Exercices 1 solutions

by Aram Dermenjian

10 septembre 2018

Un exercice marqué du symbole $\star$ est considéré comme plus difficile et ne sera pas une question d'examen.

Exercice 1 Quelles fonctions sont continue :

(1) $\sin(x)$
(2) e^x
(3) $\tan(x)$

Démonstration. (1) Oui
(2) Oui
(3) Non

$\square$

Exercice 2 Trouver la dérivée aux problèmes suivants :

(1) $x^5 + 5\,x^4 + 3\,x^3 - 2\,x + \frac{12}{\sqrt{x}}$
(2) $-(6\,x-1)^7$
(3) $-\frac{x^2+2}{x^2-3}$
(4) $\sqrt{\cos(\theta)} + \sin\left(\sqrt{\theta}\right)$
(5) $\sec(5\,x-4)^{\frac{1}{3}}$

Démonstration. (1) $5\,x^4 + 20\,x^3 + 9\,x^2 - \frac{6}{x^{\frac{3}{2}}} - 2$
(2) $-42\,(6\,x-1)^6$
(3) $\frac{2\left(x^2+2\right)x}{\left(x^2-3\right)^2} - \frac{2\,x}{x^2-3}$
(4) $\frac{\cos\left(\sqrt{\theta}\right)}{2\,\sqrt{\theta}} - \frac{\sin(\theta)}{2\,\sqrt{\cos(\theta)}}$
(5) $\frac{5}{3}\,\sec(5\,x-4)^{\frac{1}{3}}\,\tan(5\,x-4)$

$\square$

Exercice 3 Calculer les limites suivants :

(1) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-4}$
(2) $\lim_{x\to 0} \frac{x+\sin(2\,x)}{x-\sin(2\,x)}$
(3) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-e^{(-x)}-e^x+2}{x^2-\sin(x)^2}$
(4) $\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x}$

Démonstration. (1) $\frac{5}{4}$
(2) -3
(3) $-\frac{1}{4}$
(4) 0

$\square$

Exercice 4 Calculer les limites suivants :

(1) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^{x}-1}\right)$

(2) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos(x)}-\frac{1}{\tan(x)}\right)$

(3) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\cos(x)-1}+\frac{4}{x^{2}}\right)$

(4) $\lim_{x\to 0}\left(3\,x+e^{x}\right)^{\left(\frac{1}{x}\right)}$

(5) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(-\cos\left(x\right)+\sin\left(x\right)\right)^{\tan(x)}$

(6) $\lim_{x\to \infty}\left(-\frac{5}{x}+1\right)^{3\,x}$

(7) $\lim_{x\to -\infty}\left(4\,e^{(-3\,x)}+1\right)e^{(3\,x)}$

(8)⋆ $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan(x)}{x}\right)^{\left(\frac{1}{x^{2}}\right)}$

(9)⋆ $\lim_{x\to \infty}2\,x-\sqrt{4\,x^{2}+3\,x}$

Démonstration. (1) $\frac{1}{2}$

(2) ∞

(3) $-\frac{1}{3}$

(4) e^{4}

(5) $e^{(-1)}$

(6) $e^{(-15)}$

(7) 4

(8) $e^{\frac{1}{3}}$

(9) $-\frac{3}{4}$

□

Exercice 5 Expliciter les termes des sommations suivantes :

(1) $\sum_{j=2}^{5}4\,j^{3}-1$

(2) $\sum_{k=1}^{4}-2^{-k}+(-2)^{k}$

(3) $\sum_{i=2}^{7}(-3)^{i-4}$

(4) $\sum_{i=1}^{3}f(x_{i})^{i}$

Démonstration. (1) $31+107+255+499$

(2) $-\frac{5}{2}+\frac{15}{4}+-\frac{65}{8}+\frac{255}{16}$

(3) $\frac{1}{9}+-\frac{1}{3}+1+-3+9+-27$

(4) $f(x_{1})+f(x_{2})^{2}+f(x_{3})^{3}$

□

Exercice 6 Utiliser le symbole $\sum$ pour représenter les sommes suivantes.

(1) $2+4+6+8$

(2) $-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+-\frac{1}{10}$

(3)⋆ $-1+2+-3+4+-5+6+-7$

(4) $f(\frac{x_{1}}{1})-f(\frac{x_{2}}{2})+f(\frac{x_{3}}{3})-f(\frac{x_{4}}{4})$

Démonstration. (1) $\sum_{i=1}^{4} 2\,i$

(2) $\sum_{i=1}^{5} \frac{(-1)^i}{2\,i}$

(3) $\sum_{i=1}^{7} (-1)^i\, i$

(4) $\sum_{i=1}^{4} (-1)^{i+1} f\left(\frac{x_i}{i}\right)$

□

Exercice 7 Évaluer les sommes suivantes à l'aide des formules.

(1) $\sum_{i=5}^{75} i$

(2) $\sum_{i=1}^{20} \frac{3}{2}\,i - \frac{5}{2}$

(3) $\sum_{i=1}^{25} (2\,i-3)^2$

(4)⋆ $\sum_{i=1}^{25} 5\,\left(\frac{1}{4}\right)^i + \frac{1}{2}$

(4) $\sum_{i=6}^{72} \frac{i+2}{3} - \frac{i+3}{3}$

Démonstration. (1) 2840

(2) 265

(3) 18425

(4) $\frac{15950248680270505}{1125899906842624}$

(5) $-\frac{67}{3}$

□

Exercice 8 Utiliser les formules de sommation pour exprimer les sommes suivantes en fonction de n.

(1) $\sum_{i=1}^{n-1} i$

(2) $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{3\,i^2}{5\,n}$

(3) $\sum_{i=1}^{n-1} 6\,i^2 - 2\,i$

(4)⋆ $\sum_{i=10}^{2n} i^2 - 3\,i$

Démonstration. (1) $\frac{1}{2}\,n^2 - \frac{1}{2}\,n$

(2) $\frac{1}{5}\,n^2 - \frac{3}{10}\,n + \frac{1}{10}$

(3) $2\,n^3 - 4\,n^2 + 2\,n$

(4) $\frac{8}{3}\,n^3 - 4\,n^2 - \frac{8}{3}\,n - 150$

□

Exercice 9 Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Démonstration. Faisons :

$$\sum_{i=1}^{n} (i^4 - (i-1)^4) = n^4 - 0^4$$

Aussi,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\left(i^4-(i-1)^4\right) &= \sum_{i=1}^{n}\left(i^4-(i^4-4i^3+6i^2-4i+1)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n} 4i^3-6i^2+4i-1\\
&= 4\sum_{i=1}^{n} i^3 - 6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+4\frac{n(n+1)}{2}-n\\
&= 4\sum_{i=1}^{n} i^3 - (2n^3+3n^2+n)+2(n^2+n)-n\\
&= 4(\sum_{i=1}^{n} i^3) - 2n^3-3n^2-n+2n^2+2n-n\\
&= 4(\sum_{i=1}^{n} i^3 - 2n^3-n^2
\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
n^4 &= 4\sum_{i=1}^{n} i^3-2n^3-n^2\\
n^4+2n^3+n^2 &= 4\sum_{i=1}^{n} i^3\\
\sum_{i=1}^{n} i^3 &= \frac{n^2(n^2+2n+1)}{4}\\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4}
\end{aligned}$$

□

Exercice 10 ($\star$) Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n-1} ar^k = a\frac{1-r^n}{1-r}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} ar^k &= a + a\sum_{k=1}^{n} nr^k - ar^n \\
&= a + a\frac{r^{n+1} - r}{r-1} - ar^n \\
&= a\frac{1(r-1) + (r^{n+1} - r) - r^n(r-1)}{r-1} \\
&= a\frac{r - 1 + r^{n+1} - r - r^{n+1} + r^n}{r-1} \\
&= a\frac{-1 + r^n}{r-1} \\
&= a\frac{1 - r^n}{1-r}
\end{aligned}$$

□