Exercices 9

by Aram Dermenjian

26 novembre 2018

Un exercice marqué du symbole $\star$ est considéré comme plus difficile et ne sera pas une question d'examen.

Exercice 1 Déterminez si la fonction $y = f(x)$ est une solution de l'équation différentielle.

(1) $y = 5\,e^{(2\,x)}$; $\frac{dy}{dx} = 5y$

(2) $y = -\frac{x^2-4}{2\,x}$; $\frac{dy}{dx} + \frac{x+y}{x} = 0$

(3) $y = \frac{1}{x}$; $\frac{d^2y}{dx^2} = x^2 + y^2$

(4) $y = \frac{1}{2}\,xe^x$; $\frac{d^2y}{dx^2} - y = e^x$

Exercice 2 Donnez l'ordre de l'équation différentielle.

(1) $\left[y^{(4)}\right]^2 + 2y^{(3)} - (y')^6 + 6y = \sqrt{x}$

(2) $e^t + \left(\frac{dx}{dt}\right)^4 = 6\cos(t)$

(3) $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 - 4x\frac{dy}{dx} + x = e^x\sin(x)$

(4) $y'' - y^2 = 2y''' + \cos(x)$

Exercice 3 Vérifiez que la fonction $y = f(x)$ satisfait à l'équation différentielle et trouvez les valeurs des constantes arbitraires A et B telles que la fonction satisfait à la condition initiale ou aux conditions initiales.

(1) $y = Ae^x$; $y' - y = 0$; $y(0) = 3$

(2) $y = Ae^{-x} + 2x$; $\frac{dy}{dx} + y = 2x + 2$; $y(0) = 5$

(3) $y = -\ln(A - x)$; $\frac{dy}{dx} = e^y$; $y(0) = 0$

(4) $y = Ae^{2x} + Bxe^{2x}$; $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$; $y(0) = 3$, $y'(0) = 8$.

(5) $y = A\sin(2x) + B\cos(2x)$; $y'' + 4y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Exercice 4 Trouvez la solution générale de l'équatio différentielle et, s'il y a lieu, la solution particulére satisfaisant à la condition initial.

(1) $\frac{dy}{dx} = x + 2$; $y(0) = 2$

(2) $\frac{dy}{dx} = (x+1)^2$

(3) $\frac{dx}{dt} = \sqrt{t}$; $x(9) = 0$

(4) $(1 + e^x)y\,dy - e^x\,dx = 0$

(5) $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos(x)}{e^y}$; $y(0) = 1$

(6) $y(x^2 - 1)\,dy + x(y^2 + 1)\,dx = 0$; $y(0) = 1$

(7) $\frac{dy}{dx} = e^{2x+y}$; $y(0) = 2$

Exercice 5 Quels sont les six premiers termes de la suite $\{a_n\}$?

(1) $\{4\}$

(2) $\left\{\frac{(-2)^n}{3n}\right\}$

(3) $\left\{\frac{e^n}{\sqrt{10n}}\right\}$

(4) $\left\{\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^3}\right\}$

(5) $a_1 = 2$ et $a_n = \frac{1}{a_{n-1}}$ pour $n \geq 2$.

(6) $a_1 = 3$ et $a_n = a_{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ pour $n \geq 2$

(7) $a_1 = 3$, $a_2 = -1$ et $a_n = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$ pour $n \geq 3$

(8) $a_1 = 8$, $a_2 = 16$ et $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2}$ pour $n \geq 3$

Exercice 6 Quelle est l'expression du terme générale a_n de la suite ?

(1) $[1, 10, 100, 1000, 10000, 100000]$

(2) $[2, 5, 10, 17, 26, 37]$

(3) $\left[1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{2}{7}\right]$

(4) $\left[1, \frac{1}{9}, \frac{1}{25}, \frac{1}{49}, \frac{1}{81}, \frac{1}{121}\right]$

(5) $\left[-\frac{1}{4}, -\frac{2}{9}, -\frac{3}{16}, -\frac{4}{25}, -\frac{5}{36}, -\frac{6}{49}\right]$

Exercice 7 Déterminez les cinq premiers termes de la suite $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ainsi que l'expression du terme général a_n.

(1) $a_n = f^{(n)}(0)$ si $f(x) = (1+x)^{-1}$

(2) $a_n = f^{(n)}(1)$ si $f(x) = \frac{1}{x}$

(3) $a_n = f^{(n)}(0)$ si $f(x) = 2^x$

(4) $a_n = f^{(n)}(\frac{1}{2})$ si $f(x) = e^{1-2x}$

Exercice 8 Dites si la suite est convergente ou divergente, et, s'il y a lieu, déterminez la valeur vers laquelle la suite converge.

(1) $\left\{\frac{50}{n}\right\}$

(2) $\left\{-\frac{3n-1}{2n+1}\right\}$

(3) $\left\{\left(\frac{5}{8}\right)^n + 2\right\}$

(4) $\left\{\frac{\cos(n)^2}{\sqrt{n}}\right\}$

(5) $\left\{n\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right)\right\}$

(6) $\left\{\frac{1}{2}\cos(\pi n)\right\}$

(7) $\left\{n^4 e^{(-n)}\right\}$

(8) $\left\{\left(\frac{3}{n}\right)^{\frac{2}{n}}\right\}$

(9) $\left\{\frac{(-1)^n}{5^n}\right\}$

(10) $\left\{\frac{n^3+n^2}{n^2+7n+2}\right\}$

(11) $\left\{\left(-\frac{3}{n}+1\right)^n\right\}$

(12) $\left\{\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$

(13) $\left\{\frac{n!}{n^n}\right\}$

Exercice 9 Soit la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ dont la n-ième partielle vaut

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{2n+3}{3n+1}$$

(1) Que vaut S_5 ?

(2) Que vaut a_4 ?

(3) Si la série converge, déterminez-en la valeur ; sinon, concluez qu'elle diverge.

Exercice 10 Déterminez si la série converge et, s'ily a lieu, donnez-en la valeur.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(2+3n)$

(2) $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{5}{8}\right)^i$

(3) $\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{j-2}$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

(5) $\sum_{x=5}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x$

(6) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{4^{i-1}}{5^{i+2}}$

(7) $\sum_{t=1}^{\infty} e^{2-t}$