MAT 0344

Notes du cours

by Aram Dermenjian

21 décembre 2018

1. Semaine 1 : 10 septembre 2018

1.1. **Partie 1.** Bienvenue au cours de Calcul Intégral ! Ces notes de cours sont faites pour t'aider à bien maîtriser le sujet. Si jamais tu as des questions n'hesites pas me demander !

Ce cours est donné par ______________________________. Pour le trouver, il est disponible dans son bureau (_______________) à :

(1) ______________________________________
(2) ______________________________________
(3) ____
(4) Avec rendez-vous – ____

Commençons avec le cours et le plan

— Evaluation :

Devoir 1 :	__________________ (remis en classe)	**Pondération**	________
Examen 1 :	__________________	**Pondération**	________
Devoir 2 :	___________________ (remis en classe)	**Pondération**	________
Examen 2 :	_____________________	**Pondération**	________

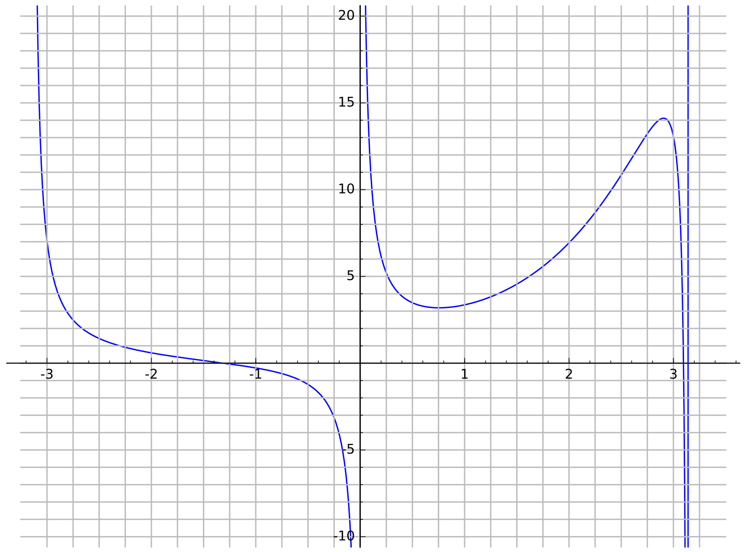
— Moodle :

— L'intégrité académique

— Politique 16 sur le harcèlement sexuel

1.1.1. *Calcul différentiel.* C'est un cours de calcul, donc on va travailler avec des fonctions ! Alors, on commence avec une fonction. Disons, la suivante :

$$f(x) = e^x + \cot(x)$$



On rappelle qu'une fonction est _______________ sur un intervalle I si pour tout $a \in I$ on a

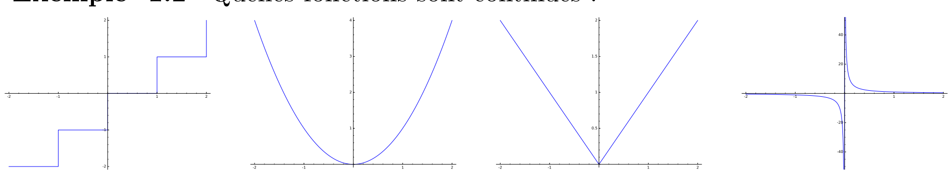
$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \nu > 0 \, \forall x \in I \ \left(|x - a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \nu\right).$$

Qu'est-ce que ça veut dire ? C'est qu'il y a aucun endroit où la fonction va vers ni ____ ni _______ sur I.

Exemple 1.1 Dans notre exemple, où notre fonction $f(x) = e^x + \cot(x)$ est-elle continue ?

$[-1, 1]$? _______ $[1, 3]$? ______ $\mathbb{R}$? _______

Exemple 1.2 Quelles fonctions sont continues :



Une ____________ d'une fonction $f(x)$ sur un intervalle I est une fonction $f'(x)$ telle que

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

est bien définie pour tout x dans l'intervalle I.

C'est-à-dire, la dérivée est la fonction pour les lignes tangentes à la courbe.

Exemple 1.3 Dans notre exemple $f(x) = e^x + \cot(x)$, on a

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \rule{5cm}{0.4pt}$$

Voici une liste des dérivées usuelles :

Fonction	Dérivée	Fonction	Dérivée
$f(x) = x^r$	$f'(x) = rx^{r-1}$	$f(x) = kg(x)$	$f'(x) = kg'(x)$
$f(x) = g(x)h(x)$		$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$	$f'(x) = \frac{g'(x)h(x)-g(x)h'(x)}{h^2(x)}$
$f(x) = g(h(x))$		$f(x) = g(x)^r$	$f'(x) = r(g(x))^{r-1}g'(x)$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln(a)$	$f(x) = \log_a(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x\ln(a)}$
$f(x) = \sin(x)$		$f(x) = \cos(x)$	
$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = \sec^2(x)$	$f(x) = \cot(x)$	$f'(x) = -\csc^2(x)$
$f(x) = \sec(x)$	$f'(x) = \sec(x)\tan(x)$	$f(x) = \csc(x)$	$f'(x) = -\csc(x)\cot(x)$
$f(x) = \arcsin(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$f(x) = \arccos(x)$	$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arctan(x)$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$f(x) = \text{arccot}(x)$	$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1+x^2}}$
$f(x) = \text{arcsec}(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$	$f(x) = \text{arccsc}(x)$	$f'(x) = \frac{-1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$

Dans le livre de Charron et Parent, ils se trompent avec arcsec et arccsc.

1.1.2. *Règle de L'Hôpital (§5.1 ou §1.4).* Rappelons la règle :

Théorème 1.4 (Règle de L'Hôpital) *Si* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ *ou* $= \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ *et si la limite* $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *existe, ou est infinie, alors*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Exemples 1.5 (1) $\lim_{x\to\infty} \frac{x+3}{2x-1} = \frac{\infty}{\infty}$. Prenons $f(x) = x + 3$ et $g(x) = 2x - 1$ on a $f'(x) = 1$, $g'(x) = 2$. Ainsi,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+3}{2x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}.$$

(2) $\lim_{x\to\infty} \frac{(x+4)^2}{x^2-2000} = \frac{\infty}{\infty}$

(3) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{\sqrt{2}-\sqrt{x}} = \frac{0}{0}$.

(4) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2} = \frac{0}{0}$.

1.1.3. *Les formes $\infty - \infty$ et $0 \cdot \pm\infty$ (§5.2 ou §1.4).* On peut utiliser la règle de l'Hôpital pour les fonctions où la limite devient $\infty - \infty$ ou $0 \cdot \pm\infty$. Pour $\infty - \infty$, c'est facile à regler et on va le faire dans un exemple :

Exemple 1.6 Trouver la limite : $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x\sin(x)} - \frac{1}{x^2}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x\sin(x)} - \frac{1}{x^2} = \infty - \infty$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x\sin(x)} - \frac{1}{x^2} \quad =$$

$$= \frac{1}{6}$$

Alors, on a changé notre equation $f(x) = g(x) - h(x)$ pour quelque chose qui est une fraction dont la limite vaut soit $\frac{0}{0}$ soit $\frac{\infty}{\infty}$. Mais qu'est-ce qu'on fait si on a $0 \cdot \pm\infty$? On fait la même chose !

Exemple 1.7 Trouver la limite : $\lim_{x\to 0} 8x^4 \ln(3x)$.

$$\lim_{x\to 0} 8x^4 \ln(3x) = 0 \cdot \infty$$

$$\lim_{x\to 0} 8x^4 \ln(3x) \quad =$$

$$= 0$$

1.1.4. *Les formes 0^0, ∞^0 et $1^{\pm\infty}$ (§5.3 ou §1.4).* Ce qu'on va faire sera très bizarre, mais on va voir que ça nous donne la bonne reponse. Faisons un exemple.

Exemple 1.8 Trouver la limit : $\lim_{x\to 0} (x^2)^{x^2}$.

$$\lim_{x\to 0} (x^2)^{x^2} = 0^0$$

$$\lim_{x\to 0} (x^2)^{x^2} \quad \to$$

$$\lim_{x\to 0} (x^2)^{x^2} \quad = e^0 = 1$$

Alors, il faut faire les étapes suivants :

(1) ______________________________

(2) ______________________________

(3) ______________________________

1.2. **Partie 2.**

1.2.1. *Sommation (§1.2 ou §3.1).* On commence avec l'addition.

Exemple 1.9 Disons qu'on veut ajouter 1 à lui-même dix fois. On peut le faire comme : $1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 = 10$. Mais, ça ce complique quand on veut ajouter 1 encore plus de fois, disons 25 fois :

$$1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 = 25.$$

C'est trop long, alors on veut l'écrire de manière plus visible. Pour l'addition de 1 à lui-même c'est facile. On fait $1 \cdot n$ où n est le nombre de fois qu'on veut ajouter 1 à lui-même. Ainsi, disons qu'on veut ajouter chaque entier de 1 à 10 : $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = 55$. Et, si on le fait pour 1 à 25, c'est long :

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16+17+18+19+20+21+22+23+24+25 = \_\_\_\_\_\_$$

Lorsqu'on veut abréger la sommation on introduit une nouvelle notation : ___.

Exemple 1.10

$$\sum_{i=1}^{10} 1 = 10 \qquad \sum_{i=1}^{10} i = 55$$

En général on a quelque chose comme :

$$\sum_{i=m}^{n} a_i =$$

Les a_i sont les *indices de sommation* et ils se sont justes des fonctions. Si on veut que la sommation continue jusqu'à l'infini, on peut mettre $n = \infty$: $\sum_{i=m}^{\infty} a_i$.

Exemple 1.11 Faisons des examples :

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{4} 2i - 1 = 2(1) - 1 + 2(2) - 1 + 2(3) - 1 + 2(4) - 1 = 2 + 4 + 6 + 8 - 4 = 16$$

$$\sum_{i=m}^{n} b_i = \sum_{i=3}^{5} i^2 + 1 = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$\sum_{j=x}^{y} i_j = \sum_{j=-4}^{-1} 3 = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Et dans l'autre sens :

$$2+2+2+2+2 = \sum_{i=1}^{5} 2$$

$$5+8+11+14 = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$1+0-1-2-3 = \_\_\_\_\_\_$$

1.2.2. *Propriétés de la notation sigma (§1.3 ou §3.1).*

Proposition 1.12 (1) $\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{j=m}^{n} a_j$.

(2) $\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n-m+1} a_{i+m-1}$.

(3) $\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{m-1} a_i$.

(4) *Pour* $c \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=m}^{n} c = (n-m+1)c$.

(5) *Pour* $c \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=m}^{n} ca_i = c\sum_{i=m}^{n} a_i$.

(6) $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = (\sum_{i=1}^{n} a_i) + (\sum_{i=1}^{n} b_i)$

(7) $\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) =$ ____________. *somme télescopique*

(8) $\sum_{i=1}^{n} i =$ ___________.

(9) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(10) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

(11) $\sum_{i=1}^{n} r^i = \frac{r^{n+1}-r}{r-1}$.

Démonstration. (1) ✓

(2) $\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n = a_{1+m-1} + a_{2+m-1} + \cdots + a_{n-m+1+m-1} = \sum_{i=1}^{n-m+1} a_{i+m-1}$

(3) ✓

(4) ✓

(5)

(6) ✓

(7) $\sum_{i=1}^{n} a_i - a_{i-1} = a_n - a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} + \cdots + a_2 - a_1 + a_1 - a_0 = a_n - a_0$.

(8)

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{i=1}^{n} i \\
S &= 1 + 2 + \cdots + n \\
S &= n + n - 1 + \cdots + 1 \\
2S &= (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) \\
2S &= n(n+1) \\
S &= \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

(9)

$$\sum_{i=1}^{n}(i^3 - (i-1)^3) = n^3 - 0^3$$

Aussi,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\left((i^3 - (i-1)^3\right) &= \sum_{i=1}^{n}\left(i^3 - \left(i^3 - 3i^2 + 3i - 1\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(3i^2 - 3^i + 1\right) \\
&= 3\sum_{i=1}^{n} i^2 - 3\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 \\
&= 3\sum_{i=1}^{n} i^2 - 3\frac{n(n+1)}{2} + n
\end{aligned}$$

Mettons les deux ensemble :

$$\begin{aligned}
n^3 &= 3\sum_{i=1}^{n} i^2 - 3\frac{n(n+1)}{2} + n \\
\sum_{i=1}^{n} i^2 &= \frac{1}{3}\left(n^3 + 3\frac{n(n+1)}{2} - n\right) \\
&= \frac{n}{6}\left(2n^2 + 3n + 1\right) \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

(10) Exercice

(11)

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{i=1}^{n} r^i \\
S &= r + r^2 + \cdots + r^n \\
rS &= r^2 + r^3 + \cdots + r^{n+1} \\
rS - S &= r^{n+1} - r \\
S &= \frac{r^{n+1} - r}{r - 1}
\end{aligned}$$

□

Exemples 1.13

$$\sum_{i=1}^{100} i = \frac{100 * (100+1)}{2} = \frac{10100}{2} = 5050$$

$$\sum_{k=5}^{12} k^2 = \rule{10cm}{0.4pt}$$

$$\sum_{i=1}^{20} i^2 - i - 10 = \rule{10cm}{0.4pt}$$

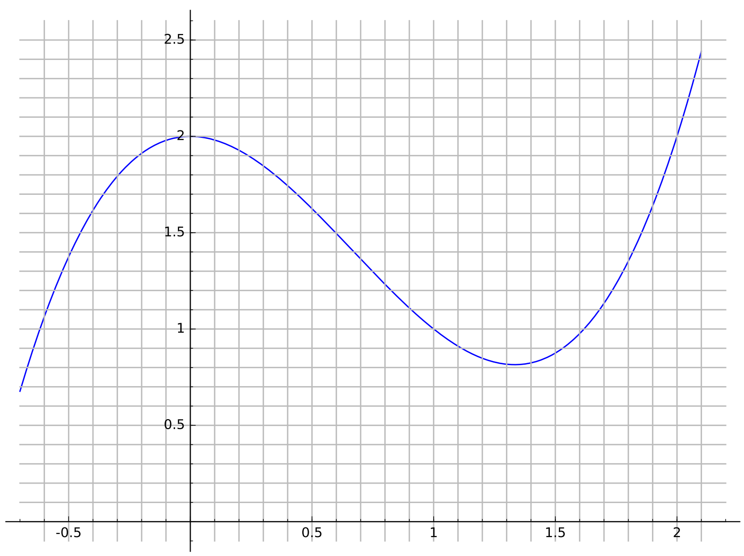
2. Semaine 2 : 17 septembre 2018

2.1. **Partie 1.**

2.1.1. *Rappel.*

2.1.2. *L'aire d'une surface sous une courbe (§1.4 ou §3.2).*

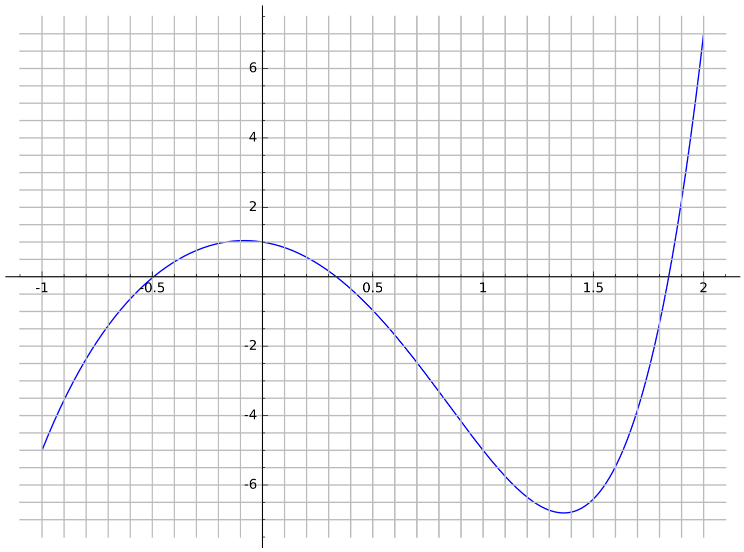
Supposons qu'on a la fonction $f(x) = x^3 - 2\,x^2 + 2$:



Supposons qu'on veut l'aire sous la courbe de 0 à 2. Comment on peut faire ça ?

Estimation : ___.

2.1.3. *Somme de Riemann et Intégrale Définie (§1.5 ou §3.2).* On travail sur la fonction $f(x) = x^5 - 6\,x^2 - x + 1$:



Soit un intervalle fermé $[a, b]$. Une ______________ de l'intervalle sont des nombres x_i tels que :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Ça nous donne n sous-intervalles :

$$[x_0, x_1],\ [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$$

Si les intervalles sont tous de même longueur (______) on dit que la partition est *régulière*.

Exemple 2.1 Soit $a = 2$ et $b = 5$, deux partitions seraient :

$$2 < 2.1 < 3 < 4.2 < \_\_\_\_\_ < 4.51 < 5$$

$$2 < 3 < \_\_ < 5$$

avec les intervalles

$$[2, 2.1],\ [2.1, 3],\ [3, 4.2], \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_, [4.51, 5]$$

$$[2, 3], \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Est-ce que elles sont régulières ? ________________________________.

Exemple 2.2 Soit $a = 0$ et $b = 1$, donne une partition régulière :

On va toujours supposer que nos partitions sont régulières même si dans le livre c'est pas le cas.

La _______________ *d'un intervalle* est la difference entre le début et la fin : ____________________________ pour l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$.

Soit $x_i^\star \in [x_{i-1}, x_i]$, la ___________________________________ de la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$ est la somme

La *somme à gauche (droite)* est la somme de Riemann où on prend $x_i^\star =$ ________ ($x_i^\star =$ ____). La *somme au* ___________ est la somme de Riemann où on prend $x_i^\star = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$.

Alors, maintenant on rencontre un problème. On aimerait trouver l'aire mais on a fait que les approximations ! Qu'est-ce qu'on peut faire pour trouver l'aire exacte ?

La réponse est d'utiliser les limites. Oui. . . les limites.

La limite qu'on va utiliser pour trouver l'aire est :

Si cette limite existe on dit que la fonction est *intégrable au* ______________________________.

MAIS, cette notation est horrible. Qui veut écrire ça à chaque fois ? Personne. Alors on va utiliser une autre notation que (je pense) tout le monde a déjà vu : l'intégrale.

Remarque 2.3 On a utilisé le Σ pour la sommation. Alors il nous faut un autre symbole pour l'intégrale. Heureusement Gottfried Leibniz d'Allemagne a utilisé une notation parfaite dans ses notes de 1675. Il a utilisé le s long allemand de l'epoque : ſ. Pourquoi ? Parce que l'intégrale est une sommation d'une infinitée de sommations. Donc ſ est parfait pour ça. (Même les français ont utilisé le s long jusqu'à 1800 !)

Mais aussi il faut changer le Δ parce qu'on a pris la limite. On va regarder ce qu'il se passe pour le valeur de Δx_i à la limite. Quand on fait la sommation à l'infinie, le valeur de Δx_i diminue. Ainsi, on veut "diminuer" Δ. Alors, c'est quoi le miniscule de Δ ? C'est δ ! Mais, Leibniz est allemand, alors il a utilisé la version allemande de δ : d. Ainsi le Δ devient d.

Alors, SI notre fonction est intégrable au sens de Riemann, on va écrire :

$$\rule{4cm}{0.4pt} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^\star)\Delta x_i.$$

Quelques définitions :

— Le a est la *borne* _______________ *d'intégration.*

— Le b est la *borne* _______________ *d'intégration.*

— Le $f(x)$ est *l'intégrande.*

— Le x est la ____________ *d'intégration.*

Théorème 2.4 *Si $f(x)$ est une fonction _____________ sur un intervalle $[a, b]$, alors la fonction est _______________ sur cet intervalle.*

2.1.4. *Propriétés des intégrales définies (§1.6 ou §3.2).*

Proposition 2.5 *(1)* $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$

(2) $\int_a^a f(x)\,dx =$ __

(3) $\int_a^b f(x)\,dx =$ ____________________

(4) $\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x))\; dx \;=\; c_1 \int_a^b f(x)\,dx \,+\, c_2 \int_a^b g(x)\,dx$ *(linéarité).*

(5) $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx =$ ________________

Démonstration. (1) ✓

(2) ✓

(3) ✓

(4) Utiliser la définition (dans le livre)

(5) Encore dans le livre, mais une petite remarque sur pourquoi c'est bien définie.

□

2.1.5. *Théorème fondamental du calcul intégrale (§1.7 ou §3.3).* On a vu la propriété suivante pour les sommations :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i - a_{i-1} = \rule{3cm}{0.4pt}.$$

Comme on peut voir, notre intégrale est définie de façon similaire :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^\star)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^\star)(x_i - x_{i-1}).$$

alors on veut savoir s'il existe un moyen plus facile pour trouver l'aire. Et on va voir très bientôt qu'il existe un moyen !

Théorème 2.6 *Si $F(x)$ et $G(x)$ sont des fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ et si $F'(x) = G'(x)$ pour tout $x \in]a,b[$, alors ____________________________, où c est un constante, pour tout $x \in [a,b]$.*

Si $f(x)$ et $F(x)$ sont des fonctions telles que $F'(x) = f(x)$ alors on dit que $F(x)$ est une *primitive* de $f(x)$.

Et on peut maintenant donner le théorème fondamental du calcul intégral :

Théorème 2.7 (Théorème fondamental du calcul intégral) *Si $f(x)$ est une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ et si $F(x)$ est une primitve de $f(x)$ alors*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

2.2. **Partie 2.**

2.2.1. *Primitives élémentaires (§1.9 ou §2.1).*

Fonction	**Primitive**
x^n où $n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
x^{-1}	
$\sin(kx)$ où $k \neq 0$	$-\frac{\cos(kx)}{k}$
$\cos(kx)$ où $k \neq 0$	$\frac{\sin(kx)}{k}$
$\sec^2(kx)$ où $k \neq 0$	
$\mathrm{cosec}^2(kx)$ où $k \neq 0$	$-\frac{\mathrm{cotan}(kx)}{k}$
$\sec(kx)\tan(kx)$ où $k \neq 0$	$\frac{\sec(kx)}{k}$
$\mathrm{cosec}(kx)\,\mathrm{cotan}(kx)$ où $k \neq 0$	$-\frac{\mathrm{cosec}(kx)}{k}$
e^{kx} où $k \neq 0$	

Exemple 2.8

$$\int_1^2 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8-1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\int_2^4 2x\,dx = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$\int_0^\pi \sin(x)\,dx = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$\int_5^5 e^{x^2}\cdot\sin^2(x^2)\,dx = \underline{\hspace{10cm}}$$

2.2.2. *Les preuves de nos Théorèmes (§1.10 ou §3.3).* Vous avez vu le prochain théorème dans un cours de calcul différentiel.

Théorème 2.9 (Théorème des accroissements finis (ou théorème de la moyenne)) *Si $f(x)$ est une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ et si $f(x)$ est dérivable pour tout $x \in]a,b[$, alors il existe au moins une valeur de $c \in]a,b[$ telle que*

$$f'(c) = \underline{\hspace{4cm}}.$$

Théorème 2.6. *Si $F(x)$ et $G(x)$ sont des fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ et si $F'(x) = G'(x)$ pour tout $x \in]a,b[$, alors ____________________, où c est un constante, pour tout $x \in [a,b]$.*

Démonstration. Si $H(x) = F(x) - G(x)$ alors $H'(x) = F'(x) - G'(x) = 0$ (parce que $F'(x) = G'(x)$) pour tout $x \in]a,b[$. Prennons $x_1, x_2 \in]a,b[$ tels que __________. Puisque nos fonctions sont continues et dérivables, $H(x)$ est continue et dérivable en x_1, x_2. Par le théorème des ________________________, il existe une constante $c \in]x_1, x_2[$ telle que $H'(c) = \frac{H(x_2)-H(x_1)}{x_2-x_1} = 0$ (parce que $c \in]a,b[$). Alors, comme $x_1 < x_2$ et $H'(c) = 0$ on a que ____
Alors, pour tout $x \in [a,b]$ on a $c = H(x) = F(x) - G(x)$, *i.e.*, $F(x) = G(x) + c$. □

Théorème 2.7 (Théorème fondamental du calcul intégral)**.** *Si $f(x)$ est une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ et si $F(x)$ est une primite de $f(x)$ alors*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\hspace{8cm}}.$$

Démonstration. $f(x)$ est continue, alors $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^\star)\Delta x_k$ existe. La fonction $F(x)$ est dérivable ($F'(x) = f(x)$) et alors ____________. Donc par le théorème des accroissements finis pour tout $x_i^\star \in]x_{i-1}, x_i[$ on a

$$f(x_i^\star) = F'(x_i^\star) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{\Delta x_i}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \underline{\hspace{8cm}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{\Delta x_i} \Delta x_i \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} F(x_i) - F(x_{i-1}) \\
&= \underline{\hspace{8cm}} \\
&= F(b) - F(a)
\end{aligned}$$

□

2.2.3. *Formules d'intégration de base (§2.2 ou §2.1).* À cause du théorème fondamental du calcul intégral, pour trouver l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ il faut trouver une fonction $F(x)$ telle que $F'(x) = f(x)$. Mais, ça n'est pas toujours facile.

Exemple 2.10 Trouve une fonction $F(x)$ telle que $F'(x) = f(x) = e^{x^2}$.

Une *intégrale* ______________ est l'ensemble de toutes les primitives d'une fonction donnée. C'est-à-dire : ______________________________ où c est une constante.

Qu'est-ce que ça veut dire ?

Exemple 2.11 Par exemple, on peut voir que $\int k\,dx = kx + c$. Ça veut dire que kx est une ______________ de k. Pour montrer que c'est vrai il suffit de voir que ______________.

On a plusieurs formules d'intégration provenant du cours de calcul différentiel :

(1) $\int k\,dx = kx + c$
(2) $\int [k_1 f(x) + k_2 g(x)]\,dx = k_1 \int f(x)\,dx + k_2 \int g(x)\,dx$
(3) $\int x^n\,dx =$ ______________________________
(4) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + c$
(5) $\int e^x\,dx =$ __________
(6) $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ (où $1 \neq a > 0$)
(7) $\int \sin(x)\,dx =$ __________________
(8) $\int \cos(x)\,dx =$ _______________

(9) $\int \sec(x)\,dx = \ln(|\sec(x) + \tan(x)|) + c$

(10) $\int \operatorname{cosec}(x)\,dx = \ln(|\operatorname{cosec}(x) - \operatorname{cotan}(x)|) + c$

(11) $\int \tan(x)\,dx = \ln(|\sec(x)|) + c$

(12) $\int \operatorname{cotan}(x)\,dx = \ln(|\sin(x)|) + c$

(13) $\int \sec^2(x)\,dx = \tan(x) + c$

(14) $\int \operatorname{cosec}^2(x)\,dx = -\operatorname{cotan}(x) + c$

(15) $\int \sec(x)\tan(x)\,dx = \sec(x) + c$

(16) $\int \operatorname{cosec}(x)\operatorname{cotan}(x)\,dx = -\operatorname{cosec}(x) + c$

(17) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x) + c$

(18) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{arcsec}(|x|) + c$

(19) $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x) + c$

Mais, pourquoi ? Parce que, ça nous donne une façon de facilement trouver l'intégrale définie.

Exemple 2.12 Évaluez les expressions suivantes :

(1)

$$\begin{aligned}
\int_2^4 \frac{12}{x^3}\,dx &= 12\int_2^4 \frac{1}{x^3}\,dx \\
&= 12 \cdot \frac{1}{-2x^2}\Big|_2^4 \\
&= 12 \cdot (\frac{1}{-2\cdot 4^2} - \frac{1}{-2\cdot 2^2}) \\
&= 12 \cdot (\frac{1}{-32} - \frac{1}{-8}) \\
&= 12 \cdot (\frac{4}{32} - \frac{1}{32}) \\
&= 12 \cdot \frac{3}{32} \\
&= \frac{9}{8}.
\end{aligned}$$

(2)

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx \quad = $$

$$= 1$$

Exemple 2.13 Un exemple plus compliqué. Disons qu'on veut trouver $\int_0^\pi 3x^2 - e^x + \cos(x)\,dx$.

$\displaystyle\int 3x^2 - e^x + \cos(x)\,dx =$ ____

Alors

$$\int_0^\pi 3x^2 - e^x + \cos(x)\,dx \quad = $$

$$= \pi^3 - e^\pi + 1$$

3. Semaine 3 : 24 septembre 2018

3.1. **Partie 1.**

3.1.1. *Rappel.*

3.1.2. *Changement de variable(§2.3 ou §2.2).*

Soit deux polynômes $P(x)$ et $Q(x)$. Une fonction ____________________ est une fonction de la forme $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Rappelons que le __________ d'un polynôme est le degré le plus élevé de ses termes. Si le degré du numérateur est inférieur au degré du dénominateur, on dit que la fonction est une ____________________________. Sinon, c'est une ________________________________.

Exemple 3.1 Lequelles sont propres ?

$$\frac{x^7 - x^6 + 2}{x^5 - 97} \ \rule{2cm}{0.4pt} \qquad \frac{x^3 + 1}{x^3 + 2} \ \rule{2cm}{0.4pt}$$

$$\frac{x^2 + 99001}{x^3} \ \rule{2cm}{0.4pt} \qquad \frac{(x+1)(x^2-3)^3}{(x-8)(x^3+2)(x^2+x-1)^2} \ \rule{2cm}{0.4pt}$$

Si notre fraction n'est pas propre, on fait la division.

Exemple 3.2 Soit

$$P(x) = 2x^6 - x^5 - x^4 + 3x - 3 \quad Q(x) = x^4 - x^3 \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x^6 - x^5 - x^4 + 3x - 3}{x^4 - x^3}$$

une fraction impropre. Faisons la division. Alors

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x^6 - x^5 - x^4 + 3x - 3}{x^4 - x^3} = 2x^2+x+\frac{3x-3}{x^4-x^3} = 2x^2+x+\frac{3(x-1)}{x^3(x-1)} = 2x^2+x+\frac{3}{x^3}$$

Et pourquoi on a fait ça ? Pour avoir une fonction plus facile pour faire l'intégration :

Mais, on a encore un problème. Qu'est-ce qu'on peut faire avec une intégrale comme : ____________________ ?

Avec les choses qu'on a vu, on a aucun moyen de faire cette intégrale. Heureusement, on peut appliquer une strategie qui s'appelle ____________________________________.

On aimerait avoir quelque chose plus simple. Ça serait cool si on peut changer notre intégrale pour être : $\int x^{7/9}\,dx$ parce que là, on sait ce qu'il faut faire. Alors, on va essayer de faire ça.

Mettons $u = 3x+2$. Alors, on a bien $\int u^{7/9}\,dx$. C'est quoi le problème ? ____________________

Alors on va faire :

$$u = 3x + 2 \Rightarrow \rule{5cm}{0.4pt}$$

et alors

$$\begin{aligned}\int (3x+2)^{7/9}\,dx &= \rule{5cm}{0.4pt}\\ &= \frac{1}{3}\int u^{7/9}\,du\\ &= \rule{5.5cm}{0.4pt}\\ &= \frac{9}{3\cdot 16}u^{16/9} + c\\ &= \frac{3}{16}(3x+2)^{16/9} + c\end{aligned}$$

Et voilà, c'est fait ! Qu'est-ce qu'on a fait ?

(1) ______________________________

(2) _________________________________

(3) ____

(4) ______________________________

(5) ____

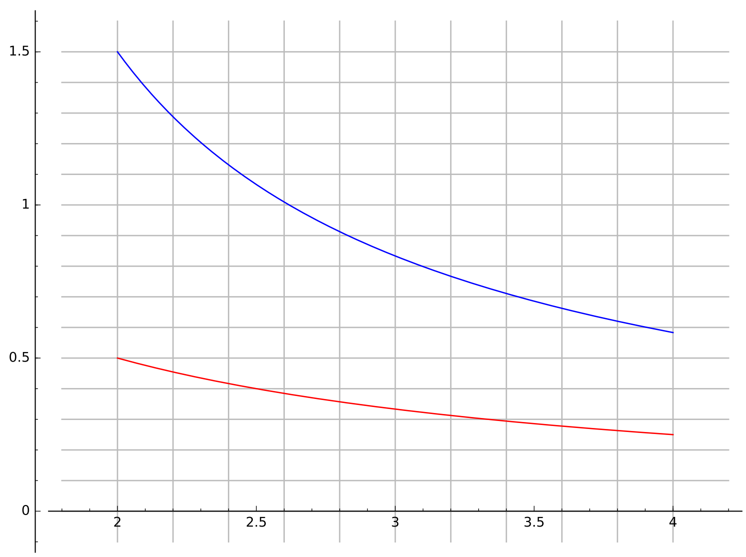
À ton tour, essaye-le. Trouver l'intégrale indéfinie : $\int x(7x^2-8)^{16/7}\,dx$

Mais on a fait tout ça pour pouvoir calculer des intégrales définies ! Alors, qu'est-ce que passe pour ça ?

Trouvons l'intégrale définie : $\int_2^4 \frac{2x-1}{x^2-x}\,dx$ Les changements de variable : Alors

Mais il y a encore un nouveau problème ! ______________________________.

Regardons les deux fonctions ensemble. Celui de x en haut (bleue) et celui de u en bas (rouge).



Alors, on va faire comme on a fait avec le dx.

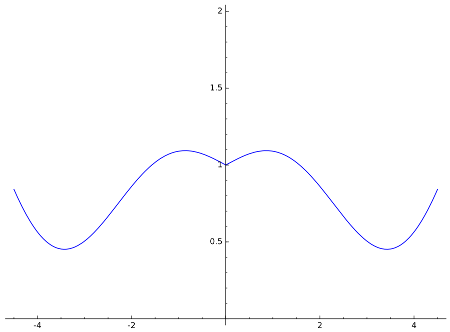
Théorème 3.3 (Changement de variable dans une intégrale définie) *Si $g'(x)$ est une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ et si $f(x)$ est une fonction continue qui admet ________________________ sur l'intervalle couvrant les valeurs $g(a)$ et $g(b)$, alors*

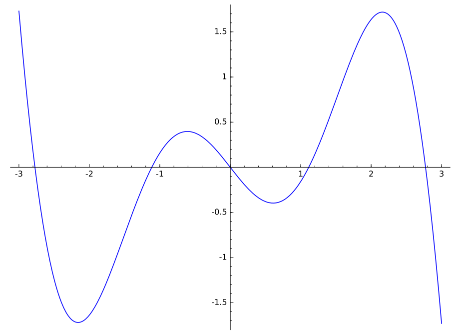
$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \underline{\hspace{6cm}}$$

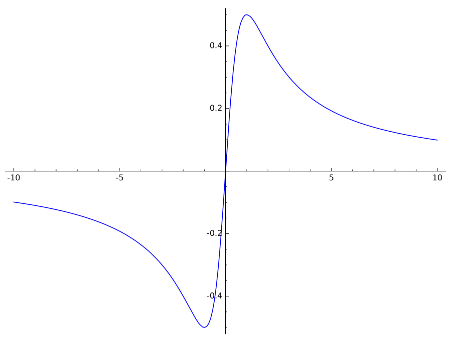
Essayons quelque chose plus fun : $\int \operatorname{cotan}(ax)\,dx$ pour $a \in \mathbb{R}$.

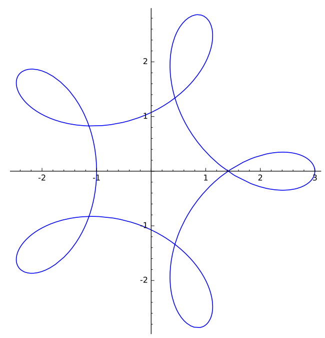
3.2. **Partie 2.**

3.2.1. *Fonctions paires et impaires (§2.3.3 ou -).* On dit qu'une fonction $f(x)$ est _________ si $f(-x) = f(x)$ et _____________ si $f(-x) = -f(x)$ Des exemples :









Théorème 3.4 (Propriétés des fonctions paires et impaires) *Si $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont des fonctions paires et si $g_1(x)$ et $g_2(x)$ sont des fonctions impaires, alors, là où les opérations sont définies :*

(1) $f_1(x)f_2(x)$ et $g_1(x)g_2(x)$ sont fonctions __________.

(2) $f_1(x)g_1(x)$ est une fonction _____________.

(3) $\int_{-a}^{a} f_1(x)\,dx =$ ______________________

(4) $\int_{-a}^{a} g_1(x)\,dx =$ __

Démonstration. On va montrer que

$$\int_{-a}^{a} f_1(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f_1(x)\,dx$$

Soit une fonction paire $f(x)$. Par définition $f(-x) = f(x)$.

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\
&= \rule{7cm}{0.4pt} \\
&= -\int_{a}^{0} f(u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\
&= \int_{0}^{a} f(u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\
&= \rule{6cm}{0.4pt} \\
&= 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx
\end{aligned}$$

□

Exemple 3.5

$$\int_{-a}^{a} x^2\sin(x) - x^7 + x\cos(x)\,dx = \_\_$$

3.2.2. *Complétion du carré (§2.3.4 ou -).* On va regarder les trois intégrales suivantes :

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \rule{3cm}{0.4pt}$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \rule{3.5cm}{0.4pt}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \rule{3cm}{0.4pt}$$

Ils ont tous la forme : ______________. Alors, on va trouver une façon de changer un polynôme $ax^2 + bx + c$ en un polynôme de la forme $\pm x^2 \pm 1$. On appelle ça : ___________________________________. Cela consiste à transformer notre polynôme dans la façon suivante :

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\
&= \rule{8cm}{0.4pt} \\
&= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right)
\end{aligned}$$

Mais, pour vrai, c'est trop difficile de mémoriser cette formule. La seule partie qu'il faut vraiment se rappeler est comment choisir notre $\frac{b^2}{4a^2}$. Et pour ça, c'est plus simple de commencer avec un exemple très facile :

Exemple 3.6

$$x^2 + bx$$

Ici, on a déjà que $a = 1$ et $c = 0$, mais comme j'ai dit, on ne va pas regarder ça pour l'instant. On veut changer $x^2 + bx$ en "un carré".

Donc, on va faire l'inverse. Supposons qu'on a :

$$(x + d)^2 = \underline{\hspace{6cm}}$$

Ainsi, dans l'autre sense, il faut diviser notre b par 2 ce qui nous donne :

$$x^2 + bx =$$

Exemple 3.7 Essayons avec des exemples réel :

$$x^2 + 8x = x^2 + 8x + 4^2 - 4^2 = (x + 4)^2 - 4^2$$

$$x^2 - 7x = \underline{\hspace{9cm}}$$

$$2x^2 + 4x = \underline{\hspace{7.5cm}}$$

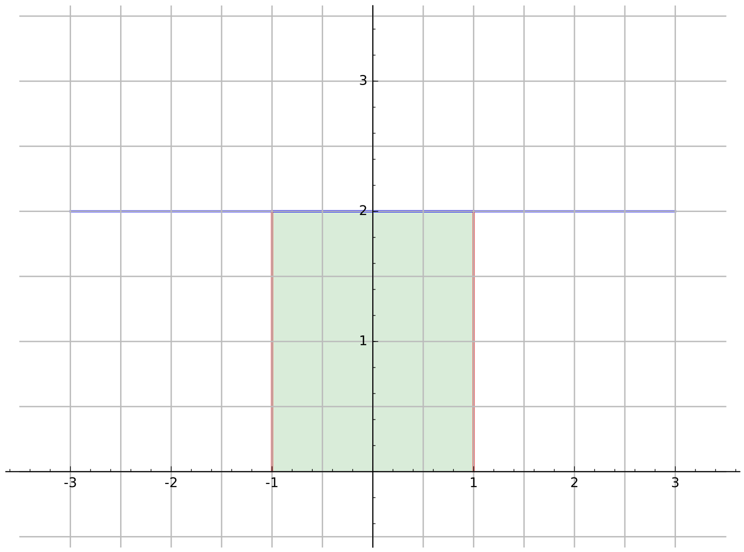
$$3x^2 - 5x = \underline{\hspace{11cm}}$$

$$x^2 + 4x - 1 = \underline{\hspace{14cm}}$$

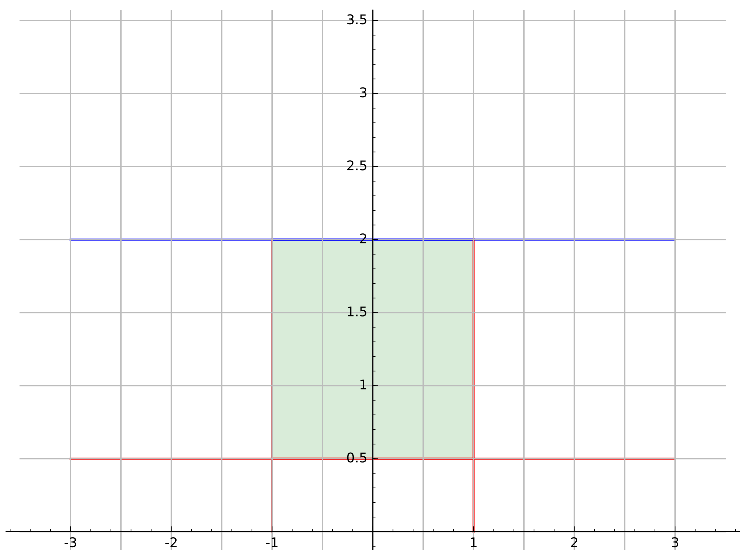
Alors, maintenant, on peut faire les intégrations qu'on voulait au début :

$$\int \frac{x + 2}{\sqrt{-2x^2 - 12x - 10}}\, dx$$

3.2.3. *L'aire d'une surface plane (§3.1 ou §3.4).* Disons qu'on veut l'aire d'une surface comme une carrée



On veut utiliser l'intégration pour trouver l'aire. Depuis le début du cours, on sait déjà que $\int_{-1}^{1} 2\,dx$ va nous donner l'aire. Mais qu'est-ce qu'on peut faire si on change la taille de notre carrée ?



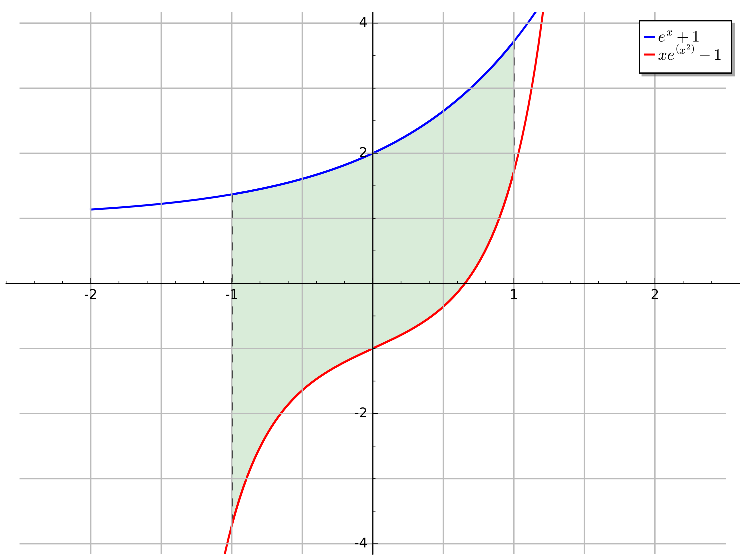
On peut le voir comme l'aire de la fonction en haut moins l'aire de la fonction en bas. C'est-à-dire

$$\int_{-1}^{1} \left(2 - \tfrac{1}{2}\right) \, dx \quad =$$

$$= 3$$

Mais ça c'était trop facile. Donc prenons quelque chose de plus difficile.

Exemple 3.8 C'est quoi l'aire entre ces deux courbes ?



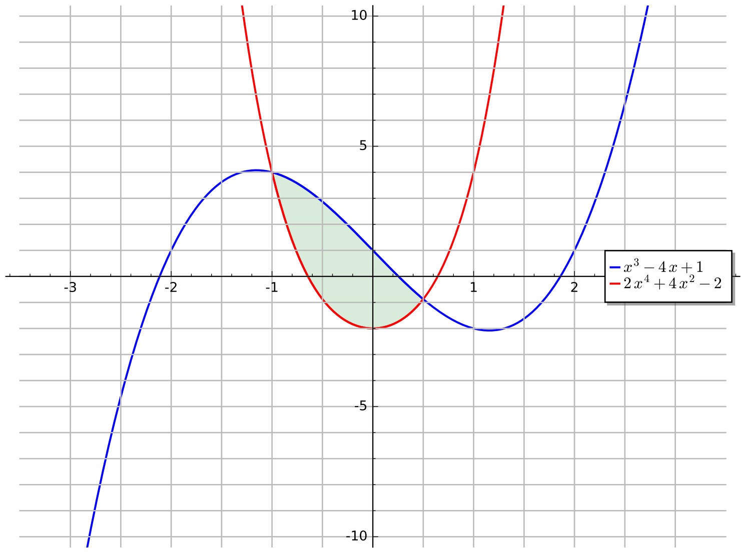
En bleu on a la fonction $e^x + 1$ et en rouge on a la fonction $xe^x - 1$.

On va faire la même chose. On trouve l'aire sous la courbe du haut et on soustrait l'aire sous la courbe du bas. Donc, on a

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_{-1}^{1} e^x \, dx &= e^x|_{-1}^{1} = e^1 - e^{-1} \\
\textstyle\int_{-1}^{1} 2 \, dx &= 2x|_{-1}^{1} = 2 \cdot 1 - 2 \cdot -1 = 2 + 2 = 4 \\
\textstyle\int_{-1}^{1} xe^{(x^2)} \, dx &= \\
&= 0
\end{aligned}$$

Alors l'aire est $e^1 - e^{-1} + 4$.

Exemple 3.9 Faisons un autre exemple



Donc en bleue on a $x^3 - 4x + 1$ et en rouge on a $2x^4 + 4x^2 - 2$. Si on veut l'aire du milieu il faut premièrement trouver où ces deux courbes intersectent.

Elles intersectent quand ____.
Donc il faut trouver les racines de $2x^4 - x^3 + 4x^2 + 4x - 3$.

Ainsi, il faut utiliser les ______________________ : p/q est une racine d'un polynôme $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ si $p|a_0$ et $q|a_n$. Alors, on sait que les racines doivent être dans l'ensemble : $\left\{\pm 3, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\}$.

Si on regarde notre image, ça nous donne des indices. Donc, on va voir si -1 et $\frac{1}{2}$ sont des racines.

$$\text{Si } x = -1 \;\Rightarrow\; \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Alors ____________________________.

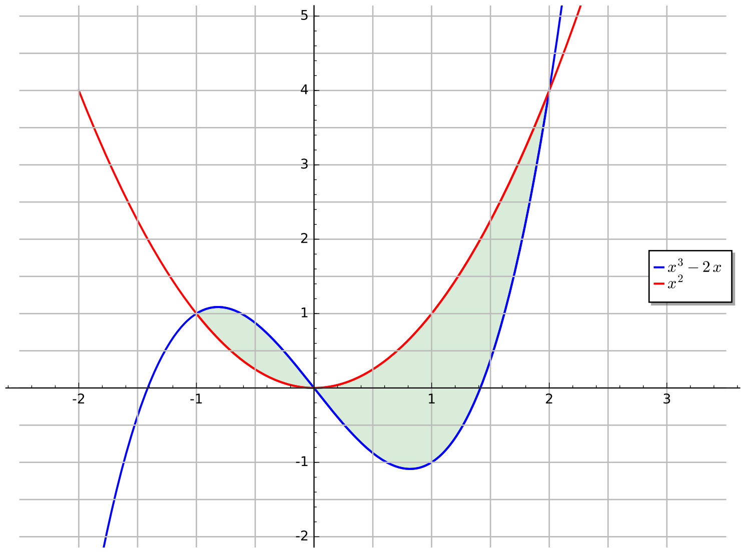
$$\text{Si } x = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Ainsi _________________________________.

Alors, on peut maintenant trouver l'aire. Mais, il faut savoir quelle fonction on soutraite de l'autre. On peut voir que la bleue est au dessus donc, on fait

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \left(x^3 - 4x + 1\right) - \left(2x^4 + 4x^2 - 2\right)\, dx &= \\
&= \frac{-2x^5}{5} + \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 3x\Big|_{-1}^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{-2}{5\cdot 2^5} + \frac{1}{2^2\cdot 2^4} - \frac{2^2}{3\cdot 2^3} - \frac{2^2}{2\cdot 2^2} + \frac{3}{2}\right) \\
&\quad - \left(\frac{-2\cdot -1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{4\cdot -1}{3} - \frac{4}{2} + 3\cdot -1\right) \\
&= \frac{-2\cdot 2\cdot 3 + 5\cdot 3 - 2^2\cdot 2^3\cdot 5 - 2^2\cdot 2^3\cdot 5\cdot 3 + 3\cdot 2^5\cdot 5\cdot 3}{3\cdot 5\cdot 2^6} \\
&\quad - \frac{2\cdot 4\cdot 3 + 3\cdot 5 + 4\cdot 4\cdot 5 - 4\cdot 3\cdot 5\cdot 2 - 3\cdot 5\cdot 4\cdot 5}{5\cdot 4\cdot 3} \\
&= \frac{-12 + 15 - 160 - 480 + 1440}{3\cdot 5\cdot 2^6} - \frac{24 + 15 + 80 - 120 - 180}{3\cdot 4\cdot 5} \\
&= \frac{803}{3\cdot 5\cdot 2^6} - \frac{-181}{3\cdot 5\cdot 2^2} \\
&= \frac{803 + 181\cdot 2^4}{3\cdot 5\cdot 2^6} \\
&= \frac{803 + 2896}{3\cdot 5\cdot 2^6} \\
&= \frac{3699}{3\cdot 5\cdot 2^6} \\
&= \frac{1233}{5\cdot 2^6} \\
&= \frac{1233}{320}
\end{aligned}
$$

Exemple 3.10 Un dernier exemple. Si on veut l'air dans les deux regions suivant :


5
4
3
2
1
-1
-2
-2
-1
1
2
3
$x^3 - 2x$
x^2

4. Semaine 4 : 15 octobre 2018

4.1. **Partie 1.**

4.1.1. *Rappel.*

4.1.2. *Intégration par parties (§2.4 ou §4.1).* Disons que $f(x) = u$ et $g(x) = v$. Alors $d(uv) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x) = udv + vdu$. Donc, on peut avoir $\int_a^b d(uv) = \int_a^b udv + \int_a^b vdu$. Ça nous donne :

La version indéfinie est donnée par :

Une intégration utilisant la propriété a-dessus est une ____. Faisons des exemples.

Exemples 4.1 (1) $\int (e^x)^2\,dx = ?$

$$u = e^x \qquad dv = e^x\,dx$$

$$du = e^x\,dx \qquad v = e^x$$

$$\int (e^x)^2\,dx = (e^x)^2 - \int (e^x)(e^x\,dx)$$

$$2\int (e^x)^2\,dx = (e^x)^2$$

$$\int (e^x)^2\,dx = \frac{(e^x)^2}{2} + c$$

(2) $\int x\cos(x)\,dx =$

(3) $\int x^2\sin(x)\,dx =$

(4) $\int e^x \sin(x)\, dx =$

Des indices : Supposons qu'on a $\int f(x)g(x)\, dx$. Si $f(x)$ est un polynôme, on veut toujours essayer avec $u = f(x)$ et $dv = g(x)\, dx$. Si $f(x)$ est une exponentielle et $g(x)$ une fonction trigonométrique, on peut choisir n'importe laquelle pour u et l'autre pour dv.

Aide mémoire

L ______

I ____

A ____________

T __________________________

E ______________________

4.1.3. *Intégration de fonctions trigonométriques (§2.5 ou §4.2).* Des fois, il faut utiliser des identités trigonométriques pour faciliter les intégrales. Voici une liste qui peut t'aider :

(1) $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

(2) $1 + \tan^2(x) =$ ____________
(3) $1 + \cot^2(x) =$ ____________
(4) $\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\left(\sin(x-y) + \sin(x+y)\right)$
(5) $\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)$
(6) $\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) + \cos(x+y)\right)$
(7) $\sin(x \pm y) =$ ____
(8) $\cos(x \pm y) =$ ____

On peut utiliser cette liste pour avoir des identitées plus simple :

Pourquoi ça nous aide ?

Exemple 4.2 Essayons de trouver l'intégrale : $\int \sin(32x)\cos(3501x)\,dx$. Utilisons l'intégration par parties !

$$u = \sin(32x) \qquad dv = \cos(3501x)\,dx$$
$$du = \cos(32x) \qquad v = \frac{\sin(3501x)}{3501}$$

$$\int \sin(32x)\cos(3501x)\,dx = \underline{\hspace{10cm}}$$

On a le même problème ! Rien a changé. ☹ Alors on va utiliser une identité trigonométrique.

$$\sin(32x)\cos(3501x) = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$\begin{aligned}\int \sin(32x)\cos(3501x)\,dx &= \underline{\hspace{9cm}}\\ &= \frac{-\cos(-3469x)}{2 * -3469} + \frac{-\cos(3533x)}{2 * 3533} + c\\ &= \frac{\cos(-3469x)}{6938} + \frac{-\cos(3533x)}{7066} + c\end{aligned}$$

4.1.4. *Les intégrales du type $\int \sin^m(x)\cos^n(x)\,dx$ (§2.5.2 ou §4.2).* Supposons qu'on a l'intégrale : $\int \sin^m(x)\cos^n(x)\,dx$. On a plusieurs astuces pour trouver une primitive.

(1) Si m ou n est impair, on a un moyen pour la trouver. Supposons $m = 2k+1$. On peut utiliser l'intégration par substitution !

$$u = \cos(x) \qquad du = -\sin(x)\,dx$$

$$\begin{aligned}
\int \sin^m(x)\cos^n(x)\,dx &= \int \sin^{2k+1}(x) u^n \frac{du}{-\sin(x)} \\
&= -\int \sin^{2k}(x) u^n du \\
&= -\int (\sin^2(x))^k u^n du \\
&= -\int (1-\cos^2(x))^k u^n du \\
&= -\int (1-u^2)^k u^n du
\end{aligned}$$

Alors essayons ça dans un vrai exemple : $\int \cos^5(x)\sin^2(x)\,dx$. On a $5 = 2\cdot 2+1$, donc impair !

$$u = \sin(x) \qquad du = \cos(x)\,dx$$

$$\begin{aligned}
\int \cos^5(x)\sin^2(x)\,dx &= \underline{\hspace{12cm}} \\
&= \int \left(\cos^2(x)\right)^2 u^2 du \\
&= \underline{\hspace{11cm}} \\
&= \int \left(1-u^2\right)^2 u^2 du \\
&= \underline{\hspace{11cm}} \\
&= \int u^2 - 2u^4 + u^6 du \\
&= \int u^2 du - 2\int u^4 du + \int u^6 du \\
&= \frac{u^3}{3} - 2\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + c \\
&= \frac{\sin^3(x)}{3} - \frac{2\sin^5(x)}{5} + \frac{\sin^7(x)}{7} + c
\end{aligned}$$

Et quelque chose plus difficile : $\int \sin^3(x)\cos^{(-3/7)}(x)\,dx$

4.2. **Partie 2.**

(2) Si m et n sont pairs et non négatifs. On va utiliser les trois propriétés qu'on a vu avant :

(a) $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$
(b) $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$
(c) $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

En utilisant ces formules, on fait des manipulations pour diminuer au max le degré.

Exemple 4.3 Faison l'exemple : $\int \sin^4(x)\cos^2(x)\,dx$

$$
\begin{aligned}
\int \sin^4(x)\cos^2(x)\,dx &= \underline{\hspace{20em}} \\
&= \int \frac{1-\cos(2x)}{2} \cdot \left(\frac{\sin(2x)}{2}\right)^2 dx \\
&= \int \frac{1-\cos(2x)}{2} \cdot \frac{\sin^2(2x)}{4}\,dx \\
&= \int \frac{\sin^2(2x)}{8} - \frac{\sin^2(2x)\cos(2x)}{8}\,dx \\
&= \underline{\hspace{30em}} \\
&= \frac{1}{16}\left(\int 1\,dx - \int \cos(4x)\,dx\right) - \frac{1}{8}\int \sin^2(2x)\cos(2x)\,dx \\
&= \frac{x}{16} - \frac{\sin(4x)}{64} + c - \frac{1}{8}\int \sin^2(2x)\cos(2x)\,dx
\end{aligned}
$$

Alors il faut résoudre $\int \sin^2(2x)\cos(2x)\,dx$

$$u = \sin(2x) \qquad du = 2\cos(2x)\,dx$$

$$\begin{aligned}
\int \sin^2(2x)\cos(2x)\,dx &= \underline{\hspace{8cm}} \\
&= \int \frac{u^2}{2} du \\
&= \frac{u^3}{6} + c \\
&= \frac{\sin^3(2x)}{6} + c
\end{aligned}$$

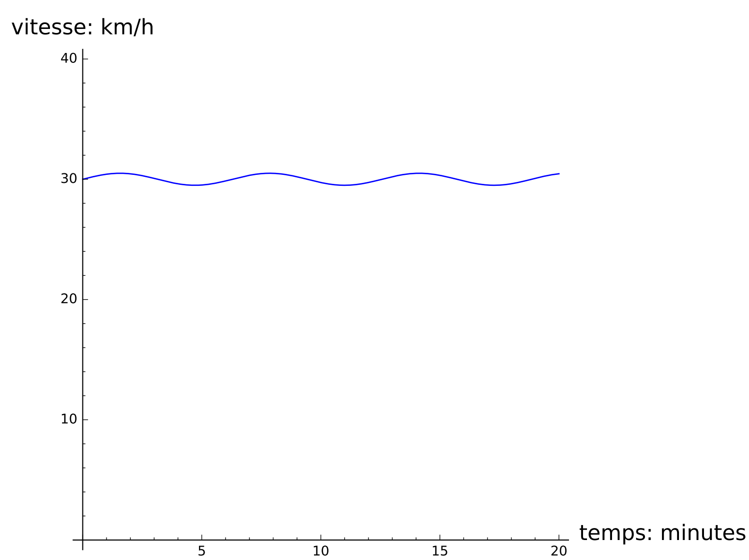
Alors, on a

$$\begin{aligned}
\int \sin^4(x)\cos^2(x)\,dx &= \frac{x}{16} - \frac{\sin(4x)}{64} + c - \frac{1}{8}\int \sin^2(2x)\cos(2x)\,dx \\
&= \frac{x}{16} - \frac{\sin(4x)}{64} + c - \frac{1}{8}\left(\frac{\sin^3(2x)}{6}\right) \\
&= \frac{x}{16} - \frac{\sin(4x)}{64} - \frac{\sin^3(2x)}{48} + c
\end{aligned}$$

4.2.1. *Applications en physique (- ou §3.5).*

(1) **Accélération, vitesse et déplacement**

Dans le cours de calcul différentiel, tu as probablement appris qu'il y a un lien entre l'accélération, la vitesse et le déplacement d'un objet. En effet, si on sait la distance qu'un objet à deplacer pendant un intervalle du temps, on peut trouver sa vitesse et sa acceleratin. Mais on peut utiliser l'intégrale pour aller dans l'ature sens. Supposons que tu est en train de conduire et ta vitesse est donnée par $\sin(x)/2 + 30$:



Donc, ça veut dire que à un chque instant ton pied est sur l'accélérateur ou non. Pour voir l'accélération à un moment donné, on peut calculer la derivée pour trouver notre accélération :

$$\frac{d(\frac{\sin(x)}{2}+30)}{dx}=\frac{\cos(x)}{2}$$

Mais, si on veut connaître la distance qu'on a parcouré il faut faire l'intégration !

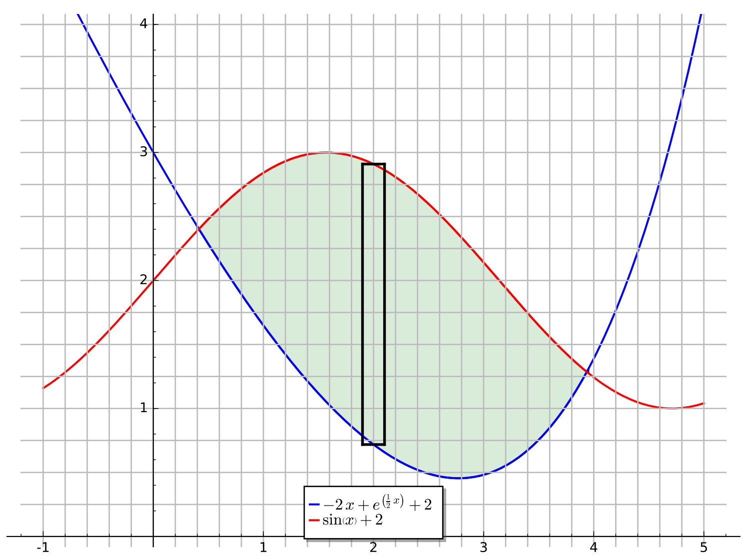
Donc disons que on a conduit pendant 25 minutes, alors, pour calculer la distance parcouré il suffit de faire l'intégrale :

$$\int_0^{25}\frac{\sin(x)}{2}+30\,dx=$$

Mais, ça nous donne pas la bonne réponse ! Il faut diviser par 60 parce que l'axe vertical est en "heures" et l'axe horizontal est en "minutes". Donc on a

(2) **Centre de gravité**

Le ______________ d'un objet mesure la tendence à tourner autour d'un axe. Les moments par rapport aux axes x et y sont donnés par : où $(\bar{x},\bar{y})$ est le *centre de gravité* de la surface et A est l'aire. Alors, comment est-ce qu'on peut trouver les moments ?



Ici, le centre de gravité pour la petite boite est donné par $\left(x_i,\frac{f(x_i)+g(x_i)}{2}\right)$. Donc

$$M_{x_i}=\bar{y}_iA_i=\left(\frac{f(x_i)+g(x_i)}{2}\right)((f(x_i)-g(x_i))\,\Delta x_i)$$

Alors, on peut faire

$$M_x =$$

Dans l'autre sens

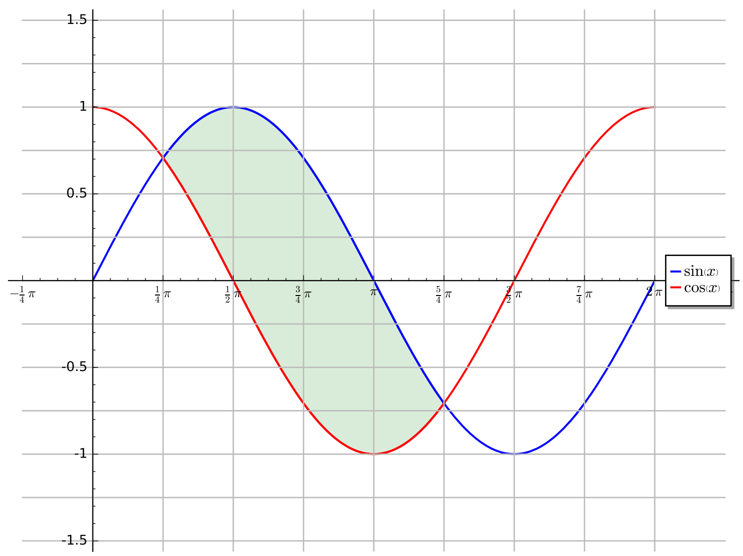
$$M_{y_i} = \bar{x}_i A_i = x_i \left(f(x_i) - g(x_i)\right) \Delta x_i$$

Donc,

$$M_y =$$

Exemple 4.4 Alors, faisons un exemple pour trouver le centre de gravité entre deux fonctions. Posons

$$f(x) = \sin(x) \qquad g(x) = \cos(x)$$



Donc, pour trouver le centre de gravité on a les formules :

$$M_x = \bar{y}A \qquad M_y\bar{x}A$$

Alors il faut trouver A, M_x, et M_y.

$$\begin{aligned}
A &= \\
&= -\cos(x) - \sin(x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \\
&= -\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) + \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&= -\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{-\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
&= 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_x &= \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_y &= \\
&= \frac{3\pi\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

Donc

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{\frac{3\pi\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{3\pi}{4} \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{A} = 0$$

5. Semaine 5 : 22 octobre 2018

Devoir 1 - Date d'échéance

5.1. **Partie 1.**

5.1.1. *Rappel.*

5.1.2. *Sécantes, cosécantes, tangentes, cotangentes ! (§2.5.3 ou §4.2).*

Commençons avec $\int \tan^n(ax)\,dx$ où $n \geq 1$. En général on a

$$\begin{aligned}
\int \tan^n(ax)\,dx &= \int \tan^2(ax)\tan^{n-2}(ax)\,dx \\
&= \underline{\hspace{8cm}} \\
&= \int \sec^2(ax)\tan^{n-2}(ax)\,dx - \int \tan^{n-2}(ax)\,dx
\end{aligned}$$

Cette intégrale n'a pas l'air plus simple que celle d'avant. Alors, on va essayer d'utiliser les méthodes qu'on a déjà vu dans le cours : ______________________________. Commençons avec __________________. Posons $u =$ __________, alors $du =$ ________________. D'où

$$\begin{aligned}
\int \sec^2(ax)\tan^{n-2}(ax)\,dx - \int \tan^{n-2}(ax)\,dx &= \underline{\hspace{8cm}} \\
&= \underline{\hspace{8cm}} \\
&= \frac{u^{n-1}}{a(n-1)} + c - \int \tan^{n-2}(ax)\,dx \\
&= \frac{\tan^{n-1}(ax)}{a(n-1)} + c - \int \tan^{n-2}(ax)\,dx
\end{aligned}$$

Alors

$$\int \tan^n(ax)\,dx = \underline{\hspace{10cm}}$$

qui est beaucoup mieux !

Exemple 5.1 Faisons ça avec un exemple : $\int \tan^5(2x)\,dx$.

$$\begin{aligned}
\int \tan^5(2x)\,dx &= \underline{\hspace{6cm}}\\
&= \underline{\hspace{8cm}}\\
&= \int \tan^3(2x)\sec^2(2x)\,dx - \int \tan^3(2x)\,dx\\
u &= \underline{\hspace{2cm}} \qquad du = \underline{\hspace{3cm}}\\
&= \int u^3 \sec^2(2x)\frac{du}{2\sec^2(2x)} - \int \tan^3(2x)\,dx\\
&= \underline{\hspace{9cm}}\\
&= \int \frac{u^3}{2}du - \int \tan(2x)\left(\sec^2(2x)-1\right)\,dx\\
&= \int \frac{u^3}{2}du - \int \tan(2x)\sec^2(2x)\,dx + \int \tan(2x)\,dx\\
&= \underline{\hspace{12cm}}\\
&= \int \frac{u^3}{2}du - \int \frac{u}{2}du + \int \tan(2x)\,dx\\
&= \frac{u^4}{2\cdot 4} - \frac{u^2}{2\cdot 2} + \frac{\ln(|\sec(2x)|)}{2} + c\\
&= \frac{\tan^4(2x)}{8} - \frac{\tan^2(2x)}{4} + \frac{\ln(|\sec(2x)|)}{2} + c
\end{aligned}$$

On peut utiliser une stratégie similaire pour la sécante : $\int \sec^n(ax)\,dx$.

Exemple 5.2 Faisons $\int \sec^8(x)\,dx$

$$\begin{aligned}
\int \sec^8(x)\,dx &= \underline{\hspace{8cm}} \\
&= \int \sec^2(x)\left(\tan^2(x)+1\right)^3\,dx \\
u &= \underline{\hspace{2.5cm}} \qquad du = \underline{\hspace{4cm}} \\
&= \int \sec^2(x)\left(u^2+1\right)^3 \frac{du}{\sec^2(x)} \\
&= \underline{\hspace{5.5cm}} \\
&= \int u^6+3u^4+3u^2+1 \\
&= \frac{u^7}{7}+\frac{3u^5}{5}+\frac{3u^3}{3}+u+c \\
&= \underline{\hspace{17cm}}
\end{aligned}$$

Cette méthode ne marche que quand n est pair. Si n est impair, il faut utiliser la formule de l'intégration par parties.

5.1.3. *Intégration par substitution trigonométrique (§2.6 ou §4.3).* L'idée maintenant est de trouver une façon d'intégrer les intégrales comme : ____________________.
Pour l'instant aucune méthode nous donne une façon facile pour le faire. Par contre, on peut utiliser les identités trigonométriques pour les résoudre.

Exemple 5.3 Si on a $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ on va utiliser le fait que $\sin(x)^2+\cos(x)^2=1$ pour résoudre cette intégrale. Comment ça nous aide ? Parce que, on peut jouer avec la formule ! En particulier, $\cos(x)^2 = 1 - \sin(x)^2$, donc si on remplace x par

______________ on aura quelque chose plus de simple.

$\sqrt{a^2 - x^2} =$ ____ .

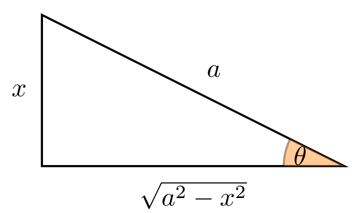
Prenons la dérivée, on a $dx =$ ____________________ ! Donc, $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int a^2 \cos^2(\theta)\, d\theta$.

Et de là on a déjà vu comment faire ça :

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx &= \int a^2 \cos^2(\theta)\, d\theta \\
&= \underline{\hspace{8cm}} \\
&= \frac{a^2}{2}\theta + \frac{1}{2}\sin(2\theta) + c.
\end{aligned}$$

MAIS ! On a un autre problème maintenant. On veut la formule avec les x. Alors, il faut trouver ce que vaut θ et $\sin(2\theta)$ en fonction x.

Si $x = a\sin(\theta)$ alors $\arcsin(\frac{x}{a}) = \theta$. Pour $\sin 2\theta$ on a $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$. En utilisant le triangle :



on a $\sin(\theta) =$ ___ et $\cos(\theta) =$ ______________ . Alors,

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx &= \frac{a^2}{2}\theta + \frac{1}{2}\sin(2\theta) + c \\
&= \underline{\hspace{14cm}} \\
&= \frac{a^2}{2}\arcsin(\frac{x}{a}) + \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + c.
\end{aligned}$$

Mais on a plusieurs identités qu'on peut utiliser pour nous aider ! Pour chaque

cas on utilise une substitution différente :

$a^2 - x^2$	$x =$ __________	$\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$a^2 + x^2$	$x =$ __________	$\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
$x^2 - a^2$	$x =$ __________	$\begin{cases} \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[& \text{pour } x \geq a \\ \theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right] & \text{pour } x \leq -a \end{cases}$

Faisons quelques exemples.

Exemples 5.4 (1) $\int \left(25 + (x-3)^2\right)^{-3/2} \, dx$

La formule $25 + (x-3)^2$ est comme $1 + x^2$, alors on va utiliser $x =$ __________ comme substitution.

$$x - 3 = \underline{\hspace{3cm}} \Rightarrow dx = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$\begin{aligned}
\int \left(25 + (x-3)^2\right)^{-3/2} \, dx &= \underline{\hspace{8cm}} \\
&= \underline{\hspace{8cm}} \\
&= \int \frac{5\sec^2(\theta)}{5^3\left(\sec^2(\theta)\right)^{3/2}} \, d\theta \\
&= \int \frac{1}{5^2 \sec(\theta)} \, d\theta \\
&= \frac{1}{25} \int \cos(\theta) \, d\theta \\
&= \frac{\sin(\theta)}{25} + c \\
&= \underline{\hspace{6cm}}
\end{aligned}$$

(2) $\int \frac{1}{x\sqrt{2x^2-16}} \, dx$

Disons que $\sqrt{2}x > 4$ et alors ________________

$$\sqrt{2}x = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \Rightarrow dx = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x\sqrt{2x^2-16}}\,dx &= ____ \\
&= \int \frac{\tan(\theta)}{4\sqrt{\sec^2(\theta)-1}}\,d\theta \\
&= \int \frac{\tan(\theta)}{4\sqrt{\tan^2(\theta)}}\,d\theta \\
&= \int \frac{\tan(\theta)}{4\tan(\theta)}\,d\theta \\
&= \frac{1}{4}\theta + c \\
\theta &= \\
&= \frac{1}{4}\arccos\left(\frac{\sqrt{8}}{x}\right) + c
\end{aligned}$$

5.2. **Partie 2.**

5.2.1. *Intégration d'expressions comportant des fonctions quadratiques (§2.7 ou §4.3).* On a déjà tous les outils nécessaires pour intégrer les fonctions qui contiennent $ax^2 + bx + c$ (n'importe où).

Rappelons comment compléter le carré.

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= ______________________________ \\
&= ____ \\
&= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right)
\end{aligned}$$

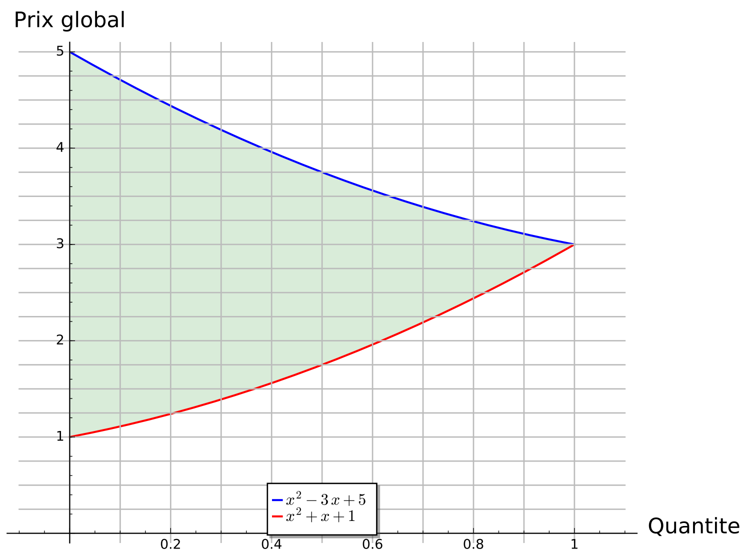
D'ici, on peut utiliser les méthodes précedentes pour trouver l'intégrale.

Exemple 5.5 Faisons un exemple : $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-6x+14}}\,dx$.

$$
\begin{aligned}
x^2-6x+14 &= \underline{\hspace{10cm}}\\
\int \frac{1}{\sqrt{x^2-6x+14}}\,dx &= \underline{\hspace{6cm}}\\
&\Rightarrow \underline{\hspace{11cm}}\\
\therefore\quad &= \int \frac{\sqrt{5}\sec^2(\theta)}{\sqrt{5\tan^2(\theta)+5}}\,d\theta\\
&= \int \frac{\sqrt{5}\sec^2(\theta)}{\sqrt{5}\sqrt{\tan^2(\theta)+1}}\,d\theta\\
&= \int \frac{\sec^2(\theta)}{\sqrt{\sec^2(\theta)}}\,d\theta\\
&= \int \sec(\theta)\,d\theta\\
&= \underline{\hspace{7cm}}\\
&= \ln\left(\left|\frac{\sqrt{(x-3)^2+5}}{\sqrt{5}}+\frac{x-3}{\sqrt{5}}\right|\right)+c
\end{aligned}
$$

5.2.2. *Applications en économie (§3.1 ou §3.5).*

(1) **Surplus du consommateur et surplus du producteur :**



La ________________ est la quantité demandée selon le prix. Quand le prix diminue, la publique veut en acheter plus, alors la quantité demandée augmente. L'________ est la quantité offert selon le prix. Si le prix augmente, le/lau vendeur/vendeuxe veut vendre plus, alors la quantité offerte augmente aussi. Donc la courbe du haut $D(x)$ est la fonction de demande et le courbe en bas $O(x)$ est la fonction d'offre.

Le *surplus du consommateur* ______ représente l'économie que l'ensemble des consommateurs ont pu réaliser en achetant l'article au prix courant plutôt qu'à un prix plus élevé qu'ils étaient prêts à payer. Le *surplus du producteur* ______ est le montant supplémentaire que l'ensemble des producteurs ont pu amasser en vendant le produit au prix courant plutôt qu'à un prix moindre qu'ils étaient prêts à accepter.

Le *surplus total* ______ est la somme du surplus du consommateur et du surplus du producteur. Ça veut dire que ____________________________. Alors, $ST =$ l'aire entre $D(X)$ et $O(x)$.

Donc, pour trouver le total il faut trouver le ______________________________ qui est le point où les deux courbes sont égales. Après on fait l'intégrale.

Si $D(x) = x^2 - 3x + 5$ et $O(x) = x^2 + x + 1$ il faut tout d'abord, trouver quand les deux fonctions sont égales. On a $D(x) = O(x)$ quand $x^2 - 3x + 5 = x^2 + x + 1$. Alors Alors, c'est quand $x =$ __.

Donc on a

$$
\begin{aligned}
ST &= \underline{\hspace{12cm}} \\
&= \int_0^1 x^2 - 3x + 5 - x^2 - x - 1\,dx \\
&= \underline{\hspace{9cm}} \\
&= -2x^2 + 4x\Big|_0^1 \\
&= -2 + 4 = 2.
\end{aligned}
$$

Ainsi, il y a un surplus de \$ 2.

(2) **Courbe de Lorenz et coefficient de Gini**

Il y a plusieurs mesures pour quantifier l'inégalité des revenus dans une société. Vers 1905 Max Otto Lorenz a introduit une approche graphique permettant de mesurer l'inégalité. Il a utilisé ce qu'on appelle la

________________________________. Une courbe de Lorenz $L(x)$ possède les propriétés suivantes :

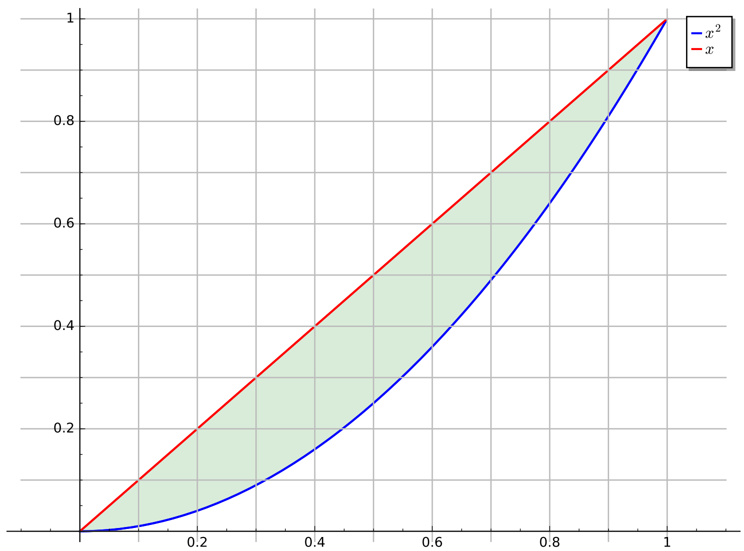
(a) Le domaine et l'image sont entre 0 et 1

(b) $L(0) =$ __ et $L(1) =$ __.

(c) L doit être une fonction __________________ sur $[0, 1]$.

(d) L doit être concave vers le haut sur $]0, 1[$.

(e) $L(x) \leq$ __ pour tout x.



Donc on veut minimiser l'aire entre les deux courbes ! Ça c'est exactement ce l'italien Corrado Gini a pensé à l'époque. Ainsi, il a decidé de calculer le quotient entre l'aire en dessous de la courbe x et l'aire entre les deux courbes. Cette quotient est appellé ____.
Il est donné par

Exemple 5.6 Faisons un exemple. Supposons que la courbe de Lorenz est donnée par $L(x) = x^{1.8}$. Alors

$$\begin{aligned}
G &= \frac{\qquad\qquad\qquad\qquad}{\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
&= \frac{\qquad\qquad\qquad\qquad}{\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
&= 2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^{2.8}}{2.8}\right)\Big|_0^1 \\
&= 2\left(\frac{1^2}{2} - \frac{1^{2.8}}{2.8}\right) \\
&= \frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad} \\
&= 1 - \frac{10}{14} \\
&= \frac{14}{14} - \frac{10}{14} \\
&= \frac{4}{14} \\
&= \frac{2}{7} \cong 0.2857
\end{aligned}$$

6. Semaine 6 : 29 octobre 2018

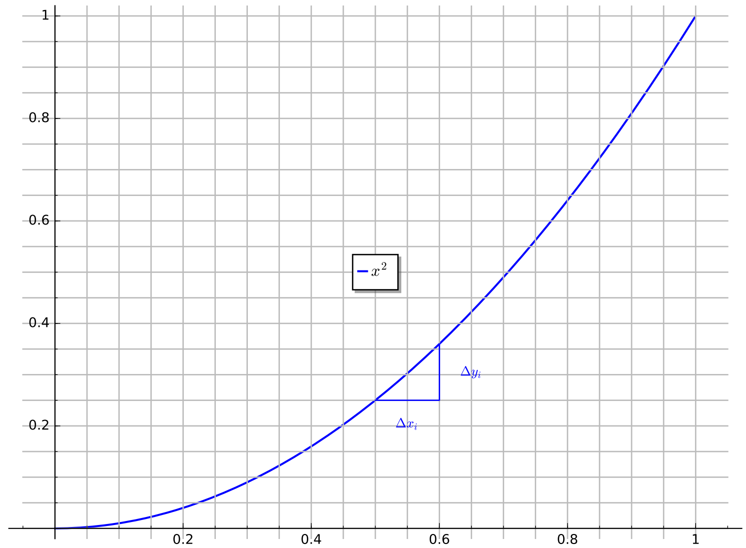
6.1. Partie 1.

6.1.1. *Rappel.*

Examen Pratique

6.2. Partie 2.

6.2.1. *Longueur de courbes planes (§3.4 ou §5.3).* Soit une courbe, on veut maintenant calculer sa longueur.



Pour calculer la longueur de la courbe de 0 à 1, il nous faut retourner à la sommation de Riemann. Rappelons la sommation de Riemann :

Si on veut calculer la longueur, on peut calculer la longueur un petit morceau à la fois. C'est-à-dire, on peut calculer :

$$\begin{aligned} \rule{4cm}{0.4pt} &= \rule{8cm}{0.4pt} \\ &= \sqrt{\Delta x_i^2 + (f'(c_i)\Delta x_i)^2} \\ &= \sqrt{1 + f'(c_i)^2}\Delta x_i \end{aligned}$$

Ainsi la longueur est donnée par,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'(c_i)^2}\Delta x_i = \rule{6cm}{0.4pt}$$

Exemple 6.1 Calculer la longueur de la courbe $f(x) = 4 + 2\sqrt{x^3}$ de $(0, 4)$ à $(1, 6)$.

Donc, il faut calculer :

$$\int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

Premièrement il faut calculer $f'(x)$. Ainsi, $f'(x) =$ ____________. Alors,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx &= \underline{\hspace{6cm}} \\
&= \int_0^1 \sqrt{1+9x}\,dx \\
&\underline{\hspace{7cm}} \\
&= \frac{1}{9}\int_1^{10} \sqrt{u}\,du \\
&= \underline{\hspace{4cm}} \\
&= \frac{2}{9*3}\left(10^{3/2} - 1^{3/2}\right) \\
&= \frac{20\sqrt{10}-2}{27}
\end{aligned}$$

Des fois, il vaut mieux utiliser l'axe des y.

Exemple 6.2 Voyons ça avec un autre exemple. Calculons la longueur de la courbe $f(x) = 2x^{\frac{2}{3}}$ de $(0,0)$ à $(1,2)$.

Si on le fait de façon normale, on trouve que ce problème est difficile :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx &= \int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right)^2 |}\,dx \\
&= \int_0^1 \sqrt{1+\frac{16}{9}x^{\frac{-2}{3}}}\,dx
\end{aligned}$$

On n'a pas encore vu une façon de résoudre ce problème.

Mais, on peut le faire avec l'axe des y. Donc si $y = 2x^{\frac{2}{3}}$ alors $x = \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$.

$$\int_{\_}^{\_} \underline{\hspace{5cm}}\, dy = \underline{\hspace{5cm}}$$

$$\underline{\hspace{7cm}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{32}{9} \int_{y=0}^{y=2} \sqrt{u}\, du \\
&= \frac{32}{9} \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_{y=0}^{y=2} \\
&= \frac{64}{27} \left(1 + \frac{9}{32} y\right)^{3/2} \Big|_0^2 \\
&= \frac{64}{27} \left(\left(1 + \frac{9}{16}\right)^{3/2} - 1^{3/2}\right) \\
&= \frac{64}{27} \left(\left(\frac{25}{16}\right)^{3/2} - 1\right) \\
&= \frac{64}{27} \left(\frac{5^3}{4^3} - 1\right) \\
&= \frac{64}{27} \cdot \frac{125 - 64}{64} \\
&= \frac{61}{27}
\end{aligned}$$

6.2.2. *Récapitulation - Un grand rappel.* Qu'est-ce que vous aimeriez voir ?

(1) **Règle de L'Hôptial** Si $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ ou $= \pm\frac{\infty}{\infty}$ et si la limite $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe ou est infinie, alors

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Exemple 6.3

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^5 - x^4 + x^3 - x^2 - 2 * x + 2}{(x-1)^2} = \underline{\hspace{7cm}}$$

Et si la limite est de la forme $\infty - \infty$, $0 \cdot \pm\infty$ ou la forme 0^0, ∞^0, $1^{\pm\infty}$.

Exemples 6.4

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \qquad \lim_{x \to 0} x \ln(x) \qquad \lim_{x \to 0} x^x$$

(2) **Sommation** Abréger la sommation suivante avec Σ :

$$f(4) - \frac{f(6)}{2} + \frac{f(8)}{3} - \frac{f(10)}{4} + \frac{f(12)}{5} - \frac{f(14)}{6}$$

(3) **Intégrable au sens de Riemann** Ça veut dire quoi d'être intégrable au sens de Riemann ?

---

(4) **Théorème fondamental du calcul intégrale** Si $f(x)$ est une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ et si $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ alors $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$.

(5) **Changement de variable/Méthode de substitution**

Version indéfinie :

(a) Mettez $u = f(x)$.

(b) Faites les derivées.

(c) Remplacez les variables.

(d) Faites l'intégrale.

(e) Re-remplacez les variables.

Version définie :

(a) Mettez $u = f(x)$.

(b) Faites les derivées.

(c) Remplacez les variables.

(d) Calculer les nouvelle bournes.

(e) Faites l'intégrale.

La partie la plus dure : Décider u

Exemple 6.5

$$\int \frac{(ln(x))^4}{x}\, dx \quad = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$= \frac{(\ln(x))^5}{5} + c$$

(6) **Complétion du carré**

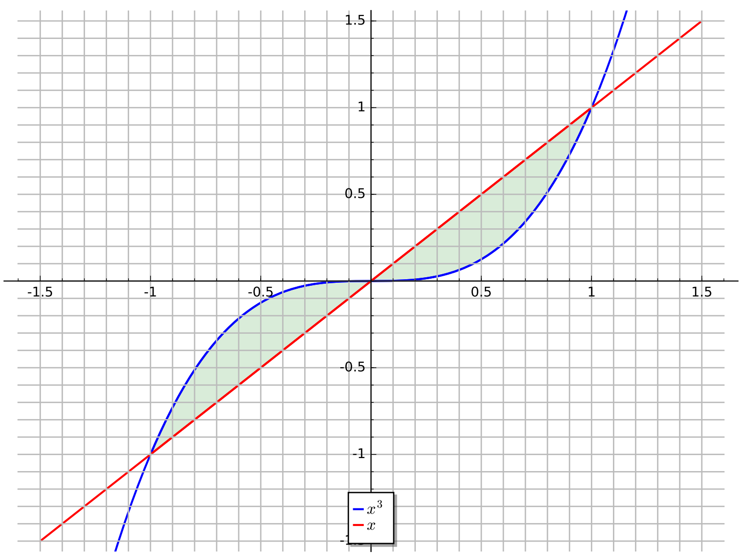
$$ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right)$$

Exemple 6.6

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2-6x-8}}\,dx \quad =$$

$$= \arcsin(x+3) + c$$

(7) **L'aire d'une surface plane**



(8) **Intégration par parties**

(a) Trouvez u et dv (utilisez LIATE !)

(b) Trouvez du et v

(c) Remplacez les variables

$$\int udv = uv - \int vdu \quad \int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu$$

Exemple 6.7

$\int_1^2 x \ln(x)\, dx$

$= 2\ln(2) - \frac{3}{4}$

(9) **Intégration de fonctions trigonométriques** $\int \sin^m(ax)\cos^n(ax)\, dx$

Si m ou n est impair, on essaye de le changer pour qu'il soit pair. Si tous les deux sont positifs et pairs, on utilise nos identités pour diminuer l'exposant.

Exemple 6.8

$$\int \sin^2(x)\cos^4(x)\,dx \quad =$$

$$= \frac{x}{16} - \frac{\sin(4x)}{64} + \frac{\sin^3(2x)}{48} + c$$

(10) **Sécantes, cosécantes, tangentes, cotangentes** Il faut faire une substitution de la forme $u = \tan(x)$ après avoir fait des substitutions trigonométriques. Rappelons qu'il faut utiliser la méthode par parties si n est impair pour la sécante : $\sec^n(x)$.

Exemple 6.9 (a)

$$\int \tan^3(x)\,dx =$$

$$= \frac{\tan^2(x)}{2} - \ln(|\sin(x)|) + c$$

(b)

$$\int \sec^4(x)\,dx \quad =$$

$$= \frac{\tan^3(x)}{3} + \tan(x) + c$$

(11) **Intégration par substitution trigonométrique** Si on a des quadratiques, on utilise intégration par substitution avec un changement de variable selon la formule dans la racine carrée. On a les trois options suivantes :

$$a^2 - x^2 \Rightarrow x = a\sin(\theta)$$
$$a^2 + x^2 \Rightarrow x = a\tan(\theta)$$
$$x^2 - a^2 \Rightarrow x = a\sec(\theta)$$

Exemple 6.10

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-8x+20}} =$$

$$= \ln\left(\left|\sec\left(\frac{\sqrt{x^2-8x+20}}{2}\right)\right|\right) + c$$

7. Semaine 7 : 12 novembre 2018

7.1. **Partie 1.**

7.1.1. *Rappel.*

7.1.2. *Intégration de fonctions rationnelles par décomposition en une somme de fractions partielles (§2.8 ou §4.4).*

Des fois, c'est facile de multiplier plusieurs polynômes ensembles. Mais qu'est-ce qu'on peut faire pour inverser ce processus ? Les fractions partielles ! ! !

Commençons avec une fonction propre : $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

Rappelons qu'une fraction est propre si le degré du numérateur est inf. au degré du dén.

La première étape qu'on fait c'est de changer $Q(x)$ en un polynôme de facteurs linéaires et quadratiques. Ça veut dire que

$Q(x) =$ ______________________________

Exemple 7.1 Un exemple ! Soit

$$Q(x) = 2x^5 + 5x^4 - 12x^3 - 14x^2 + 34x - 15.$$

Il faut utiliser une __________________________.

On a $-15 = a_0$ et $2 = a_n$. Donc p/q peut être : ____
Essayons avec le plus simple : 1.

$Q(1) =$ ____

Donc, $(x-1)|Q(x)$ et

$Q(x) =$ ____

Essayons 1 encore :

$Q(1) =$ ____.

Donc :

$Q(x) =$ ____

Alors, on essaye encore 1.

$Q(1) =$ _____________________________________.

Donc :

$Q(x) =$ ____

Mais, d'ici, c'est évident que 1 ne va pas marcher parce que ça nous donnera quelque chose de positif ! Donc, essayons -1.

$Q(-1) =$ ____________________________________.

Nope ! Essayons, -3.

$Q(-3) =$ ____

Alors :

$$Q(x) = (x-1)^3(x+3)\,(2x+5)$$

La deuxième étape est de développer notre quotient selon le dénominateur.

$$\frac{P(x)}{(ax+b)^n} = \frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

$$\frac{P(x)}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \ldots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

Si on en a plusieurs, on les ajoute ensemble.

$$\frac{P(x)}{(ax+b)(cx+d)} = \frac{A}{ax+b} + \frac{B}{cx+d}$$

Exemples 7.2 (1) Dans notre exemple : $\frac{P(x)}{2x^5+5x^4-12x^3-14x^2+34x-15}$.

$$\frac{P(x)}{(x-1)^3(x+3)(2x+5)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{2x+5} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{(x-1)^3}$$

(2) $\frac{P(x)}{(x^2+1)^2(2x+3)}$

(3) $\frac{P(x)}{x^2(x+1)^3\left(x-\frac{5}{2}\right)(x^2+1)^3(x^2+2x+8)}$.

Mais, comment est-ce qu'on peut trouver les variables majuscules ? Si on n'a pas de puissance, c'est facile :

Exemple 7.3 $\frac{12x+3}{x(x-1)} =$ ________________.

$=$ ____________________________________

$12x+3 =$ ____________________________

Si $x=0$ ______________________

Si $x=1$ ___________________

Alors $A =$ ______ et $B =$ ____. Donc

$$\frac{12x+3}{x(x-1)} = \underline{\hspace{6cm}}$$

Exemple 7.4 $\frac{2x^2-15x+3}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3}$.

$$= \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$2x^2 - 15x + 3 = A(x+3) + B(x-1)$

Si $x = 1$ ______________________________

Si $x = -3$ ______________________________

Alors $A =$ _____ et $B =$ ______. Donc,

$$\frac{2x^2 - 15x + 3}{(x-1)(x+3)} = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

Essayons quelque chose plus compliqué.

Exemple 7.5 $\frac{x^2+x}{(x+1)^3} =$ ______________________________. Commençons de la même façon :

$$x^2 + x = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$C = \underline{\quad}$$

Mais, on ne sait pas ce qu'on peut mettre pour les x pour trouver A et B ! Alors, on va faire la multiplication :

$$\begin{aligned} x^2 + x &= Ax^2 + 2Ax + A + Bx + B - 1 \\ &= \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ A &= \underline{\quad} \\ B &= \underline{\quad} \end{aligned}$$

Exemple 7.6 Et si $\frac{x^2+x}{x(x+1)^3} =$ ______________________________.
Alors

$$\begin{aligned} x^2 + x &= \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ A &= \underline{\quad} \\ D &= \underline{\quad} \end{aligned}$$

Pour B et C on fait la même chose qu'avant.

$$\begin{aligned} x^2 + x &= Bx^3 + 2Bx^2 + Bx + Cx^2 + Cx \\ &= \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ B &= \underline{\quad} \\ C &= \underline{\quad} \end{aligned}$$

Exemple 7.7 $\frac{2x^4+x^3+17x-20}{(x-1)^3(x+3)(2x+5)} =$ ____.
Commençons dans le même sens

$$\begin{aligned}
2x^4+x^3+17x-20 &= A(x-1)^3(2x+5)+B(x+3)(x-1)^3+C(x+3)(2x+5)(x-1)^2 \\
&\quad + D(x+3)(2x+5)(x-1)+E(x+3)(2x+5) \\
A &= __ \\
B &= __ \\
E &= __
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
2x^4+x^3-17x-20 &= \\
\\
&= (2+2C)x^4+(-1+7C+2D)x^3+(-9-5C+9D)x^2 \\
&\quad + (13-19C+4D)x+(-5+15C-15D) \\
C &= __ \\
D &= __
\end{aligned}$$

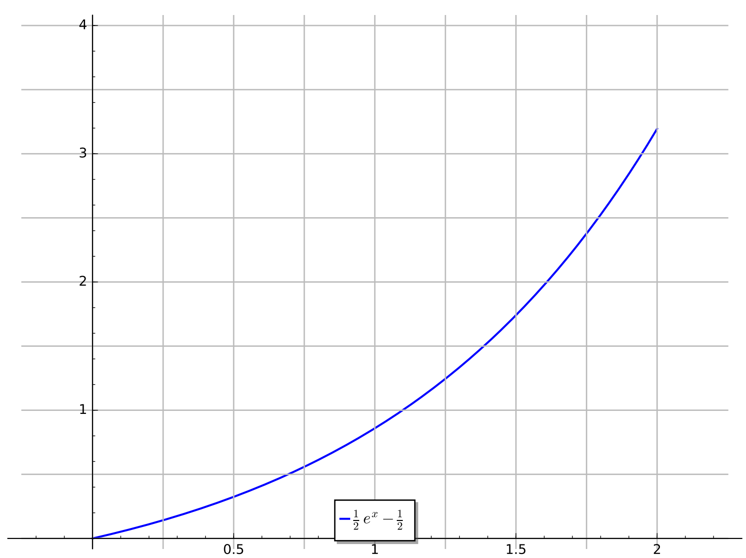
Faisons, l'exemple d'une intégrale.

Exemple 7.8 $\int \frac{3x^2+x+2}{x^3-x^2-x+1}\,dx$

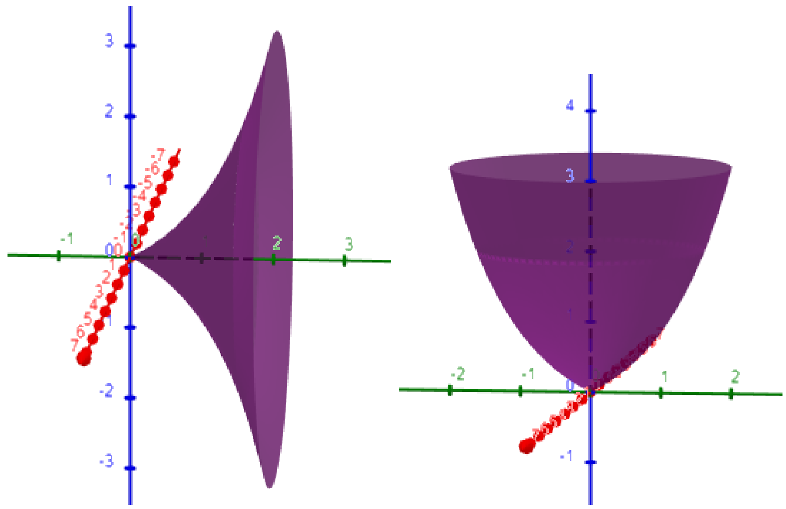
$$\begin{aligned}
Q(x) &= \underline{\hspace{6cm}} \\
\frac{3x^2+x+2}{(x-1)^2(x+1)} &= \underline{\hspace{10cm}} \\
3x^2+x+2 &= \underline{\hspace{15cm}} \\
A &= \underline{\hspace{0.5cm}} \\
C &= \underline{\hspace{0.5cm}} \\
3x^2+x+2 &= \underline{\hspace{14cm}} \\
&= (1+B)x^2 + (-2+3)x + (1-B+3) \\
B &= \underline{\hspace{0.5cm}} \\
\frac{3x^2+x+2}{(x-1)^2(x+1)} &= \underline{\hspace{10cm}} \\
\int \frac{3x^2+x+2}{x^3-x^2-x+1}\,dx &= \underline{\hspace{12cm}} \\
&= \underline{\hspace{15cm}} \\
&= \ln(|x+1|) + 2\ln(|x-1|) + \frac{-3}{(x-1)} + c
\end{aligned}$$

7.2. **Partie 2.**

7.2.1. *Volume de solides (§3.3 ou §5.1).* On va essayer de calculer un volume étant donné une fonction. Donc supposons qu'on a la fonction $\frac{e^x-1}{2}$:

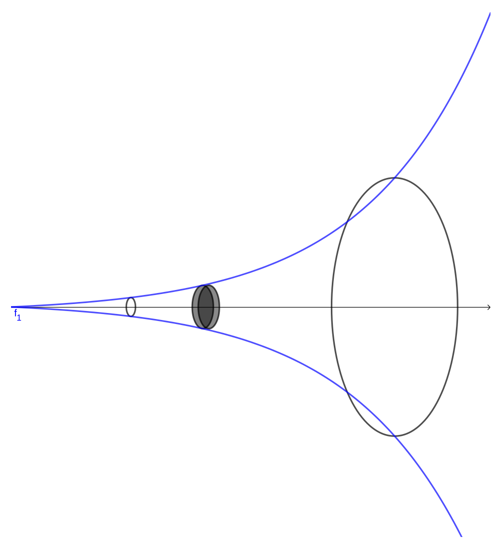


On va faire des rotations selon différents axes :



D'ici on peut se demander, quel est le volume d'une partie de notre fonction en rotation autour d'un axe ? On va faire comme on a fait avec les fonctions en 2d.

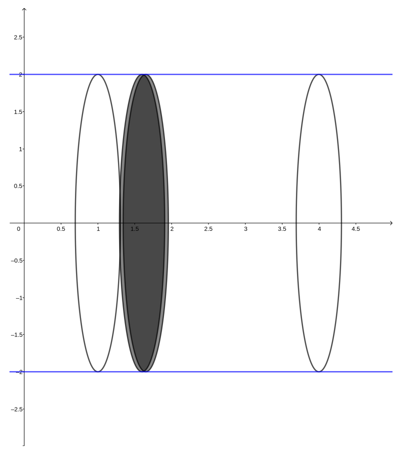
On peut approximer le volume en faisant la somme des volumes des disques très minces.

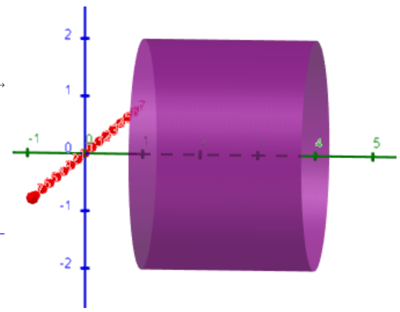


Quel est le volume du petit disque ? ____________. Alors, pour trouver le volume il nous faut calculer l'intégrale :

Cette méthode pour évaluer le volume d'un solide de révolution est la *méthode des* ____________. Alors, faisons des exemples.

Exemple 7.9 Trouver le volume de la courbe $f(x) = 2$ en rotation autour de l'axe des x de $x = 1$ à $x = 4$. On a :





Donc, le volume sera :

Exemple 7.10 Quelque chose plus difficile : Trouver le volume de la courbe $f(x) = \frac{e^x - 1}{2}$ en rotation autour de l'axe des x de $x = 1$ à $x = 4$. On a déjà vu cette courbe. Donc, le volume sera :

$$\begin{aligned}
\int_1^4 \pi\left(f(x)\right)^2\,dx &= \underline{\hspace{8cm}} \\
&= \frac{\pi}{4}\int_1^4 (e^x)^2 - 2e^x + 1\,dx \\
&= \frac{\pi}{4}\left(\int_1^4 e^{2x}\,dx - 2\int_1^4 e^x\,dx + \int_1^4 dx\right) \\
&= \frac{\pi}{4}\left(\left.\frac{e^{2x}}{2}\right|_1^4 - 2\left.(e^x)\right|_1^4 + \left.x\right|_1^4\right) \\
&= \frac{\pi}{4}\left(\frac{e^8}{2} - \frac{e^2}{2} - 2e^4 + 2e^1 + 4 - 1\right) \\
&= \underline{\hspace{14cm}}
\end{aligned}$$

Mais on avait deux façons de faire la rotation !

Exemple 7.11 Donc essayons de trouver le volume de la courbe en rotation autour de l'axe des y de $y = 1$ à $y = 4$.

Pour l'instant, c'est trop compliqué, donc essayons quelque chose de plus facile.

Exemple 7.12 $f(x) = x^{1/3}$. Autour de l'axe des x on a :

et autour de l'axe des y on a :

Donc il faut faire les intégrales.

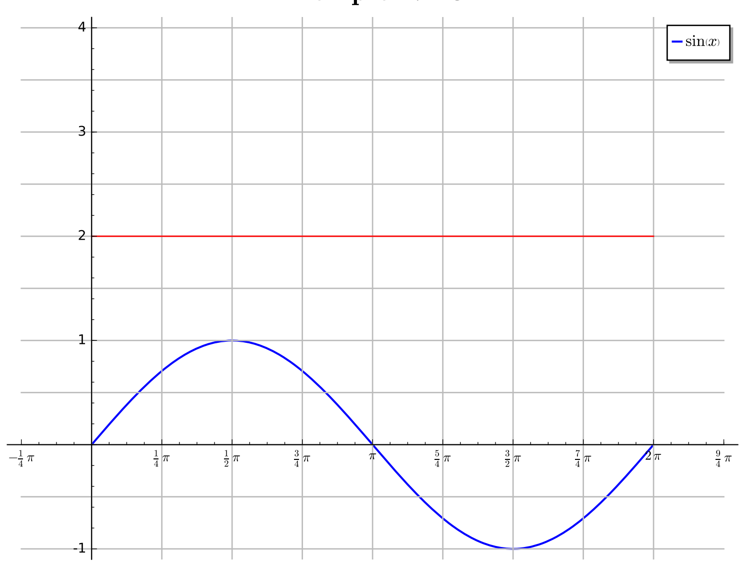
$$\int \pi x^{2/3}\, dx = \underline{\hspace{4cm}}$$

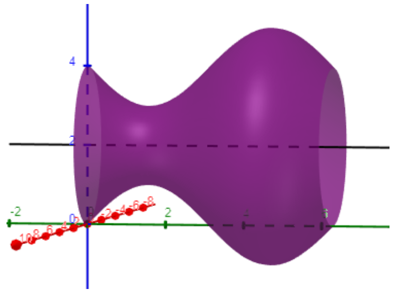
et

$$\int \pi y^6\, dy = \underline{\hspace{3cm}}$$

Finalement, on fait une rotation autour des axes, mais à quoi est-ce qu'on arrive si on fait une rotation autour d'une autre droite ?

Exemple 7.13



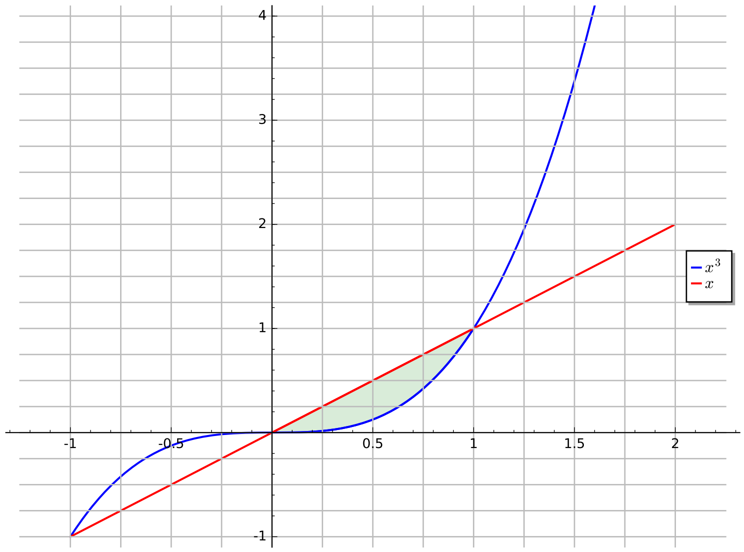


Qu'est-ce qu'on peut faire ? On a toujours $\pi r^2 \Delta x$ pour les disques, mais quoi vaut r ici ? Ce n'est plus $f(x)$! Maintenant, c'est $2 - \sin(x)$. Donc, il nous faut l'intégrale :

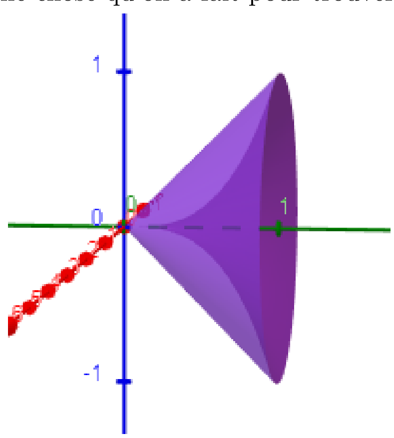
Pour l'intégrer, on a

Continuons à compliquer les choses, qu'est-ce qui peut arriver si on fait une rotation d'un objet entre deux courbes ?

Exemple 7.14 Supposons qu'on a l'objet :



C'est exactement la même chose qu'on a fait pour trouver l'aire.

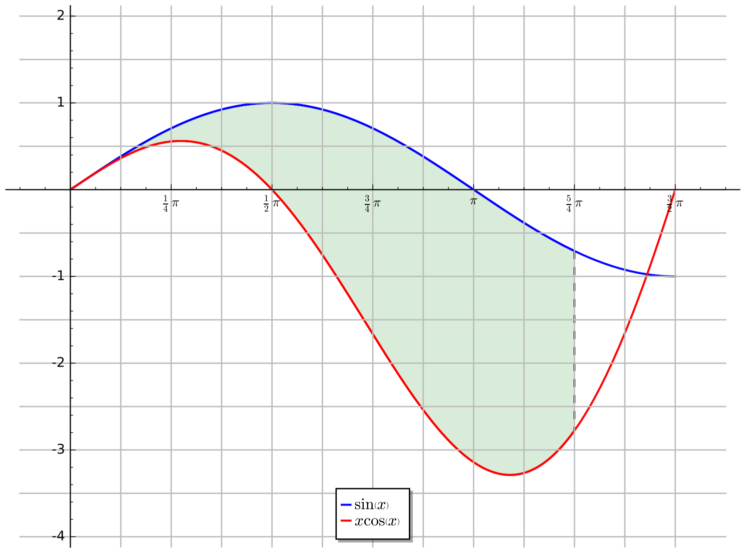


On prend le grand et on soustrait le petit.

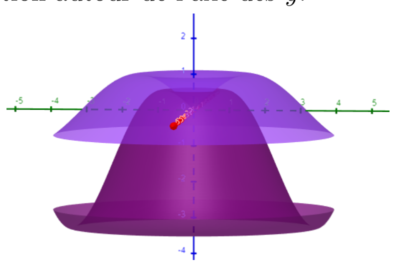
$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \underline{\hspace{6cm}}\, dx &= \underline{\hspace{6cm}} \\
&= \pi \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7} \right) \Big|_0^1 \\
&= \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \right) \\
&= \pi \frac{7-3}{21} \\
&= \frac{4\pi}{21}
\end{aligned}
$$

Cette méthode est la *méthode des* ____________________.

Mais, qu'est-ce qu'on peut faire si on veux trouver le volume de



après avoir fait une rotation autour de l'axe des y.



On ne peut pas utiliser les disques parce que ____.
Donc il faut utiliser une autre forme pour trouver le volume : *méthode de* ________.

Premièrement, il faut calculer le volume de cet objet :

Exemple 7.15 Pour notre exemple, on a $r =$ __ et $h =$ ____________________________.
Alors,

$$\int_0^{\frac{5\pi}{4}} 2\pi x\left(\sin(x) - x\cos(x)\right)\,dx = 2\pi\int_0^{\frac{5\pi}{4}} x\sin(x) - x^2\cos(x)\,dx$$

$$u = x \quad dv = \sin(x)\,dx \qquad u' = x^2 \quad dv' = \cos(x)\,dx$$

$$du = dx \quad v = -\cos(x) \qquad du' = 2x\,dx \quad v' = \sin(x)$$

$$= 2\pi\left(-x\cos(x)\Big|_0^{\frac{5\pi}{4}} - \int_0^{\frac{5\pi}{4}} -\cos(x)\,dx - x^2\sin(x)\Big|_0^{\frac{5\pi}{4}} + \int_0^{\frac{5\pi}{4}} 2x\sin(x)\,dx\right)$$

$$u' = 2x \quad dv' = \sin(x)\,dx$$

$$du' = 2\,dx \quad v' = -\cos(x)$$

$$= 2\pi\left(-x\cos(x) - x^2\sin(x)\Big|_0^{\frac{5\pi}{4}} + \sin(x)\Big|_0^{\frac{5\pi}{4}} - 2x\cos(x)\Big|_0^{\frac{5\pi}{4}} - \int_0^{\frac{5\pi}{4}} -2\cos(x)\,dx\right)$$

$$= 2\pi\left(-x\cos(x) - x^2\sin(x) + \sin(x) - 2x\cos(x)\Big|_0^{\frac{5\pi}{4}} + 2\sin(x)\Big|_0^{\frac{5\pi}{4}}\right)$$

$$= 2\pi\left(\left(-\frac{5\pi}{4}\cos(\frac{5\pi}{4}) - \left(\frac{5\pi}{4}\right)^2\sin(\frac{5\pi}{4}) + \sin(\frac{5\pi}{4}) - 2\cdot\frac{5\pi}{4}\cos(\frac{5\pi}{4}) + 2\sin(\frac{5\pi}{4})\right)\right.$$
$$\left. - \left(-0\cos(0) - 0^2\sin(0) + \sin(0) - 2\cdot 0\cdot\cos(0) + 2\sin(0)\right)\right)$$

$$= 2\pi\left(\left(-\frac{5\pi}{4}\frac{-1}{\sqrt{2}} - \left(\frac{5\pi}{4}\right)^2\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{5\pi}{2}\frac{-1}{\sqrt{2}} + 2\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\right.$$
$$\left. - (0 - 0 + 0 - 0 + 0)\right)$$

$$= 2\pi\left(\frac{5\pi}{4\sqrt{2}} + \frac{25\pi^2}{16\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{5\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= 2\pi\left(\frac{20\pi + 25\pi^2 - 16 + 40\pi - 32}{16\sqrt{2}}\right)$$

$$= \pi\frac{25\pi^2 + 60\pi - 48}{8\sqrt{2}}$$

$$= \frac{25\pi^3 + 60\pi^2 - 48\pi}{8\sqrt{2}}$$

8. Semaine 8 : 19 novembre 2018

8.1. **Partie 1.**

8.1.1. *Rappel.*

8.1.2. *Intégrales impropres (§5.4 ou §5.5).* On commence aujourd'hui avec un exemple.

Exemple 8.1 Disons qu'on veut calculer l'intégrale suivante :

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$$

On trouve que

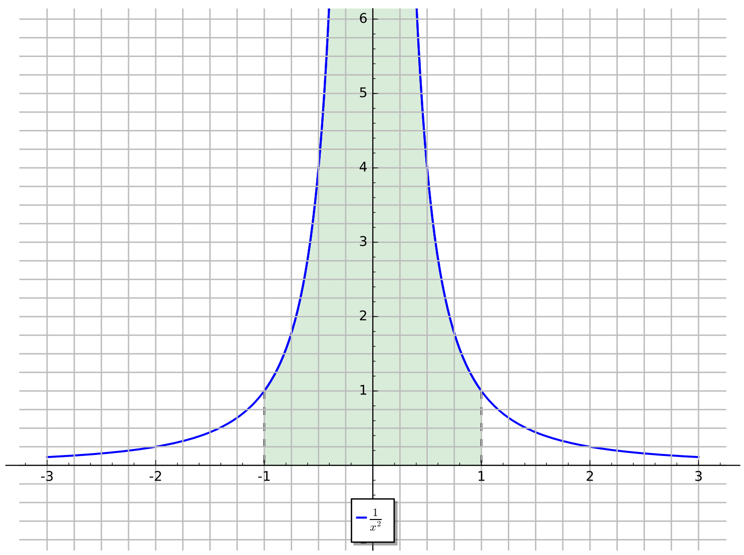
$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx &= \left.\frac{-1}{x}\right|_{-1}^{1} \\ &= \frac{-1}{1} - \frac{-1}{-1} \\ &= -1 - 1 \\ &= -2\end{aligned}$$

Est-ce que c'est correct ? ______

Pourqoui ?

On voit que $\frac{1}{x^2}$ est toujours ______________. Donc l'aire doit être ______________ ! Mais ce n'est pas ce qu'on a trouvé.

En effet, si on regarde le graphe on voit :



Donc, il y a un problème. Le problème vient de notre théorème.

Théorème 8.2 *Si $f(x)$ est une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ et si $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ alors $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.*

Alors, le problème vient du fait que $\frac{1}{x^2}$ n'est pas _______________ à __.

Pour résoudre ce problème on utilise les ____________. Déjà comme notre fonction est _________ on sait que :

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \rule{6cm}{0.4pt}$$

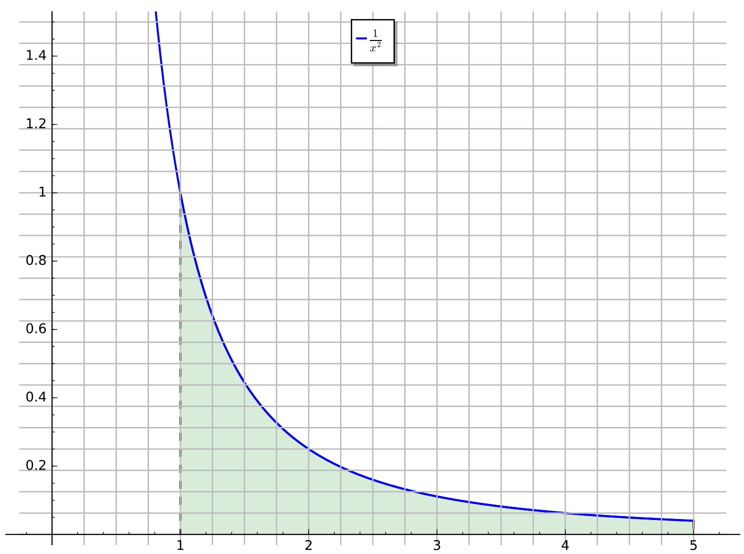
Maintenant, on va utiliser les limites.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx &= \lim_{n\to 0}\int_n^1 \frac{1}{x^2}\,dx \\
&= \lim_{n\to 0^+} -\frac{1}{x}\bigg|_n^1 \\
&= \lim_{n\to 0^+} -\frac{1}{1} - \frac{-1}{n} \\
&= \lim_{n\to 0^+} -1 + \frac{1}{n} \\
&= \infty
\end{aligned}$$

Alors

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,dx = 2\cdot\infty = \infty$$

On peut faire la même chose vers l'infinie.



$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx &= \underline{\hspace{6cm}} \\
&= \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{x}\bigg|_1^n \\
&= \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} - \frac{-1}{1} \\
&= \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Donc on a la définition suivante. Une intégrale est une *intégrale* ________________

(1) si l'intégrande tend vers $\pm\infty$ en une ou plusieurs valeurs entre les bornes ou

(2) si au moins une des bornes d'intégration est infinie.

Pour le premier cas, soit $\int_a^b f(x)\,dx$

(1) Si f est continue sur $[a, b[$ et $\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$ alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\hspace{6cm}}$$

si la limite existe.

(2) Si f est continue sur $]a, b]$ et $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\hspace{6cm}}$$

si la limite existe.

(3) Si f est continue sur $]a, b[$, $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$ alors

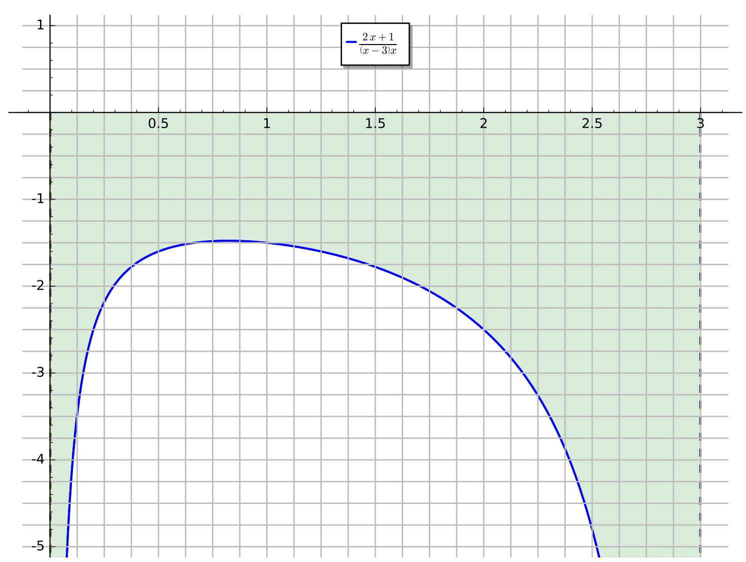
$$\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\hspace{12cm}}$$

si les limites existent pour un $c \in]a, b[$.

Si les limites donnent un nombre réel, l'intégrale impropre est ____________________.
Si elles existent pas ou sont infinies, alors l'intégrale impropre est ____________________.

Pour nos exemples on a $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$ est ____________________ et $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ est ______________________.

Exemple 8.3 L'intégrale $\int_0^3 \frac{2x+1}{x(x-3)}\,dx$ est-elle convergente ou divergente ?



$$\int_0^3 \frac{2x+1}{x(x-3)}\,dx = \underline{\hspace{12cm}}$$

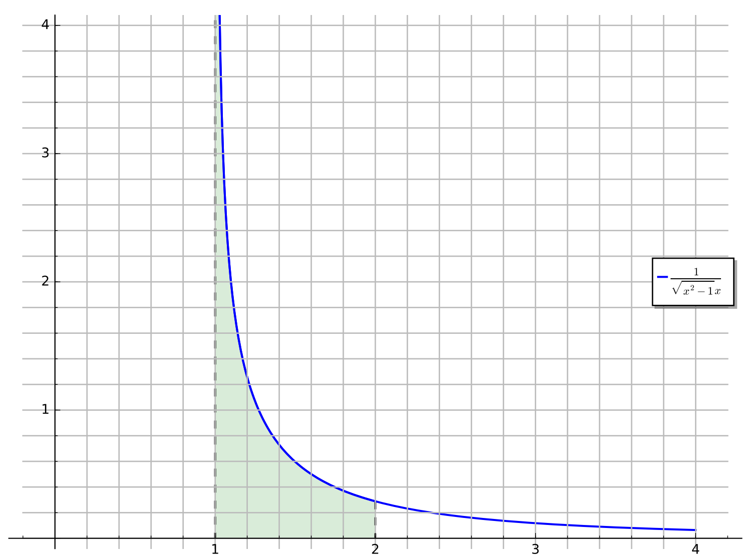
$$\begin{aligned}
\frac{2x+1}{x(x-3)} &= \underline{\hspace{3cm}} \\
2x+1 &= \underline{\hspace{4.5cm}} \\
A &= \underline{\hspace{1cm}} \\
B &= \underline{\hspace{0.5cm}} \\
\frac{2x+1}{x(x-3} &= \underline{\hspace{4cm}}
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \frac{2x+1}{x(x-3)}\,dx &= \lim_{A\to 0^+} \int_A^1 \frac{-1}{3x} + \frac{7}{3(x-3)}\,dx + \lim_{B\to 3^-} \int_1^B \frac{-1}{3x} + \frac{7}{3(x-3)}\,dx \\
&= \lim_{A\to 0^+} \left.\frac{-\ln(|x|)}{3} + \frac{7\ln(|x-3|)}{3}\right|_A^1 + \lim_{B\to 3^-} \left.\frac{-\ln(|x|)}{3} + \frac{7\ln(|x-3|)}{3}\right|_1^B \\
&= \lim_{A\to 0^+} \frac{-\ln(1)}{3} + \frac{7\ln(|1-3|)}{3} - \frac{-\ln(|A|)}{3} - \frac{7\ln(|A-3|)}{3} \\
&\quad + \lim_{B\to 3^-} \frac{-\ln(|B|)}{3} + \frac{7\ln(|B-3|)}{3} - \frac{-\ln(1)}{3} + \frac{7\ln(|1-3|)}{3} \\
&= \underline{\hspace{2cm}}
\end{aligned}$$

Alors, c'est $\underline{\hspace{2.5cm}}$.

Exemple 8.4 Un autre exemple. L'intégrale $\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$ est-elle convergente ou c'est divergent ?



Alors, on a que l'intégrande tend vers ∞ à 1. Donc, on a

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx &= \underline{\hspace{6cm}} \\ &= \lim_{A\to 1^+} \operatorname{arcsec}(|x|)\big|_A^2 \\ &= \lim_{A\to 1^+} \operatorname{arcsec}(|2|) - \operatorname{arcsec}(|A|) \\ &= \underline{\hspace{1.5cm}} \\ &= \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

Alors, c'est ____________________.

Pour le deuxième cas, soit $\int_a^b f(x)\,dx$

(1) Si f est continue sur $[a,\infty[$ alors

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \underline{\hspace{5cm}}$$

si la limite existe.

(2) Si f est continue sur $]-\infty,b]$ alors

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \underline{\hspace{5cm}}$$

si la limite existe.

(3) Si f est continue sur $\mathbb{R}$ alors

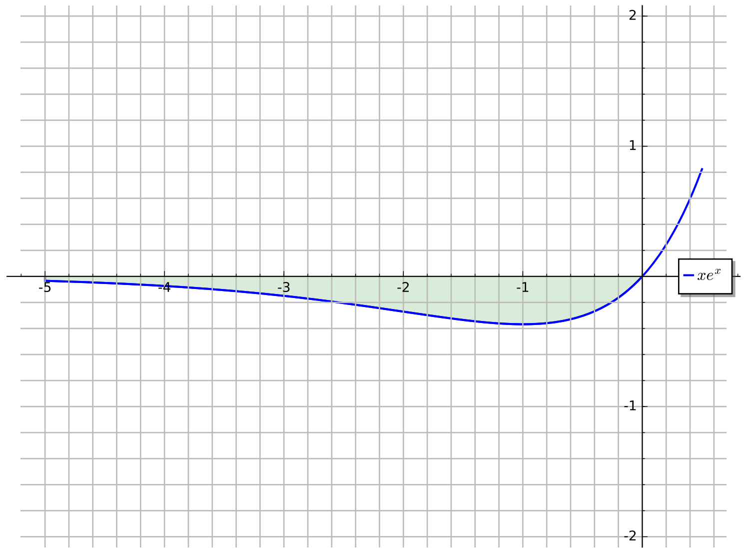
$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \underline{\hspace{10cm}}$$

si les limites existent pour un $c \in \mathbb{R}$.

Faisons des exemples.

Exemples 8.5 (1) Déterminer si $\int_{-\infty}^0 xe^x\,dx$ est convergente ou divergente.

On voit que xe^x est continue sur $]-\infty,0]$:



Alors, on a

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} xe^x \, dx &= \underline{\hspace{8cm}} \\
&= \underline{\hspace{11cm}} \\
&= \lim_{A\to-\infty} xe^x - e^x|_A^0 \\
&= \lim_{A\to-\infty} 0e^0 - e^0 - Ae^A + e^A \\
&= 0 - 1 - \lim_{A\to-\infty} Ae^A + e^A \\
&= \underline{\hspace{10cm}} \\
&= \underline{\hspace{9cm}} \\
&= -1
\end{aligned}$$

Ainsi, c'est __________________.

(2) Déterminer si $\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x)\, dx$ est convergente ou divergente. Au début on commence en faisant une mauvaise chose !

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x)\, dx &= \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} \sin(x)\, dx \\
&= \lim_{A\to\infty} 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

NOOOON !!!!!

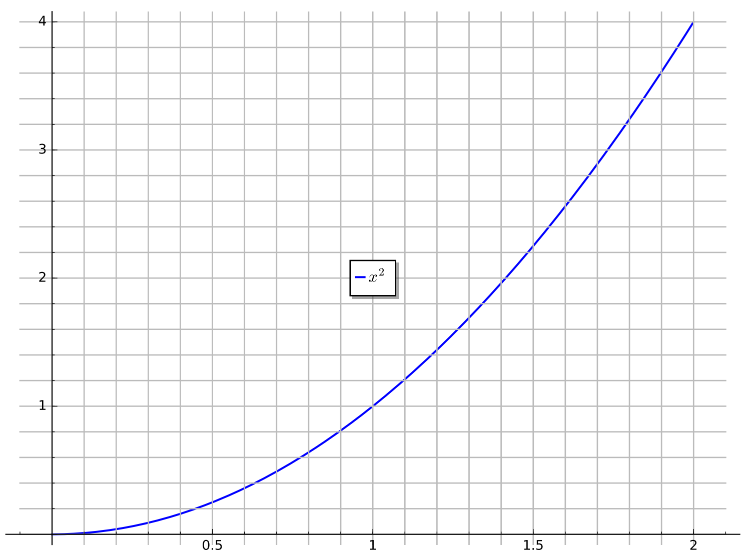
Le problème c'est que on a pas utilisé la bonne formule !

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x)\,dx &= \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ &= \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ &= \lim_{A\to-\infty} \cos(1) - \cos(A) + \lim_{B\to\infty} \cos(B) - \cos(1) \\ &= \lim_{A\to-\infty} -\cos(A) + \lim_{B\to\infty} \cos(B)\end{aligned}$$

Mais aucun entre ces deux limites n'est pas bien définie ! Alors, les limites n'existent pas ! D'où $\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x)\,dx$ est $\underline{\qquad\qquad\qquad}$.

8.2. **Partie 2.**

8.2.1. *Aire d'une surface de révolution (§3.5 ou §5.4).* On a calculé le volume de la rotation d'une courbe autour d'un axe, mais comment est-ce qu'on peut calculer l'aire de la surface ? Là il faut utiliser les mêmes méthodes qu'on a vu avec le calcul de la longeur d'un arc d'une courbe plane. Si on peut calculer la longeur d'un arc, on peut calculer l'aire de la surface. Donc, disons qu'on a la courbe suivante entre $(0, 0)$ et $(1, 4)$:



Avec une rotation autour de l'axe des x on a la formule :

$$2\pi r_i \Delta\ell_i$$

C'est quoi notre r_i ? $\underline{\qquad\qquad}$

C'est quoi notre $\Delta\ell_i$?

Alors on a

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 2\pi f(x_i^\star)\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\Delta x_i = \underline{\hspace{6cm}}$$

Et si on a fait la rotation autour de l'axe des y on aura :

$$r_i = \underline{\hspace{1cm}} \qquad \Delta\ell_i = \underline{\hspace{4cm}}$$

Donc, selon l'axe des y, on change la formule de l'intégration pour :

Exemple 8.6 Faisons un exemple assez simple : $f(x) = \sqrt{x}$. Avec une rotation autour de l'axe des x de $(0,0)$ à $(4,2)$ on a que l'aire de la surface est :

$$\begin{aligned}
\int_a^b \underline{\hspace{5cm}}\, dx &= \underline{\hspace{6cm}} \\
&= \underline{\hspace{5cm}} \\
&= \underline{\hspace{5cm}} \\
&= \pi \int_0^4 \sqrt{4x+1}\, dx \\
&= \pi \int_1^{17} \sqrt{u}\frac{du}{4} \\
&= \frac{\pi}{4}\left.\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_1^{17} \\
&= \frac{\pi}{6}\left(17^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right) \\
&= \frac{\pi}{6}\left(17^{\frac{3}{2}} - 1\right)
\end{aligned}$$

Exemple 8.7 Et si maintenant on fait un exemple avec la formule $f(x) = x^2$ où on fait une rotation autour de l'axe des y de $(0,0)$ à $(2,4)$.

$$\int_a^b \underline{\hspace{6cm}}\, dx = \underline{\hspace{7cm}}$$

$$= \underline{\hspace{7cm}}$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_1^{17} \sqrt{u}\, du$$

$$= \frac{\pi}{4} \left. \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3} \right|_1^{17}$$

$$= \frac{\pi}{6} \left(17^{\frac{3}{2}} - 1 \right)$$

		Axe de rotation	
		Rotation autour de l'axe des x	Rotation autour de l'axe des y
Description de la courbe	$y = f(x)$ $x \in [a,b]$	$\int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$	$\int_a^b 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$
	$x = g(y)$ $y \in [c,d]$	$\int_c^d 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$	$\int_c^d 2\pi g(y) \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$

9. Semaine 9 : 26 novembre 2018

9.1. **Partie 1.**

9.1.1. *Rappel.*

9.1.2. *Équations différentielles (§4 ou §2.3).* Une équation à plusieurs variables dans laquelle il y a une relation entre une fonction inconnue et une ou plusieurs de ses dérivées, ou une relation des différentielles est appelée une *équation* ______________________.

Exemples 9.1 Des exemples :

(1) $\frac{dy}{dx} = 1$

(2) $V\frac{dP}{dt} = nr$

(3) $y'' + 2y' - 3 = x'$

(4) $y^2 + \frac{dy}{dt} = t^3$

(5) $\frac{dQ}{du} = kQ$ (k une constante)

Une équation différentielle est ________________ si il y a au plus deux variables, ainsi que des dérivées d'ordre supérieur ou égal à 1 d'une des variables par rapport à l'autre. Quels exemples en haut sont ordinaires ?

(1) ______

(2) _______

(3) ______

(4) ______

(5) ______

____________ d'une équation différentielle est le plus élevé des ordres des dérivées contenues.

(1) __

(2) __

(3) __

(4) __

(5) __

Une ______________ d'une équation différentielle est une fonction qui ne contient aucune dérivée et aucune différentielle, et qui satisfait cette équation.

Exemple 9.2 La fonction $y = 2x^2 + \sin(x)$ est une solution de $\frac{d^2y}{2\,dx^2} - x^2 = 2 - \frac{y}{2}$

Exemple 9.3 La fonction $y = 1 - x$ est une solution de $7y'' + y' + y + x = 0$.

Une équation différentielle est *à variables* ________________ si on peut l'écrire sous la forme

Exemple 9.4 Lesquelles sont à variables séparables ?

$\frac{dy}{dx} = \sin(x)\cos(y)$ ______ $\frac{dy}{dx} = \sin(xy)$ ______ $\frac{dy}{dx} = e^{2x+3y}$ ______ $\frac{dy}{dx} = x^y$ ______

Et pourquoi on veut avoir une équation différentielle à variables séparables ? Car dans ce cas, c'est facile de trouver une solution !

Exemple 9.5 Faisons $\frac{dy}{dx} = \sin(x)\cos(y)$. Ça nous donne : $\sec(y)\,dy = \sin(x)\,dx$. On va utiliser l'intégration !

$$\begin{aligned} \int \sec(y)\,dy &= \int \sin(x)\,dx \\ \ln(|\sec(y) + \tan(y)|) + c_y &= -\cos(x) + c_x \\ \ln\left(|\sec(y) + \tan(y)|\right) &= -\cos(x) - C \end{aligned}$$

Donc, on a une solution générale pour notre équation différentielle.

Une solution est appelée _______________ si on peux mettre la solution sous la forme $F(x, y, C) = 0$. Notre exemple a comme solution implicite :

$$\ln(|\sec(y) + \tan(y)|) + \cos(x) + C = 0$$

Une solution est appelée _______________ si on peux mettre la solution sous la forme $y = f(x, C)$. On peut trouver une solution explicite par rapport à x facilement pour notre exemple :

$$x = \arccos(-\ln(|\sec(y) + \tan(y)|) + C)$$

Par contre, par rapport à y, il n'y a pas de solution explicite.

Exemple 9.6 Faisons un autre exemple : $\frac{dy}{dx} = e^{2x+3y}$. On a ______________________________. Alors

$$\begin{aligned} \int e^{-3y}\,dy &= \int e^{2x}\,dx \\ \underline{\qquad\qquad\qquad} &= \underline{\qquad\qquad\qquad} \\ e^{-3y} &= \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ y &= \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \end{aligned}$$

On voit que cet exemple a une solution explicite.

Une ______________________________ est une condition imposée pour les valeurs de x ou y. Par exemple, on peut imposer que $y = 0$ lorsque $x = 1$. Ça nous aide à trouver nos constantes C et en même temps nous donne une solution ____________________.

Pour trouver une solution particulière il nous faut n conditions initiales où n est l'ordre de l'équation différentielle.

Exemple 9.7 Soit l'équation différentielle $2y''' = 3x + 6$, trouvez une solution particulière.

Pour trouver une solution particulière, il nous faut __ conditions initiales. Donc, disons qu'on a

comme solutions à notre équation differentielle.

Commençons par trouver une solution implicite.

$$\begin{aligned}
2y''' = 2\frac{d(y'')}{dx} &= 3x + 6 \\
\int 2d(y'') &= \int 3x + 6\,dx \\
2y'' &= \underline{\hspace{10em}} \\
\int 2d(y') &= \int \frac{3}{2}x^2 + 6x + C_1\,dx \\
2y' &= \underline{\hspace{15em}} \\
\int 2\,dy &= \int \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 + C_1x + C_2\,dx \\
2y &= \underline{\hspace{19em}}
\end{aligned}$$

Avec nos conditions initiales on a :

$$\begin{aligned}
y = 0,\ x = 0 &\Rightarrow \underline{\hspace{5em}} \\
y = 1,\ x = 1 &\Rightarrow \underline{\hspace{16em}} \\
y = 0,\ x = -1 &\Rightarrow \underline{\hspace{14em}}
\end{aligned}$$

Donc, notre solution particulière est :

9.1.3. *Suites (§6.2 ou §6.1).* Une ________ est une séquences des nombres.

Exemple 9.8 (1) $\{1, 1, 1, 1, 1, \ldots\}$

(2) $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

(3) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\}$

(4) $\{1, 2, 6, 24, 120, \ldots\}$

(5) $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots\}$

(6) $\{1, 1, 2, 5, 14, 42, \ldots\}$

(7) ____________________________

Plus précisement, une *suite* est ____
On a deux façons d'écrire une suite donnée :

$$\{a_1, a_2, a_3, \ldots\} \qquad f(n) = a_n$$

Si notre suite est donné par une fonction explicite, le terme ____ est appellé un *terme* ____________ de la suite. Ça nous permet d'utiliser la notation : $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ou $\{a_n\}$ pour désigner la suite.

Exemple 9.9 (1) $\{1, 1, 1, 1, 1, \ldots\} = \{1\}$

(2) $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\} = \{i\}$

(3) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\} =$ ____________

(4) $\{1, 2, 6, 24, 120, \ldots\} =$ _______

(5) $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots\} = \left\{\frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}\right\}$ où $\varphi = 1.61803398874989\ldots$.

(6) $\{1, 1, 2, 5, 14, 42, \ldots\} = \left\{\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}\right\}$

(7) ____________________________

Exemple 9.10 C'est quoi le terme général de la suite $\left\{\frac{1}{3}, \frac{-1}{6}, \frac{1}{11}, \frac{-1}{18}, \frac{1}{27}, \ldots\right\}$?

9.2. **Partie 2.** On peut aussi définir une suite en utilisant les termes précédants. Une suite est *définie par* ____________________ si la valeur des premiers termes est donnée et que le terme général est défini en fonction des termes précédents.

Exemple 9.11 (1) $\{1, 1, 1, 1, 1, \ldots\} : a_1 = 1$ et $a_n = a_{n-1}$.

(2) $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\} : a_1 = 1$ et $a_n = a_{n-1} + 1$.

(3) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\} : a_1 = \frac{1}{2}$ et $a_n = \frac{n-1}{n} a_{n-1}$.

(4) $\{1, 2, 6, 24, 120, \ldots\} : a_1 =$ __ et $a_n =$ ___________.

(5) $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots\} : a_1 =$ __ et $a_n =$ ______________________.

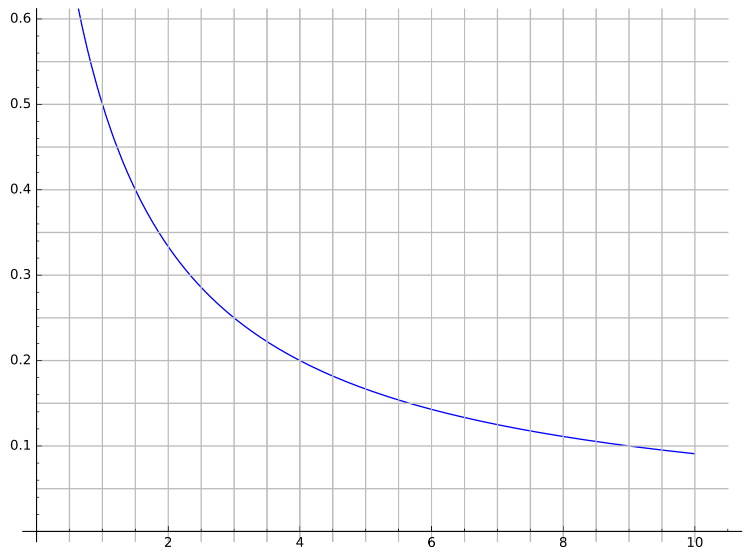
(6) $\{1, 1, 2, 5, 14, 42, \ldots\} : a_1 = 1$ et $a_n = \frac{2(2n-1)}{n+1} a_{n-1}$.

(7) ____________________________

Donc, on peut voir que, des fois, la définition récursive est plus simple que la définition explicite.

On peut voir les suites commes des graphes.

Exemple 9.12 $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$:



Une suite est *croissante* si $a_n \geq a_{n-1}$ et ____________________ *croissante* si $a_n > a_{n-1}$ pour tout n. De la même façon, une suite est *décroissante* si $a_n \leq a_{n-1}$ et ____________________ *décroissante* si $a_n < a_{n-1}$ pour tout n. Une suite est *monotone* si elle est croissante ou décroissante.

Une suite $\{a_n\}$ est *bornée* ___________________________ s'il existe un nombre réel B t.q $a_n \leq B$ pour tout n. De la même façon, une suite est *bornée* ___________________________ s'il existe un nombre réel b t.q. $a_n \geq b$ pour tout n. Une suite est *bornée* si elle est bornée supérieurement ou bornée inférieurement.

		Bornée sup ?	Bornée inf ?	Monotone ? (si oui, lequelle ?)
$\{\frac{1}{n}\}$	$\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$	1	0	décroissante
$\{(-1)^n\}$	$\{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$	__	_____	______
$\{n\}$	$\{1, 2, 3, 4\}$	__	__	_____
$\{(-1)^n n\}$	$\{-1, 2, -3, 4\}$	__	__	______

Théorème 9.13 *Soit une suite $\{a_n\}$ et une fonction f telles que $f(n) = a_n$ et $f(x)$ est continue. Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ où $L \in \mathbb{R} \cup \pm\infty$ alors $\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} a_n = L$.*

Si $L \in \mathbb{R}$ on dit que la suite $\{a_n\}$ *converge* vers L et que la suite est *convergente*. Si $L \in \pm\infty$ ou L n'existe pas on dit que la suite *diverge* ou que la suite est *divergente*.

Théorème 9.14 *Soit une suite $\{a_n\}$.*

— *Si $\{a_n\}$ converge alors elle est* ___________.

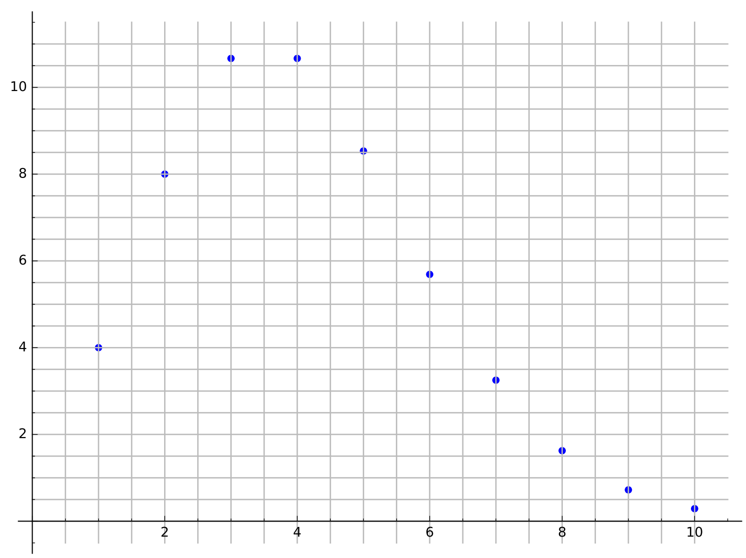
- *Si $\{a_n\}$ n'est pas bornée alors elle diverge.*
- *Si $\{a_n\}$ est monotone, alors elle converge si et seulement si elle est bornée.*
- *$\{a_n\}$ converge vers 0 si et seulement si $\{|a_n|\}$ converge vers 0.*

Théorème 9.15 *Soit une suite $\{a_n\}$ qui converge vers L_1 et une suite $\{b_n\}$ qui converge vers L_2 et $C \in \mathbb{R}$. Alors*

- *$\{C\}$ converge vers C.*
- *$\{a_n \pm b_n\}$ converge vers $L_1 \pm L_2$.*
- *$\{Ca_n\}$ converge vers CL_1.*
- *$\{a_n b_n\}$ converge vers $L_1 L_2$.*
- *$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ converge vers $\frac{L_1}{L_2}$.*

Théorème 9.16 (Théorème du sandwich) *Soit les suites $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ et $\{c_n\}$ telles que $a_n \leq c_n \leq b_n$ pour tout $n \geq m$ pour $m \in \mathbb{N}$. Alors si $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ et $\lim_{n\to\infty} b_n = L$ alors $\lim_{n\to\infty} c_n = L$.*

Exemple 9.17 Soit $\{a_n\} = \left\{\frac{4^n}{n!}\right\} = \left\{4, 8, \frac{32}{3}, \frac{32}{3}, \frac{128}{15}, \frac{256}{45}, \frac{1024}{315}\right\}$.



Déjà on peut voir qu'elle va converger vers 0. Alors, il nous faut trouver une autre suite qui va faire un sandwich.

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{4^n}{n!} \\
&= \frac{4}{n} \cdot \frac{4}{n-1} \cdot \frac{4}{n-2} \cdot \ldots \cdot \frac{4}{4} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{4}{1} \\
&\leq \frac{4}{n} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{2} \cdot 4 \\
&= \frac{4^4}{6n}
\end{aligned}$$

Mais on peut voir que $\lim_{n\to\infty} \frac{4^4}{6n} = 0$. Alors, parce que $0 \leq \frac{4^n}{n!} \leq \frac{4^4}{6n}$ on a que $\{a_n\}$ converge vers 0.

Exemple 9.18 Soit $\{a_n\} = \left\{2 + \frac{\sin(n)}{n^3}\right\}$.

9.2.1. *Séries infinies (§6.4 ou §6.2).* Une *série infinie* (ou *série*) est la somme suivante d'une suite : $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + \ldots$. Alors chaque suite est associée a une série.

Exemple 9.19 Soit la suite $\{(-1)^n\}$ la série qui lui est associée est la série :

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

Une *somme* ____________________ d'une série est la somme des n premiers termes de la série.

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

La *somme* (si elle existe) de la série est :

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

La *suite des sommes partielles* _________ est la suite des sommes partielles.

On dit que la série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *converge* si $\lim_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$. On dit que la série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *diverge* si $S \in \{\pm\infty\}$ ou n'existe pas.

Exemple 9.20 Soit la suite $\left\{\frac{1}{3^n}\right\}$. Alors la série est donnée par

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \ldots.$$

Les sommes partielles sont données par :

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{1}{3} \\
S_2 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9} \\
S_3 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} = \frac{13}{27} \\
S_4 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} = \frac{40}{81} \\
&\vdots \\
S_n &= \underline{\hspace{3cm}}
\end{aligned}$$

Alors on cherche $S = \lim_{n\to\infty} S_n$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{3^x - 1}{2 \cdot 3^x} \\
&= \lim_{n\to\infty} \underline{\hspace{5cm}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Alors notre série converge vers ___.

Théorème 9.21 *Si $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge, alors $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Théorème 9.22 *Si $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ et $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ sont deux séries convergentes respectivement vers A et B, et si $c, k \in \mathbb{R}$ alors $\sum_{i=1}^{\infty} (ca_i + kb_i)$ converge vers $cA + kB$.*

Théorème 9.23 *Si $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ diverge, $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ converge et $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Alors $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i \pm b_i)$ et $\sum_{i=1}^{\infty} ca_i$ divergent.*

9.2.2. *Séries importants (§6.6 ou §6.2).* La *série harmonique* est la série ____________. Elle est divergente vers ∞.

Une série de la forme $\sum_{i=1}^{\infty} (a + (i-1)\,d)$ est une *série* ______________________ de premier terme a et de ___________ d.

$$\sum_{i=1}^{\infty} (a + (i-1)\,d) = a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d) + \dots$$

Exemple 9.24 Soit la série suivante :

$$A = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$$

c'est une série arithmétique avec $d =$ __ et $a = 1$. Ainsi, $A =$ ______________________________.

Exemple 9.25 Soit la série suivante :

$$B = 2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17 + \dots$$

C'est une série arithmétique avec $d =$ __ et $a =$ __. Ainsi, $B =$ ________________.

Théorème 9.26 *Soit la série arithmétique $\sum_{i=1}^{\infty} (a + (i-1)\,d)$ alors elle diverge pour tout $d \in \mathbb{R}$ sauf si $a = 0$ et $d = 0$. En plus la somme partielle S_n est donnée par :*

$$S_n = na + \frac{n(n-1)}{2}d$$

Exemple 9.27 Pour nos exemples :

$$A:\ S_n = n + \frac{n(n-1)}{2} \qquad B:\ S_n = 2n + \frac{3n(n-1)}{2}$$

Une série de la forme $\sum_{i=1}^{\infty} ar^{i-1}$ est une *série* ____________ de premier terme a et de ______ r.

$$\sum_{i=1}^{\infty} ar^{i-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots$$

Exemple 9.28 Soit la série suivante :

$$C: 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \dots$$

C'est une série géométrique avec $r =$ __ et $a =$ __. Ainsi, $C =$ __________.

Exemple 9.29 Soit la série suivante :

$$D: \pi + \pi 3 + \pi 3^2 + \pi 3^3 + \dots$$

C'est une série géométrique avec $r =$ __ et $a =$ __. Ainsi, $D =$ ____________.

Théorème 9.30 *Soit la série géométrique $\sum_{i=1}^{\infty} ar^{i-1}$ où $r \neq 1$ alors la somme partielle S_n est donnée par :*

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

Exemple 9.31 Avec nos examples on a :

$$C:\ S_n = \frac{1-2^n}{1-2} \qquad D:\ S_n = \frac{\pi(1-3^n)}{1-3}$$

Théorème 9.32 *Soit la série géométrique $\sum_{i=1}^{\infty} ar^{i-1}$ où $a \neq 0$, alors elle converge vers $\frac{a}{r-1}$ si $|r| < 1$ et diverge autrement.*

10. Semaine 10 : 3 decembre 2018

Devoir 2 - Date d'échéance

10.1. **Partie 1.**

10.1.1. *Rappel.*

10.1.2. *Séries à termes positifs (§6.7 ou §6.3).* Maintenant, notre but est de savoir si les séries sont convergentes ou pas. Pour ça il existe plein de critères qu'on peut utiliser pour nous aider.

(1) **Critère de l'intégrale**

Théorème 10.1 *Soit $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ où $a_i > 0$ et f une fonction positive, continue et décroissante sur $[1, \infty[$ t.q. $f(n) = a_n$ pour tout n. Alors $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ et $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ sont convergentes toutes les deux ou sont divergentes toutes les deux.*

Exemple 10.2 Montrons que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i}}$ diverge. Posons $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ qui est bien positive, continue et décroissante sure $[\,1, \infty\,[$. Alors,

$$\int_1^{\infty} f(x) = \lim_{a\to\infty} \lim_{1}^{a} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a\to\infty} 2\sqrt{x}\Big|_1^a = 2 \lim_{a\to\infty} \sqrt{a} - 1 = \_\_\_\_$$

Alors $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i}}$ diverge.

Une *série de Riemann* est une série de la forme ______________________________.

Théorème 10.3 *Soit une série de Riemann, $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^p}$, où $p \in \mathbb{R}$. Si $p \leq 1$ alors la série diverge. Si $p > 1$ alors la série converge.*

(2) **Critère des polynômes**

Théorème 10.4 *Soit la série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ où $a_i > 0$ et $a_i = \frac{P(i)}{Q(i)}$ t.q. $P(i)$ et $Q(i)$ sont deux polynômes de degrés respectifs p et q. Si $q - p \leq 1$ alors la série diverge. Si $q - p > 1$ alors la série converge.*

Exemple 10.5 Est-ce que les séries suivantes convergent ou divergent ?

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i+2}{i^4 + i^3 - i^2} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_,$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^3 + 3i^2}{i} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_,$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i+2}{i^2} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

(3) **Critère de d'Alembert**

Théorème 10.6 *Soit la série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ où $a_i > 0$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$. Alors si $r < 1$ la série converge. Si $r > 1$ ou $r = \infty$ la série diverge. Si $r = 1$, alors on ne peut rien conclure.*

Exemple 10.7 Soit $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{e^i}$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{e^{i+1}}}{\frac{1}{e^i}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^i}{e^{i+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e} < 1$$

Alors $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{e^i}$ ____________.

Exemple 10.8 Soit $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{n}{2(n+1)}$. Alors,

(4) **Critère de Cauchy**

Théorème 10.9 *Soit la série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ où $a_i > 0$ et $r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. Si $r < 1$ alors $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge. Si $r > 1$ ou $r = \infty$ alors $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ diverge. Si $r = 1$ on peut rien conclure.*

Exemple 10.10 Soit $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^3 3^n}{n^3}$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n+1)^3 3^n}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} 3 \left(\frac{2n+1}{n}\right)^{\frac{3}{n}} = 3 \lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{n}} = \_\_.$$

Donc, $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^3 3^n}{n^3}$ ____________.

(5) **Critère de comparaison**

Théorème 10.11 *Soit la série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ où $a_i > 0$. Si $a_i \leq c_i$ pour tout $i \geq n$ où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ et si $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$ converge, alors $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge. Si $a_i \geq d_i > 0$ pour tout $i \geq n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ et si $\sum_{i=1}^{\infty} d_i$ diverge, alors $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ diverge.*

Exemple 10.12 Soit la série $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{98+2\sin(i)}{i!}$. Parce que $0 \leq \frac{98+2\sin(i)}{i!}$ on peut utiliser le critère de comparaison.

$$\frac{98+2\sin(i)}{i!} \leq \frac{98+2}{i!} = \frac{100}{i!}$$

Et, car $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{100}{i!}$ _______________ on sait que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{98+2\sin(i)}{i!}$ _______________ aussi.

(6) **Critère de comparaison à l'aide d'une limite**

Théorème 10.13 *Soit la série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ où $a_i >$ et la série $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ où $b_i > 0$. Soit $L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$, si la limite existe, où $0 < L < \infty$, alors si $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ converge alors $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge aussi. Si $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ diverge alors $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ diverge aussi.*

Exemple 10.14 Vérifions si $\sum_{i=1}^{\infty} \sin\left(\frac{2}{\sqrt{i}}\right)$ converge ou pas. Soit $b_i = \frac{1}{\sqrt{i}}$. Alors

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\cos\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)\left(-x^{\frac{-3}{2}}\right)}{\frac{-1}{2}x^{\frac{-3}{2}}} \cdot n \\ &= \lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right) \cdot -1 \cdot -2 \\ &= 2 \cdot 1 = 2 \end{aligned}$$

Et parce que $\sum_{i=1}^{\infty} b_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i}}$ _____________, alors $\sum_{i=1}^{\infty} \sin\left(\frac{2}{\sqrt{i}}\right)$ _____________ aussi.

10.1.3. *Convergence absolue et convergence conditionnelle (§6.8 ou §6.4).* Une série alternée est une série de la forme suivante :

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} a_i \quad \text{ou} \quad -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \ldots = \underline{\hspace{4cm}}$$

Théorème 10.15 (Critère de Leibniz ou Critère de la série alternée) *Soit les séries alternées $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i a_i$ et $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1} a_i$ où $a_i > 0$. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ et si la suite $\{a_n\}$ est décroissant à partir d'un certain indice, alors les deux séries convergent.*

Rappelons que si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ alors les séries divergent.

Exemple 10.16 Est-ce que la version alternée de la série harmonique converge ? $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{k}$. Alors on peut voir que $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$. De plus, elle est décroissante parce que si $f(x) = \frac{1}{x}$ alors $f'(x) = \frac{-1}{x^2} < 0$ pour tout $x > 0$. Donc la série converge !

On dit une série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ est ____________________ *convergente* si $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ converge.

Théorème 10.17 *Si $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ est absolument convergente alors elle est convergente.*

Si une série est convergente mais pas absolument convergente on dit qu'elle est __________________________________ *convergente.*

Exemple 10.18 On voit que $\sum_{i=1} \frac{(-1)^i}{i}$ n'est pas absolument convergente parce que la série harmonique :

$$\sum_{i=1} \left| \frac{(-1)^i}{i} \right| = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$$

ne converge pas. Mais parce que elle est convergente, on sait qu'elle est conditionnellement convergente.

Exemple 10.19 Soit $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos(i)}{i^3}$.

10.2. **Partie 2.**

10.2.1. *Séries de puissances (§6.9 ou §6.5).* Une *série de puissance en* $(x-a)$ (ou une ____) est une série de la forme :

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i(x-a)^i = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \dots$$

où $c_i \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.

Exemples 10.20 Des exemples :

(1) $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$
(2) $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(x-1)^i}{i}$
(3) $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{2i}{\sqrt{i+1}} (x-2)^i$
(4) ____________________________

Si on regarde le premier exemple, on peut voir que si $|x| < 1$ alors elle va converger, et si $|x| > 1$ alors elle va diverger.

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^i = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots$$
$$\sum_{i=0}^{\infty} (2)^i = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots$$

Donc on peut voir que, selon notre choix de x, la série peut diverger ou converger. L'ensemble I de tous les x tels que la série de puissance converge s'appelle ____________________ *convergence*. Toute série de puissance a au moins un x tel que la série converge. En particulier si $x = a$ alors $\sum_{i=0}^{\infty} c_i(x-a)^i = 0$.

Le __________ *de convergence* r est défini comme suit :

(1) Si la série converge seulement pour $x = a$ alors $r = 0$.

(2) Si la série converge pour tout x t.q. $|x - a| < r$ et diverge pour tout x t.q. $|x - a| > r$, alors le nombre r est le rayon de convergence.

(3) si la série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors $r = \infty$.

Théorème 10.21 (Critère généralisé de d'Alembert) *Soit la série* $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ *où* $u_i \neq 0$, *et soit* $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$. *Si* $R < 1$ *alors la série converge absolument. Si* $R > 1$ *ou si* $R = \infty$ *alors la série diverge. Si* $R = 1$ *alors on peut rien conclure.*

Théorème 10.22 (Critère généralisé de Cauchy) *Soit la série* $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ *et soit* $R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|}$. *Si* $R < 1$ *alors elle converge absolument. Si* $R > 1$ *ou* $R = \infty$ *alors elle diverge. Si* $R = 1$ *alors on peut rien conclure.*

Théorème 10.23 *Si* $\sum_{i=0}^{\infty} c_i(x-a)^i$ *est une série de puissance, alors le rayon de convergence est donné par* $r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$, *dans le mesure où cette limite existe ou vaut l'infini.*

10.2.2. *Séries de Taylor et de Maclaurin (§6.10 ou §6.6).* Finalement, on veut savoir si on peut intégrer une série entière. La réponse est donné par le théorème suivant :

Théorème 10.24 *Si la série entière* $\sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-a)^i$ *a un rayon de convergence* $r > 0$, *alors la fonction définie par* $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-a)^i$ *est dérivable et intégrable sur* $]a - r, a + r[$. *De plus,*

$$f'(x) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

et

$$\int f(x)\,dx = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

le rayon de convergence de ces deux nouvelles séries vaut également r.

Maintenant, faisons quelque chose un peu bizarre (comme toujours).

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-a)^i \Rightarrow f(a) = \underline{\qquad}$$

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{\infty} ia_i(x-a)^{i-1} \Rightarrow f'(a) = \underline{\qquad}$$

$$f''(x) = \sum_{i=2}^{\infty} i \cdot i-1 \cdot a_i(x-a)^{i-2} \Rightarrow f''(a) = \underline{\qquad\quad}$$

$$f'''(x) = \sum_{i=3}^{\infty} i \cdot i-1 \cdot i-2 \cdot a_i(x-a)^{i-3} \Rightarrow f'''(a) = \underline{\qquad\qquad\qquad\quad}$$

$$f^{(4)}(x) = \sum_{i=4}^{\infty} i \cdot i-1 \cdot i-2 \cdot i-3 \cdot a_i(x-a)^{i-4} \Rightarrow f''(a) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

Donc, on a

$$f(x) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

On appelle cette expression la *série de* ____________ *centrée en* a. Si $a = 0$ alors, c'est plutôt le *série de* ____________________.

Pour nous, la partie la plus importante c'est de trouver le développement de la fonction $f(x) = e^x$.

Exemple 10.25 Rappelons que si $f(x) = e^x$ alors $f'(x) = e^x$, et que $e^0 = 1$. Alors, si on veut la série de Maclaurin de $f(x) = e^x$ on trouve :

$$f(x) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} =$$

Mais quel est le rayon de convergence ? On a

$$\begin{aligned} r &= \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ &= \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ &= \lim_{n\to\infty} |n+1| \\ &= \infty \end{aligned}$$

Donc la série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier, pour x^2 ! Alors, on peut finalement résoudre un problème qu'on a vu au debut de cours : $\int e^{(x^2)}\,dx$.

$$e^{(x^2)} = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\int e^{(x^2)}\,dx &= \underline{\hspace{6cm}}\\ &= \underline{\hspace{10cm}}\end{aligned}$$

11. Semaine 11 : 10 decembre 2018

11.1. **Partie 1.**

11.1.1. *Rappel.*

Examen Pratique

11.2. **Partie 2.**

11.2.1. *Récapitulation - Un grand rappel.* Qu'est-ce que vous aimeriez voir ?

(1) **Longueur de courbes planes** Soit $y = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}$. Trouver la longueur de la courbe entre l'origine et le point $(2, 2)$.

$$\begin{aligned}\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx &= \int_{\_}^{\_} \sqrt{1 + (\_\_\_\_\_)^2}\, dx \\ &= \underline{\hspace{6cm}} \\ &= \left.\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_1^3 \\ &= \frac{2 \cdot 3^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2}{3}\end{aligned}$$

(2) **Intégration de fonctions rationnelles par décomposition en une somme de fractions partielles** Trouver l'intégrale suivante :

$$\int \frac{3x^2 + 11x + 9}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}\, dx$$

$$\begin{aligned}\frac{3x^2 + 11x + 9}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4} &= \underline{\hspace{8cm}} \\ &= \underline{\hspace{14cm}} \\ 3x^2 + 11x + 9 &= \underline{\hspace{22cm}} \\ A &= \_\_ \\ B &= \_\_ \\ C &= \_\_\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2 + 11x + 9}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}\, dx &= \int \underline{\hspace{16cm}}\, dx \\ &= \ln(|x + 1|) + 2\ln(|x + 2|) + \frac{-1}{x + 2} + c\end{aligned}$$

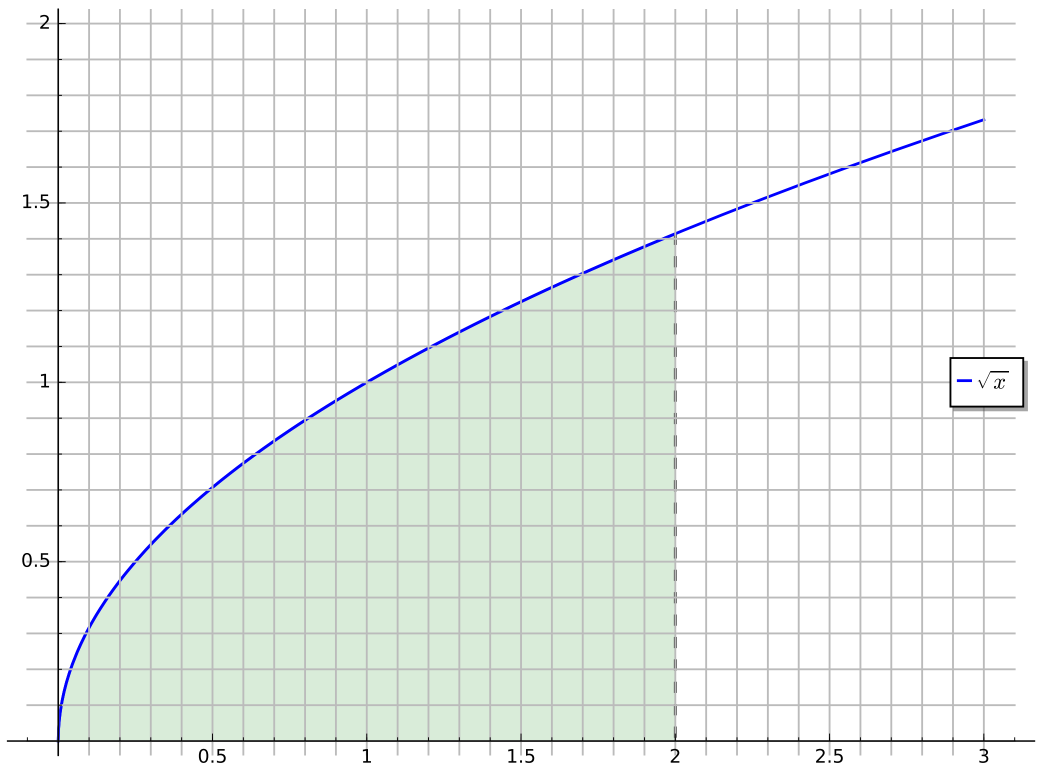
(3) **Volume de solides** On avait trois façons differentes pour trouver les volumes de la rotation d'une courbe autour d'un axe.

$$\int_a^b \pi \left(f(x)\right)^2\, dx \quad \text{Méthode des } \underline{\hspace{4cm}}$$

$$\int_a^b \pi \left(f(x)\right)^2 - \pi \left(g(x)\right)^2\, dx \quad \text{Méthode des } \underline{\hspace{8cm}}$$

$$\int_a^b 2\pi x\,(f(x)-g(x))\;dx \quad \text{Méthode des \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

Exemple 11.1 Trouver le volume du solide engendré par la révolution autour de l'axe des x de la surface plane bornée par $y=\sqrt{x}$, $y=0$ et $x=2$.



$$\int_0^2 \underline{\hspace{5cm}}\; dx = \underline{\hspace{5cm}}$$
$$= \pi \frac{x^2}{2}\Big|_0^2$$
$$= 2\pi$$

(4) **Intégrales impropres**

(a) Si f est continue sur $[a,b[$ et $\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$ alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\hspace{8cm}}$$

si la limite existe.

(b) Si f est continue sur $]a, b]$ et $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \rule{8cm}{0.4pt}$$

si la limite existe.

(c) Si f est continue sur $]a, b[$, $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$ alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \rule{16cm}{0.4pt}$$

si les limites existent pour un $c \in]a, b[$.

(a) Si f est continue sur $[a, \infty[$ alors

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \rule{8cm}{0.4pt}$$

si la limite existe.

(b) Si f est continue sur $]-\infty, b]$ alors

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \rule{8cm}{0.4pt}$$

si la limite existe.

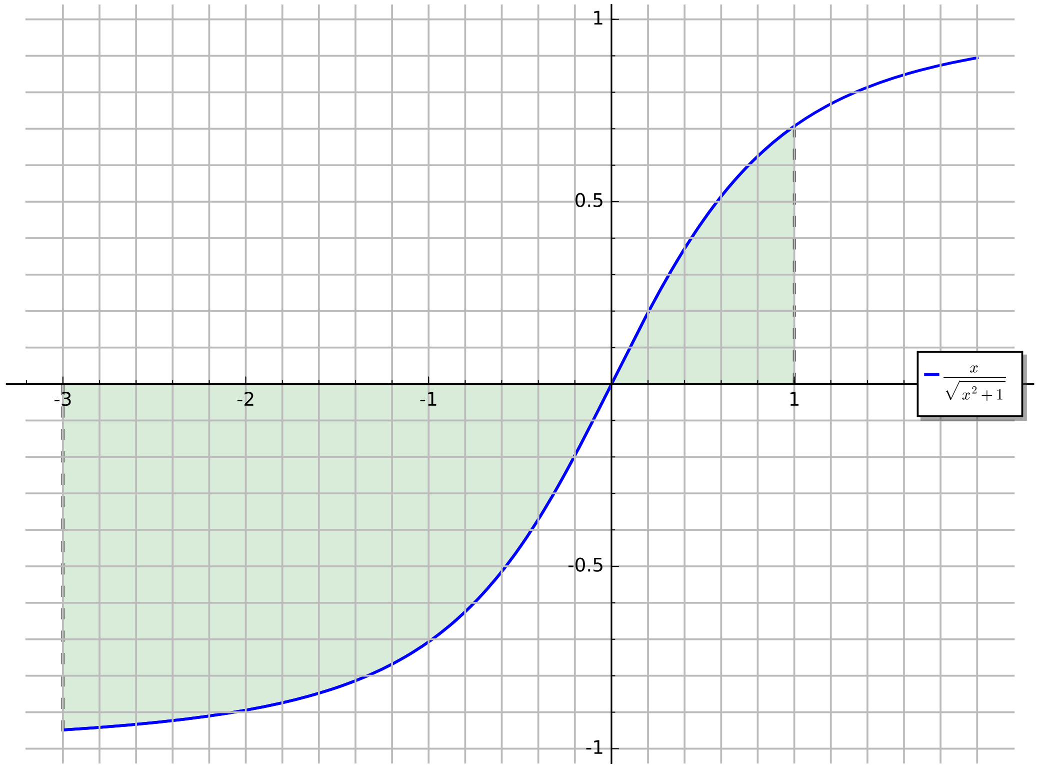
(c) Si f est continue sur $\mathbb{R}$ alors

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \rule{16cm}{0.4pt}$$

si les limites existent pour un $c \in \mathbb{R}$.

Exemple 11.2 Évaluer

$$\int_{-\infty}^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$



$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{1} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx &= \underline{\hspace{6cm}}\,dx \\
&= \underline{\hspace{6.5cm}} \\
&= \lim_{A\to-\infty} \sqrt{u}\Big|_{x=A}^{x=1} \\
&= \lim_{A\to-\infty} \sqrt{1+x^2}\Big|_{A}^{1} \\
&= \sqrt{1+1^2} - \lim_{A\to-\infty} \sqrt{1+A^2} \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

Donc, l'intégrale diverge.

(5) **Aire d'une surface de révolution**

		Axe de rotation	
		Rotation autour de l'axe des x	Rotation autour de l'axe des y
Description de la courbe	$y = f(x)\ x \in [a, b]$	$\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$	$\int_a^b 2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$
	$x = g(y)\ y \in [c, d]$	$\int_c^d 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$	$\int_c^d 2\pi g(y)\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$

Exemple 11.3 Calculer l'aire de la surface engendrée par la rotation de l'arc $y = \frac{x^3}{3}$ autour de l'axe des x de $x = 0$ à $x = 3$

$$\begin{aligned}\int_{\_}^{\_} 2\pi \underline{\quad\quad}\sqrt{1+(\underline{\quad\quad})^2}\,dx &= \underline{\hspace{8cm}}\\ &= 2\pi\int_1^{82}\frac{\sqrt{u}}{12}\,du\\ &= \frac{\pi}{6}\left.\frac{u^{3/2}}{3/2}\right|_1^{82}\\ &= \frac{\pi}{9}\left(82^{3/2}-1\right)\end{aligned}$$

(6) **Équations différentielles**

$$y'' = 6x + 2$$

(a) C'est quoi l'ordre ? __

(b) C'est à variables séparables ? _____

(c) Donne une solution générale.

$$\begin{aligned} y'' &= 6x + 2\\ \underline{\hspace{3cm}} &= \underline{\hspace{5cm}}\\ y' &= 3x^2 + 2x + c_1\\ \underline{\hspace{2cm}} &= \underline{\hspace{8cm}}\\ y &= x^3 + x^2 + c_1 x + c_2\end{aligned}$$

(d) Si $(0, 1)$ et $(2, 14)$, c'est quoi la solution particulière ?

$$x = 0,\ y = 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\hspace{3cm}}$$

$$x = 2,\ y = 14 \quad \Rightarrow \quad \underline{\hspace{3cm}}$$

$$y = \underline{\hspace{6cm}}$$

(7) **Suites**

Mot	Défn ou exemple
Suite	$1, 1, 1, 1, 1, \ldots$
Terme Général	$\{a_n\} = \{1\}$
Par Récurrence	Si on a des premiers termes et un terme général
Croissante	$a_n \geq a_{n-1}\ \forall n$
Strictement Croissante	$a_n > a_{n-1}\ \forall n$
Décroissante	$a_n \leq a_{n-1}\ \forall n$
Strictement Décroissante	$a_n < a_{n-1}\ \forall n$
Monotone	Soit croissante, soit décroissante
Bornée supérieurement	$\exists B \in \mathbb{R}$ t.q. $a_n \leq B\ \forall n$
Bornée inférieurement	$\exists b \in \mathbb{R}$ t.q. $a_n \geq b\ \forall n$
Bornée	Soit bornée sup, soit bornée inf
Convergente	Si il existe $L \in \mathbb{R}$ t.q. $\lim_{n\to\infty} a_n = L$
Divergente	Si $\lim_{n\to\infty} a_n$ n'existe pas ou c'est $\pm\infty$

On avait plein des théorèmes en plus.

Théorème 11.4 *Soit une suite $\{a_n\}$.*

— *Si $\{a_n\}$ converge alors elle est bornée.*

— *Si $\{a_n\}$ n'est pas bornée alors elle diverge.*

— *Si $\{a_n\}$ est monotone, alors elle converge ssi elle est bornée.*

— *Si $\{a_n\}$ converge vers 0 ssi $\{|a_n|\}$ coverge vers 0.*

Théorème 11.5 (Théorème du sandwich) *Soit les suites $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, t.q. $a_n \leq c_n \leq b_n$ pour tout $n \geq m$ pour $m \in \mathbb{N}$. Alors si $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ covergent vers L, alors $\{c_n\}$ converge vers L.*

Exemple 11.6 Est-ce que les suites suivantes convergent ou pas ?

(a) $\left\{\frac{3}{n}\right\}$? ______

(b) $\left\{\frac{n^2+1}{n+1}\right\}$? ______

(c) $\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$? _____

(d) $\left\{\frac{\sin(n)}{n}\right\}$? _____

(8) **Séries infinies** Une série est la somme $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ d'une suite $\{a_n\}$ où les sommes partielles sont $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

La série converge si $\lim_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$. Sinon, elle diverge.

Séries importantes

— Série arithmétique de premier terme a et de raison d : $\sum_{i=1}^{\infty} a+(i-1)d$.

$$S_n = na + \frac{n(n-1)}{2}d$$

— Série géométrique de premier terme a et de raison r : $\sum_{i=1}^{\infty} ar^{i-1}$.

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

Séries à termes positifs Soit $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum a_i$ où $a_i > 0$.

Critère	
Critère de l'intégrale	Si $f(n) = a_n$ est continue et décroissante sur $[1, \infty[$ alors $\sum a_i$ est convergente ssi $\int_1^\infty f(x)\,dx$ est convergente.
Série de Riemann	$\sum \frac{1}{i^p}$ converge ssi $p > 1$.
Critère des polynômes	Si $a_i = \frac{P(i)}{Q(i)}$ alors $\sum a_i$ converge ssi $\deg(Q) - \deg(P) > 1$.
Critère de d'Alembert	Soit $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$. Si $r > 1$ alors $\sum a_i$ diverge. Si $r < 1$ alors $\sum a_i$ converge.
Critère de Cauchy	Soit $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r$. Si $r < 1$ alors $\sum a_i$ converge. Si $r > 1$ alors $\sum a_i$ diverge.
Critère de comparaison	Si $\sum c_i$ converge et $c_i \geq a_i$ pour tout $i \geq k \in \mathbb{N}$ alors $\sum a_i$ converge. Si $\sum d_i$ diverge et $d_i \leq a_i$ pour tout $i \geq k \in \mathbb{N}$ alors $\sum a_i$ diverge.
Critère de comparaison à l'aide d'une limite	Si $\sum b_i$ t.q. $b_i > 0$. Soit $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in \mathbb{R}^+$, alors $\sum a_i$ converge ssi $\sum b_i$ converge.
Critère de la série alternée	Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ et $\{a_n\}$ est décroissante à partir d'un certain indice, alors $\sum (-1)^i a_i$ et $\sum (-1)^{i+1} a_i$ convergent.
Absoluement convergente	Si $\sum \lvert a_i \rvert$ converge, alors $\sum a_i$ converge.

Exemples 11.7 Est-ce que les séries suivantes converge ou diverge ?

(a) $\sum_{i=1}^\infty \frac{1}{i}$? ______

(b) $\sum_{i=1}^\infty \left(\frac{2n}{3n+4}\right)^n$? ______

(c) $\sum_{i=1}^\infty \frac{1}{i^3}$? ______

(d) $\sum_{i=1}^\infty \frac{i+3}{i^2+i}$? ______

(9) **Séries de puissances, de Taylor et de Maclaurin**

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i (x-a)^i = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

Le rayon de convergence r :

(a) Si la série converge seulement pour $x = a$ alors $r = 0$.

(b) Si la série converge pour tout x t.q. $|x - a| < r$ et diverge pour tout x t.q. $|x - a| > r$, alors le nombre r est le rayon de convergence.

(c) si la série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors $r = \infty$.

Théorème 11.8 *Si $\sum_{i=0}^{\infty} c_i(x-a)^i$ est une série de puissance, alors le rayon de convergence est donné par $r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$, dans le mesure où cette limite existe ou vaut l'infini.*

Série de Taylor :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$

Si $a = 0$ alors, c'est un série de Maclaurin.

Exemple 11.9 Développer la fonction $f(x) = \ln(x)$ en série de Taylor centrée en 1 et donner le rayon de convergence.

$f(x)$	________	$f(1)$	__
$f'(x)$	__	$f'(1)$	__
$f''(x)$	____	$f''(1)$	____
$f'''(x)$	___	$f'''(1)$	__
$f^{(4)}(x)$	_____	$f^{(4)}(1)$	_______

$\ln(x) =$ ________________________

Le rayon est donné par :

$r =$ ____