Exercices 10

by Aram Dermenjian

3 décembre 2018

Un exercice marqué du symbole $\star$ est considéré comme plus difficile et ne sera pas une question d'examen.

Exercice 1 Détermiez si la série diverge ou converge.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\,n+3}{3\,n^2+2\,n+3}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$

(3) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i!^2}{(3\,i)!}$

(4) $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{8\,x^2+1}}$

(5) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln(n)^3}{n}$

(6) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{3^i}{i^i}$

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{-n}+2}$

(8) $\sum_{x=2}^{\infty} \frac{4}{x\ln(x)^2}$

(9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} - \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

(10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}$

(11) $\sum_{i=1}^{\infty} \ln\left(\frac{5\,i+3}{6\,i+1}\right)$

(12) $\sum_{x=1}^{\infty} xe^{\left(-x^2\right)}$

(13) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{5^i}$

(14) $\sum_{x=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(x^x)}$

(15) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^{20}}$

(16) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^i i}$

(17) $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{x!}{x^x}$

(18) $\sum_{i=2}^{\infty} \frac{2}{i\sqrt{\ln(i)}}$

(19) $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{3^x x!}{x^x}$

(20) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3-n^3}$

(21) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+5}$

(22)$\star$ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^4}$

Démonstration. (1) Converge

(2) Diverge

(3) Converge

(4) Diverge

(5) Diverge

(6) Converge

(7) Diverge

(8) Converge
(9) Converge
(10) Diverge
(11) Diverge
(12) Converge
(13) Converge
(14) Diverge
(15) Diverge
(16) Converge
(17) Converge
(18) Diverge
(19) Diverge
(20) Converge
(21) Converge
(22) Converge

□

Exercice 2 Déterminez si la série diverge ou converge, et, s'il y a lieu, dites si la convergence est absolue ou conditionnelle.

(1) $\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j$
(2) $\sum_{i=2}^{\infty} \frac{(-1)^i \ln(i^i)}{i^2}$
(3) $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{(-5)^x}{x!}$
(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\pi n\right)}{5^n}$
(5) $\sum_{i=2}^{\infty} -\frac{1}{i+\sqrt{i}} + \frac{1}{\sqrt{i}-1}$
(6) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j e^j}{j}$
(7) $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{x!}{(-5)^x}$

Démonstration. (1) Diverge
(2) Converge conditionellement
(3) Converge absoluement
(4) Converge absoluement
(5) Diverge
(6) Diverge
(7) Diverge

□

Exercice 3 Déterminez l'intervalle de convergence de la série de puissances.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+3)^n}{n}$
(2) $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(x-2)^i}{3^i}$

(3) $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(x-1)^j (2j)!}{3^j}$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+1)n}$

(5) $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{3^i x^i}{i!}$

Démonstration. (1) $]-4,-2]$

(2) $]-1,5[$

(3) $[1]$

(4) $[-3,-1]$

(5) $\mathbb{R}$

$\square$

Exercice 4 Quel est le polynôme de Taylor de degré 4, centré en 1, de la fonction $f(x) = x^{\frac{5}{2}}$

Démonstration.

$$\sum_{n=0}^{4} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n = 1 + \frac{5}{2}(x-1) + \frac{15}{8}(x-1)^2 + \frac{5}{16}(x-1)^3 - \frac{5}{128}(x-1)^4$$

$\square$

Exercice 5 Quel est le polynôme de Taylor de degré 3, centré en $\frac{\pi}{4}$, de la fonction $f(x) = \tan(x)$?

Démonstration.

$$\sum_{n=0}^{3} \frac{f^{(n)}(\frac{\pi}{4})}{n!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^n = 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \frac{pi}{4}\right)^2 + \frac{8}{3}\left(x - \frac{pi}{4}\right)^3$$

$\square$