qquad \text{et} \qquad \int_0^b \cos(t)\sin(t)\,dt = ?$$

Démonstration. $b = \sqrt{\pi}$

$$\int_0^b \cos(t)\sin(t)\,dt = -\frac{1}{2}\ \cos\left(\sqrt{\pi}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

□

Exercice 4 Déterminer le centre de gravité $C(\bar{x}, \bar{y})$ des surgaces planes délimitées par les courbes suivantes. Représenter graphiquement la région et $C(\bar{x}, \bar{y})$.

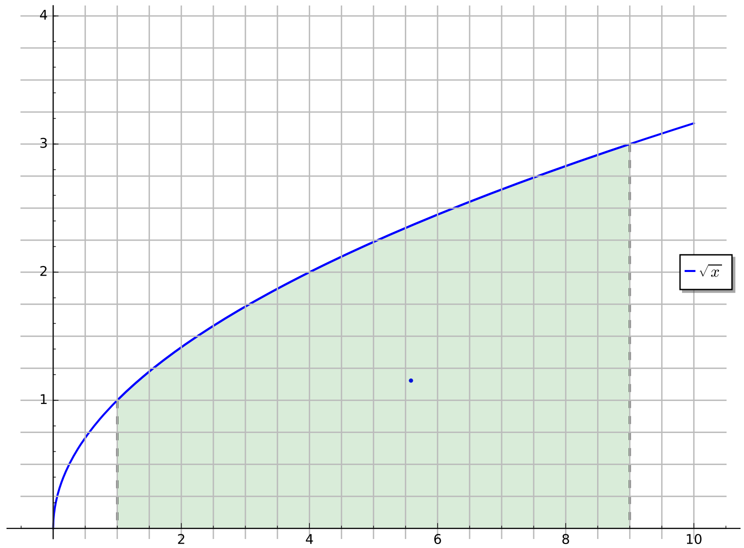
(1) $f(x) = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 1$, et $x = 9$.

(2) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ et $y = 0$

(3) $f(x) = 4x - x^2$ et $g(x) = x^2 - 6x + 8$.

Démonstration. (1)

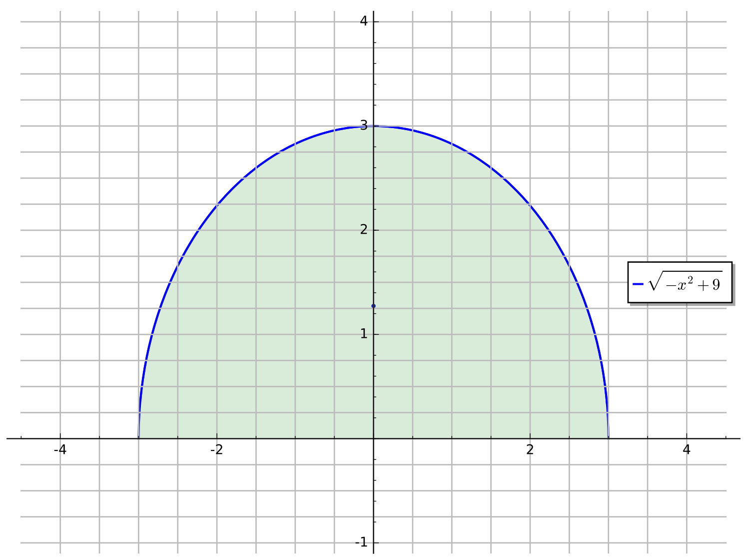
$$M_x = 20 \quad M_y = \frac{484}{5} \quad A = \frac{52}{3}$$



$$\bar{x} = \frac{363}{65} \qquad \bar{y} = \frac{15}{13}$$

(2)

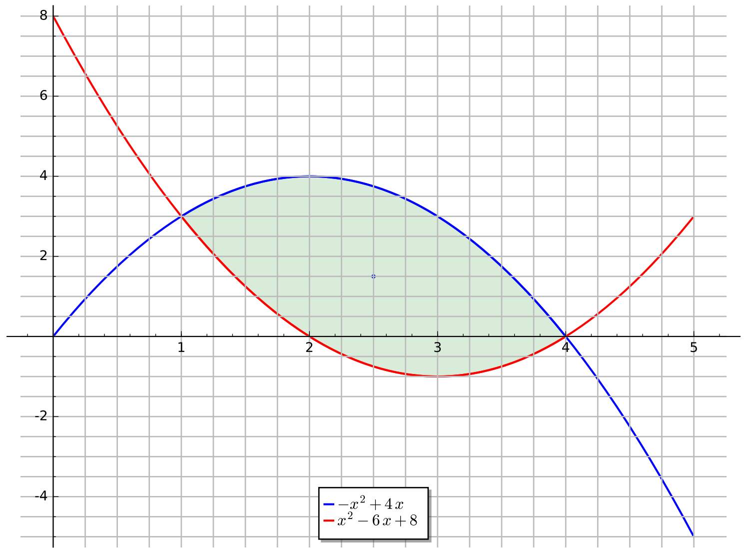
$$M_x = 18 \quad M_y = 0 \quad A = \frac{9}{2}\,\pi$$



$$\bar{x} = 0 \qquad \bar{y} = \frac{4}{\pi}$$

(3)

$$M_x = \frac{27}{2} \quad M_y = \frac{45}{2} \quad A = 9$$



$$\bar{x}=\frac{5}{2} \qquad \bar{y}=\frac{3}{2}$$

$\square$