

MAT 0344  
Notes du cours  
by Aram Dermenjian  
21 décembre 2018

## 1. SEMAINE 1 : 10 SEPTEMBRE 2018

1.1. **Partie 1.** Bienvenue au cours de Calcul Intégral! Ces notes de cours sont faites pour t'aider à bien maîtriser le sujet. Si jamais tu as des questions n'hésites pas me demander!

Ce cours est donné par [Aram Dermenjian](#). Pour le trouver, il est disponible dans son bureau ([PK-4518](#)) à :

- (1) [Lundi – 16h00 - 18h00](#)
- (2) [Mardi – 14h00 - 16h00](#)
- (3) [Vendredi – 15h00 - 17h00](#)
- (4) Avec rendez-vous – [dermenjian.aram@uqam.ca](mailto:dermenjian.aram@uqam.ca)

Commençons avec le cours et le plan

— Evaluation :

**Devoir 1 :** [15 octobre](#) (remis en classe) **Pondération 20%**

**Examen 1 :** [29 octobre](#) **Pondération 30%**

**Devoir 2 :** [3 décembre](#) (remis en classe) **Pondération 20%**

**Examen 2 :** [17 décembre](#) **Pondération 30%**

— Moodle :

— L'intégrité académique

— Politique 16 sur le harcèlement sexuel

1.1.1. *Calcul différentiel.* C'est un cours de calcul, donc on va travailler avec des fonctions! Alors, on commence avec une fonction. Disons, la suivante :

$$f(x) = e^x + \cot(x)$$



On rappelle qu'une fonction est continue sur un intervalle  $I$  si pour tout  $a \in I$  on a

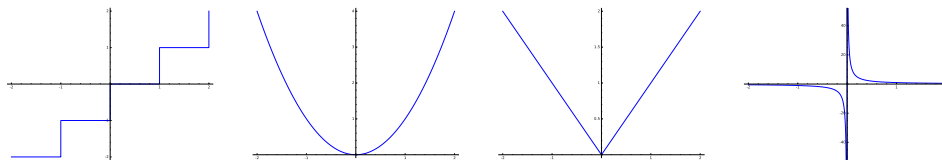
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu > 0 \forall x \in I (|x - a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \nu).$$

Qu'est-ce que ça veut dire? C'est qu'il y a aucun endroit où la fonction va vers ni  $\infty$  ni  $-\infty$  sur  $I$ .

**Exemple 1.1** Dans notre exemple, où notre fonction  $f(x) = e^x + \cot(x)$  est-elle continue?

$[-1, 1]$ ? non  $[1, 3]$ ? oui  $\mathbb{R}$ ? non

**Exemple 1.2** Quelles fonctions sont continues :



Une dérivée d'une fonction  $f(x)$  sur un intervalle  $I$  est une fonction  $f'(x)$  telle que

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

est bien définie pour tout  $x$  dans l'intervalle  $I$ .

C'est-à-dire, la dérivée est la fonction pour les lignes tangentes à la courbe.

**Exemple 1.3** Dans notre exemple  $f(x) = e^x + \cot(x)$ , on a

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \underline{e^x - \csc(x)^2}$$

Voici une liste des dérivées usuelles :

Fonction	Dérivée	Fonction	Dérivée
$f(x) = x^r$	$f'(x) = rx^{r-1}$	$f(x) = kg(x)$	$f'(x) = kg'(x)$
$f(x) = g(x)h(x)$	$f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$	$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$	$f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h^2(x)}$
$f(x) = g(h(x))$	$f'(x) = g'(h(x))h'(x)$	$f(x) = g(x)^r$	$f'(x) = r(g(x))^{r-1}g'(x)$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln(a)$	$f(x) = \log_a(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x \ln(a)}$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$
$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = \sec^2(x)$	$f(x) = \cot(x)$	$f'(x) = -\csc^2(x)$
$f(x) = \sec(x)$	$f'(x) = \sec(x) \tan(x)$	$f(x) = \csc(x)$	$f'(x) = -\csc(x) \cot(x)$
$f(x) = \arcsin(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$f(x) = \arccos(x)$	$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arctan(x)$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$f(x) = \text{arccot}(x)$	$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1+x^2}}$
$f(x) = \text{arcsec}(x)$	$f'(x) = \frac{1}{ x \sqrt{x^2-1}}$	$f(x) = \text{arccsc}(x)$	$f'(x) = \frac{-1}{ x \sqrt{x^2-1}}$

⚠ Dans le livre de Charron et Parent, ils se trompent avec arcsec et arccsc.

1.1.2. Règle de L'Hôpital (§5.1 ou §1.4). Rappelons la règle :

**Théorème 1.4** (Règle de L'Hôpital) Si  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$  ou  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$  et si la limite  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  existe, ou est infinie, alors

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Le mot “hospital” a changé au “hôpital” officieusement en 1740 avec le Réforme orthographique française de 1740. Mais, le règle est nommé après : Guillaume François Antoine de L'Hôpital (1661-1704). Donc c'était avant le changement. Donc de fois tu vois l'autre orthographie.

**Exemples 1.5** (1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+3}{2x-1} = \frac{\infty}{\infty}$ . Prenons  $f(x) = x+3$  et  $g(x) = 2x-1$  on a  $f'(x) = 1$ ,  $g'(x) = 2$ . Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+3}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2}.$$

(2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+4)^2}{x^2-2000} = \frac{\infty}{\infty}$  Alors  $f'(x) = 2(x+4)$ ,  $g'(x) = 2x$  et  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+8}{2x} = \frac{\infty}{\infty}$ . Alors  $f''(x) = 2$ ,  $g''(x) = 2$  et  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{2} = 1$ .

(3)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-x-2}{\sqrt{2}-\sqrt{x}} = \frac{0}{0}$ . Alors  $f'(x) = 2x-1$ ,  $g'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x}}$  et  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-1}{\frac{-1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x-1)(2\sqrt{x})}{-1} = (2 \cdot 2 - 1)(2\sqrt{2}) \cdot -1 = -6\sqrt{2}$ .

(4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2} = \frac{0}{0}$ . Alors  $f'(x) = 1$ ,  $g'(x) = 2x$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x} = DNE$ . Alors on peut pas utiliser la règle de L'Hôpital.

1.1.3. *Les formes  $\infty - \infty$  et  $0 \cdot \pm\infty$  (§5.2 ou §1.4).* On peut utiliser la règle de l'Hôpital pour les fonctions où la limite devient  $\infty - \infty$  ou  $0 \cdot \pm\infty$ . Pour  $\infty - \infty$ , c'est facile à régler et on va le faire dans un exemple :

**Exemple 1.6** Trouver la limite :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x \sin(x)} - \frac{1}{x^2}$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x \sin(x)} - \frac{1}{x^2} &= \infty - \infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x \sin(x)} - \frac{1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{x^2 \sin(x)} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{2x \sin(x) + x^2 \cos(x)} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{2 \sin(x) + 2x \cos(x) + 2x \cos(x) - x^2 \sin(x)} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{2 \cos(x) - 4x \sin(x) + 4 \cos(x) - 2x \sin(x) - x^2 \cos(x)} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Alors, on a changé notre equation  $f(x) = g(x) - h(x)$  pour quelque chose qui est une fraction dont la limite vaut soit  $\frac{0}{0}$  soit  $\frac{\infty}{\infty}$ . Mais qu'est-ce qu'on fait si on a  $0 \cdot \pm\infty$ ? On fait la même chose!

**Exemple 1.7** Trouver la limite :  $\lim_{x \rightarrow 0} 8x^4 \ln(3x)$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} 8x^4 \ln(3x) &= 0 \cdot \infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} 8x^4 \ln(3x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3x)}{1/8x^4} = \frac{-\infty}{\infty} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3/3x}{-4/8x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3}{-x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} -2x^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

1.1.4. *Les formes  $0^0$ ,  $\infty^0$  et  $1^{\pm\infty}$  (§5.3 ou §1.4).* Ce qu'on va faire sera très bizarre, mais on va voir que ça nous donne la bonne réponse. Faisons un exemple.

**Exemple 1.8** Trouver la limite :  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2)^{x^2}$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2)^{x^2} = 0^0$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} (x^2)^{x^2} &\rightarrow \ln \left( \lim_{x \rightarrow 0} (x^2)^{x^2} \right) \\
\ln \left( \lim_{x \rightarrow 0} (x^2)^{x^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left( (x^2)^{x^2} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} 2x^2 \ln(x) = 0 \cdot -\infty \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln(x)}{1/x^2} = \frac{-\infty}{\infty} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2/x}{-2/x^3} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3}{-2x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = 0 \\
\ln \left( \lim_{x \rightarrow 0} (x^2)^{x^2} \right) &= 0 \\
&\Rightarrow] \\
\lim_{x \rightarrow 0} (x^2)^{x^2} &= e^0 = 1
\end{aligned}$$

Alors, il faut faire les étapes suivants :

- (1) Metter  $L = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .
- (2) Trouver  $\ln(L) = \ln(\lim_{x \rightarrow a} f(x)) = \lim_{x \rightarrow a} \ln(f(x)) = N$ .
- (3) Alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = e^N = L$ .

## 1.2. Partie 2.

1.2.1. *Sommation (§1.2 ou §3.1).* On commence avec l'addition.

**Exemple 1.9** Disons qu'on veut ajouter 1 à lui-même dix fois. On peut le faire comme :  $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 10$ . Mais, ça ce complique quand on veut ajouter 1 encore plus de fois, disons 25 fois :

$$1 + 1 = 25.$$

C'est trop long, alors on veut l'écrire de manière plus visible. Pour l'addition de 1 à lui-même c'est facile. On fait  $1 \cdot n$  où  $n$  est le nombre de fois qu'on veut ajouter 1 à lui-même. Ainsi, disons qu'on veut ajouter chaque entier de 1 à 10 :  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$ . Et, si on le fait pour 1 à 25, c'est long :

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 + 21 + 22 + 23 + 24 + 25 = \underline{325}$$

Lorsqu'on veut abrégé la sommation on introduit une nouvelle notation :  $\Sigma$ .

### Exemple 1.10

$$\sum_{i=1}^{10} 1 = 10 \quad \sum_{i=1}^{10} i = 55$$

En général on a quelque chose comme :

$$\sum_{i=m}^n a_i = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$

Les  $a_i$  sont les *indices de sommation* et ils se sont justes des fonctions.

$$a_i = 1 \quad a_i = i$$

Si on veut que la sommation continue jusqu'à l'infini, on peut mettre  $n = \infty$  :

$$\sum_{i=m}^{\infty} a_i.$$

**Exemple 1.11** Faisons des exemples :

$$\sum_{i=m}^n a_i = \sum_{i=1}^4 2i - 1 = 2(1) - 1 + 2(2) - 1 + 2(3) - 1 + 2(4) - 1 = 2 + 4 + 6 + 8 - 4 = 16$$

$$\sum_{i=m}^n b_i = \sum_{i=3}^5 i^2 + 1 = \underline{3^2 + 1 + 4^2 + 1 + 5^2 + 1 = 53}$$

$$\sum_{j=x}^y i_j = \sum_{j=-4}^{-1} 3 = \underline{3 + 3 + 3 + 3 = 12}$$

Et dans l'autre sens :

$$2 + 2 + 2 + 2 + 2 = \sum_{i=1}^5 2$$

$$5 + 8 + 11 + 14 = \underline{\sum_{i=1}^4 3i + 2} = \sum_{i=2}^5 3i - 1$$

$$1 + 0 - 1 - 2 - 3 = \underline{\sum_{i=-3}^1 i}$$

1.2.2. *Propriétés de la notation sigma (§1.3 ou §3.1).*

**Proposition 1.12** (1)  $\sum_{i=m}^n a_i = \sum_{j=m}^n a_j$ .

(2)  $\sum_{i=m}^n a_i = \sum_{i=1}^{n-m+1} a_{i+m-1}$ .

(3)  $\sum_{i=m}^n a_i = \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^{m-1} a_i$ .

(4) Pour  $c \in \mathbb{R}$ ,  $\sum_{i=m}^n c = (n - m + 1)c$ .

(5) Pour  $c \in \mathbb{R}$ ,  $\sum_{i=m}^n ca_i = c \sum_{i=m}^n a_i$ .

(6)  $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = (\sum_{i=1}^n a_i) + (\sum_{i=1}^n b_i)$

(7)  $\sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) = \underline{a_n - a_0}$ . *somme télescopique*

(8)  $\sum_{i=1}^n i = \underline{\frac{n(n+1)}{2}}$ .

(9)  $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

(10)  $\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ .

(11)  $\sum_{i=1}^n r^i = \frac{r^{n+1} - r}{r-1}$ .

*Démonstration.* (1) ✓

(2)  $\sum_{i=m}^n a_i = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n = a_{1+m-1} + a_{2+m-1} + \dots + a_{n-m+1+m-1} = \sum_{i=1}^{n-m+1} a_{i+m-1}$

(3) ✓

(4) ✓

(5)  $\sum_{i=m}^n ca_i = ca_m + ca_{m+1} + \dots + ca_n = c(a_m + a_{m+1} + \dots + a_n) = c \sum_{i=m}^n a_i$ .

(6) ✓

$$(7) \sum_{i=1}^n a_i - a_{i-1} = a_n - a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} + \cdots + a_2 - a_1 + a_1 - a_0 = a_n - a_0.$$

(8)

$$S = \sum_{i=1}^n i$$

$$S = 1 + 2 + \cdots + n$$

$$S = n + n - 1 + \cdots + 1$$

$$2S = (n + 1) + (n + 1) + \cdots + (n + 1)$$

$$2S = n(n + 1)$$

$$S = \frac{n(n + 1)}{2}$$

(9)

$$\sum_{i=1}^n (i^3 - (i - 1)^3) = n^3 - 0^3$$

Aussi,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (i^3 - (i - 1)^3) &= \sum_{i=1}^n (i^3 - (i^3 - 3i^2 + 3i - 1)) \\ &= \sum_{i=1}^n (3i^2 - 3i + 1) \\ &= 3 \sum_{i=1}^n i^2 - 3 \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1 \\ &= 3 \sum_{i=1}^n i^2 - 3 \frac{n(n + 1)}{2} + n \end{aligned}$$

Mettons les deux ensemble :

$$\begin{aligned} n^3 &= 3 \sum_{i=1}^n i^2 - 3 \frac{n(n + 1)}{2} + n \\ \sum_{i=1}^n i^2 &= \frac{1}{3} \left( n^3 + 3 \frac{n(n + 1)}{2} - n \right) \\ &= \frac{n}{6} (2n^2 + 3n + 1) \\ &= \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} \end{aligned}$$

(10) Exercice

(11)

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{i=1}^n r^i \\
 S &= r + r^2 + \dots + r^n \\
 rS &= r^2 + r^3 + \dots + r^{n+1} \\
 rS - S &= r^{n+1} - r \\
 S &= \frac{r^{n+1} - r}{r - 1}
 \end{aligned}$$

□

**Exemples 1.13**

$$\sum_{i=1}^{100} i = \frac{100 * (100 + 1)}{2} = \frac{10100}{2} = 5050$$

$$\sum_{k=5}^{12} k^2 = \frac{12(12+1)(2 \cdot 12 + 1)}{6} - \frac{4(4+1)(2 \cdot 4 + 1)}{6} = 2 \cdot 13 \cdot 25 - \frac{4 \cdot 5 \cdot 9}{6} = 650 - 30 = 620$$

$$\sum_{i=1}^{20} i^2 - i - 10 = \frac{20(21)(41)}{6} - \frac{20(21)}{2} - 10 * 20 = 2870 - 210 - 200 = 2460$$

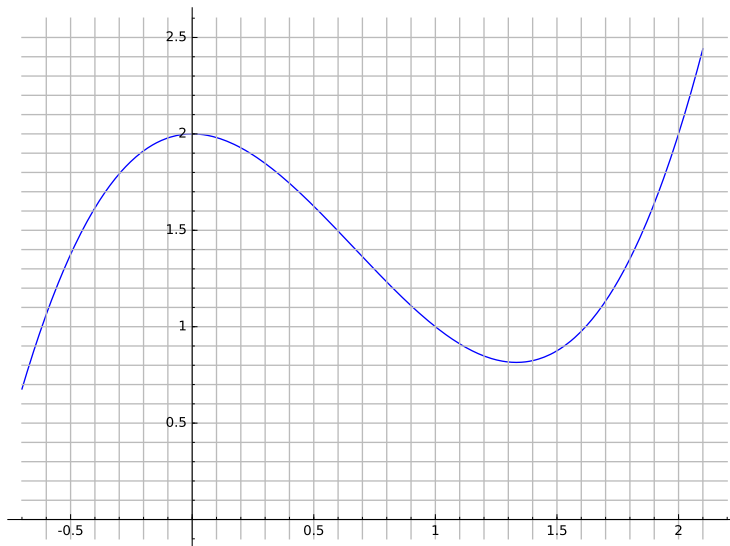
## 2. SEMAINE 2 : 17 SEPTEMBRE 2018

## 2.1. Partie 1.

## 2.1.1. Rappel.

- Continue
- Limits
- Règle de l'Hôpital
- Sommation

2.1.2. L'aire d'une surface sous une courbe (§1.4 ou §3.2). Supposons qu'on a la fonction  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$  :



Supposons qu'on veut l'aire sous la courbe de 0 à 2. Comment on peut faire ça ?

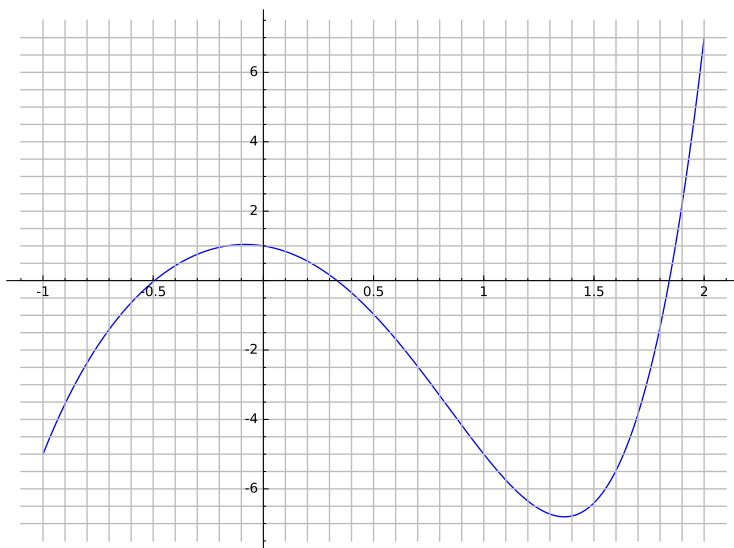
Let class give some estimations

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=0}^3 f\left(\frac{i}{2}\right) \Delta x \\
 &= \left(2 + \frac{13}{8} + 1 + \frac{7}{8}\right) \frac{1}{2} \\
 &= \frac{11}{4} \approx 2.7500000000000000
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=0}^{15} f\left(\frac{i}{8}\right) \Delta x \\
 &= \left(2 + \frac{1009}{512} + \frac{121}{64} + \frac{907}{512} + \frac{13}{8} + \frac{749}{512} + \frac{83}{64} + \frac{583}{512} + 1 + \frac{457}{512} + \frac{53}{64} + \frac{419}{512} + \frac{7}{8} + \frac{517}{512} + \frac{79}{64} + \frac{799}{512}\right) \frac{1}{8} \\
 &= \frac{171}{64} \approx 2.6718750000000000
 \end{aligned}$$

Estimation :  $\frac{8}{3} \approx 2.66666666666667$ .

2.1.3. *Somme de Riemann et Intégrale Définie (§1.5 ou §3.2)*. On travail sur la fonction  $f(x) = x^5 - 6x^2 - x + 1$  :



Soit un intervalle fermé  $[a, b]$ . Une partition de l'intervalle sont des nombres  $x_i$  tels que :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Ça nous donne  $n$  sous-intervalles :

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

Si les intervalles sont tous de même longueur ( $\frac{b-a}{n}$ ) on dit que la partition est régulière.

**Exemple 2.1** Soit  $a = 2$  et  $b = 5$ , deux partitions seraient :

$$2 < 2.1 < 3 < 4.2 < \underline{4.5} < 4.51 < 5$$

$$2 < 3 < \underline{4} < 5$$

avec les intervalles

$$[2, 2.1], [2.1, 3], [3, 4.2], [\underline{4.2}, \underline{4.5}], [\underline{4.5}, \underline{4.51}], [4.51, 5]$$

$$[2, 3], [\underline{3}, \underline{4}], [\underline{4}, \underline{5}]$$

Est-ce que elles sont régulières ? non oui avec  $[\frac{5-2}{3}]$ .

**Exemple 2.2** Soit  $a = 0$  et  $b = 1$ , donne une partition régulière :  $0 < 1$

On va toujours supposer que nos partitions sont régulières même si dans le livre c'est pas le cas.

La longueur d'un intervalle est la différence entre le début et la fin :  $\underline{\Delta x_i = x_i - x_{i-1}}$  pour l'intervalle  $[x_{i-1}, x_i]$ .

Soit  $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ , la somme de Riemann de la fonction  $f(x)$  sur l'intervalle  $[a, b]$  est la somme

$$\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i$$

La somme à gauche (droite) est la somme de Riemann où on prend  $x_i^* = \underline{x_{i-1}}$  ( $x_i^* = \underline{x_i}$ ). La somme au milieu est la somme de Riemann où on prend  $x_i^* = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$ .

Alors, maintenant on rencontre un problème. On aimerait trouver l'aire mais on a fait que les approximations! Qu'est-ce qu'on peut faire pour trouver l'aire exacte?

La réponse est d'utiliser les limites. Oui... les limites.

La limite qu'on va utiliser pour trouver l'aire est :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i$$

Si cette limite existe on dit que la fonction est intégrable au sens de Riemann.

MAIS, cette notation est horrible. Qui veut écrire ça à chaque fois? Personne. Alors on va utiliser une autre notation que (je pense) tout le monde a déjà vu : l'intégrale.

**Remarque 2.3** On a utilisé le  $\Sigma$  pour la sommation. Alors il nous faut un autre symbole pour l'intégrale. Heureusement Gottfried Leibniz d'Allemagne a utilisé une notation parfaite dans ses notes de 1675. Il a utilisé le s long allemand de l'époque : f. Pourquoi? Parce que l'intégrale est une sommation d'une infinité de sommations. Donc f est parfait pour ça. (Même les français ont utilisé le s long jusqu'à 1800!)

Mais aussi il faut changer le  $\Delta$  parce qu'on a pris la limite. On va regarder ce qu'il se passe pour le valeur de  $\Delta x_i$  à la limite. Quand on fait la sommation à l'infinie, le valeur de  $\Delta x_i$  diminue. Ainsi, on veut "diminuer"  $\Delta$ . Alors, c'est quoi le miniscule de  $\Delta$ ? C'est  $\delta$ ! Mais, Leibniz est allemand, alors il a utilisé la version allemande de  $\delta$  :  $d$ . Ainsi le  $\Delta$  devient  $d$ .

Alors, SI notre fonction est intégrable au sens de Riemann, on va écrire :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i.$$

Quelques définitions :

- Le  $a$  est la borne inférieure d'intégration.
- Le  $b$  est la borne supérieure d'intégration.
- Le  $f(x)$  est l'intégrande.
- Le  $x$  est la variable d'intégration.

**Théorème 2.4** Si  $f(x)$  est une fonction continue sur un intervalle  $[a, b]$ , alors la fonction est intégrable sur cet intervalle.

2.1.4. Propriétés des intégrales définies (§1.6 ou §3.2).

**Proposition 2.5** (1)  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du$

(2)  $\int_a^a f(x) dx = \underline{0}$

(3)  $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$

$$(4) \int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x)) dx = c_1 \int_a^b f(x) dx + c_2 \int_a^b g(x) dx \quad (\text{linéarité}).$$

$$(5) \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

Démonstration. (1) ✓

(2) ✓

(3) ✓

(4) Utiliser la définition (dans le livre)

(5) Encore dans le livre, mais une petite remarque sur pourquoi c'est bien définie. **Discuss why we can even make this addition. What happens at  $b$ ?**

□

2.1.5. *Théorème fondamental du calcul intégrale (§1.7 ou §3.3).* On a vu la propriété suivante pour les sommations :

$$\sum_{i=1}^n a_i - a_{i-1} = a_n - a_0.$$

Comme on peut voir, notre intégrale est définie de façon similaire :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) (x_i - x_{i-1}).$$

alors on veut savoir s'il existe un moyen plus facile pour trouver l'aire. Et on va voir très bientôt qu'il existe un moyen !

**Théorème 2.6** *Si  $F(x)$  et  $G(x)$  sont des fonctions continues sur un intervalle  $[a, b]$  et si  $F'(x) = G'(x)$  pour tout  $x \in ]a, b[$ , alors  $F(x) = G(x) + c$ , où  $c$  est une constante, pour tout  $x \in [a, b]$ .*

Si  $f(x)$  et  $F(x)$  sont des fonctions telles que  $F'(x) = f(x)$  alors on dit que  $F(x)$  est une *primitive* de  $f(x)$ .

Et on peut maintenant donner le théorème fondamental du calcul intégral :

**Théorème 2.7** (Théorème fondamental du calcul intégral) *Si  $f(x)$  est une fonction continue sur un intervalle  $[a, b]$  et si  $F(x)$  est une primitive de  $f(x)$  alors*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$

## 2.2. Partie 2.

2.2.1. *Primitives élémentaires (§1.9 ou §2.1).*

Fonction	Primitive
$x^n$ où $n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$x^{-1}$	$\ln( x )$
$\sin(kx)$ où $k \neq 0$	$-\frac{\cos(kx)}{k}$
$\cos(kx)$ où $k \neq 0$	$\frac{\sin(kx)}{k}$
$\sec^2(kx)$ où $k \neq 0$	$\frac{\tan(kx)}{k}$
$\operatorname{cosec}^2(kx)$ où $k \neq 0$	$-\frac{\operatorname{cotan}(kx)}{k}$
$\sec(kx) \tan(kx)$ où $k \neq 0$	$\frac{\sec(kx)}{k}$
$\operatorname{cosec}(kx) \operatorname{cotan}(kx)$ où $k \neq 0$	$-\frac{\operatorname{cosec}(kx)}{k}$
$e^{kx}$ où $k \neq 0$	$\frac{e^{kx}}{k}$

**Exemple 2.8**

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8-1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\int_2^4 2x dx = 2 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_2^4 = 2 \cdot \left( \frac{4^2}{2} - \frac{2^2}{2} \right) = 2 \cdot \left( \frac{16-4}{2} \right) = 16 - 4 = 12$$

$$\int_0^\pi \sin(x) dx = -\cos(x) \Big|_0^\pi = -\cos(\pi) + \cos(0) = 1 + 1 = 2$$

$$\int_5^5 e^{x^2} \cdot \sin^2(x^2) dx = \text{We don't know how to do this, but the answer is : 0}$$

2.2.2. *Les preuves de nos Théorèmes (§1.10 ou §3.3).* Vous avez vu le prochain théorème dans un cours de calcul différentiel.

**Théorème 2.9** (Théorème des accroissements finis (ou théorème de la moyenne))  
*Si  $f(x)$  est une fonction continue sur un intervalle  $[a, b]$  et si  $f(x)$  est dérivable pour tout  $x \in ]a, b[$ , alors il existe au moins une valeur de  $c \in ]a, b[$  telle que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

**Théorème 2.6.** *Si  $F(x)$  et  $G(x)$  sont des fonctions continues sur un intervalle  $[a, b]$  et si  $F'(x) = G'(x)$  pour tout  $x \in ]a, b[$ , alors  $F(x) = G(x) + c$ , où  $c$  est une constante, pour tout  $x \in [a, b]$ .*

*Démonstration.* Si  $H(x) = F(x) - G(x)$  alors  $H'(x) = F'(x) - G'(x) = 0$  (parce que  $F'(x) = G'(x)$ ) pour tout  $x \in ]a, b[$ . Prenons  $x_1, x_2 \in ]a, b[$  tels que  $x_1 < x_2$ . Puisque nos fonctions sont continues et dérivables,  $H(x)$  est continue et dérivable en  $x_1, x_2$ . Par le théorème des **accroissements finis**, il existe une constante  $c \in ]x_1, x_2[$  telle que  $H'(c) = \frac{H(x_2) - H(x_1)}{x_2 - x_1} = 0$  (parce que  $c \in ]a, b[$ ). Alors, comme  $x_1 < x_2$  et  $H'(c) = 0$  on a que  $H(x_2) - H(x_1) = 0$ , ainsi  $H(x_1) = H(x_2)$ . Alors, pour tout  $x \in [a, b]$  on a  $c = H(x) = F(x) - G(x)$ , i.e.,  $F(x) = G(x) + c$ .  $\square$

**Théorème 2.7** (Théorème fondamental du calcul intégral). *Si  $f(x)$  est une fonction continue sur un intervalle  $[a, b]$  et si  $F(x)$  est une primitive de  $f(x)$  alors*

$$\int_a^b f(x) dx = \underline{F(b) - F(a) = F(x)|_a^b}.$$

*Démonstration.*  $f(x)$  est continue, alors  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_k$  existe. La fonction  $F(x)$  est dérivable ( $F'(x) = f(x)$ ) et alors **continue**. Donc par le théorème des accroissements finis pour tout  $x_i^* \in ]x_{i-1}, x_i[$  on a

$$f(x_i^*) = F'(x_i^*) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{\Delta x_i}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \underline{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{\Delta x_i} \Delta x_i \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n F(x_i) - F(x_{i-1}) \\ &= \underline{\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) - F(x_0)} \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

□

2.2.3. *Formules d'intégration de base (§2.2 ou §2.1).* À cause du théorème fondamental du calcul intégral, pour trouver l'intégrale  $\int_a^b f(x) dx$  il faut trouver une fonction  $F(x)$  telle que  $F'(x) = f(x)$ . Mais, ça n'est pas toujours facile.

**Exemple 2.10** Trouve une fonction  $F(x)$  telle que  $F'(x) = f(x) = e^{x^2}$ . **C'est difficile. On verra dans 14 semaines.**

Une *intégrale indéfinie* est l'ensemble de toutes les primitives d'une fonction donnée. C'est-à-dire :  $\int f(x) dx = \underline{F(x) + c}$  où  $c$  est une constante.

Qu'est-ce que ça veut dire ?

**Exemple 2.11** Par exemple, on peut voir que  $\int k dx = kx + c$ . Ça veut dire que  $kx$  est une **primitive** de  $k$ . Pour montrer que c'est vrai il suffit de voir que  $\underline{\frac{d}{dx} kx = k}$ .

On a plusieurs formules d'intégration provenant du cours de calcul différentiel :

- (1)  $\int k dx = kx + c$
- (2)  $\int [k_1 f(x) + k_2 g(x)] dx = k_1 \int f(x) dx + k_2 \int g(x) dx$
- (3)  $\int x^n dx = \underline{\frac{x^{n+1}}{n+1} + c}$  (où  $n \neq -1$ )
- (4)  $\int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + c$
- (5)  $\int e^x dx = \underline{e^x + c}$
- (6)  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$  (où  $1 \neq a > 0$ )
- (7)  $\int \sin(x) dx = \underline{-\cos(x) + c}$

- (8)  $\int \cos(x) dx = \underline{\sin(x) + c}$   
 (9)  $\int \sec(x) dx = \ln(|\sec(x) + \tan(x)|) + c$   
 (10)  $\int \operatorname{cosec}(x) dx = \ln(|\operatorname{cosec}(x) - \cotan(x)|) + c$   
 (11)  $\int \tan(x) dx = \ln(|\sec(x)|) + c$   
 (12)  $\int \cotan(x) dx = \ln(|\sin(x)|) + c$   
 (13)  $\int \sec^2(x) dx = \tan(x) + c$   
 (14)  $\int \operatorname{cosec}^2(x) dx = -\cotan(x) + c$   
 (15)  $\int \sec(x) \tan(x) dx = \sec(x) + c$   
 (16)  $\int \operatorname{cosec}(x) \cotan(x) dx = -\operatorname{cosec}(x) + c$   
 (17)  $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + c$   
 (18)  $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arcsec}(|x|) + c$   
 (19)  $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c$

Mais, pourquoi ? Parce que, ça nous donne une façon de facilement trouver l'intégrale définie.

**Exemple 2.12** Évaluez les expressions suivantes :

(1)

$$\begin{aligned}
 \int_2^4 \frac{12}{x^3} dx &= 12 \int_2^4 \frac{1}{x^3} dx \\
 &= 12 \cdot \frac{1}{-2x^2} \Big|_2^4 \\
 &= 12 \cdot \left( \frac{1}{-2 \cdot 4^2} - \frac{1}{-2 \cdot 2^2} \right) \\
 &= 12 \cdot \left( \frac{1}{-32} - \frac{1}{-8} \right) \\
 &= 12 \cdot \left( \frac{4}{32} - \frac{1}{32} \right) \\
 &= 12 \cdot \frac{3}{32} \\
 &= \frac{9}{8}.
 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx &= \int_1^4 \frac{1}{x^{3/2}} dx \\
 &= \frac{1}{(-1/2)x^{1/2}} \Big|_1^4 \\
 &= \frac{-2}{\sqrt{x}} \Big|_1^4 \\
 &= \left( \frac{-2}{\sqrt{4}} - \frac{-2}{\sqrt{1}} \right) \\
 &= \frac{-2}{2} - (-2) \\
 &= 2 - 1 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

**Exemple 2.13** Un exemple plus compliqué. Disons qu'on veut trouver  $\int_0^\pi 3x^2 - e^x + \cos(x) dx$ .

$$\int 3x^2 - e^x + \cos(x) dx = \underline{3 \int x^2 dx - \int e^x dx + \int \cos(x) dx = \frac{3x^3}{3} - e^x + \sin(x)}$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_0^\pi 3x^2 - e^x + \cos(x) dx &= (x^3 - e^x + \sin(x)) \Big|_0^\pi \\ &= (\pi^3 - e^\pi + \sin(\pi)) - (0^3 - e^0 + \sin(0)) \\ &= \pi^3 - e^\pi + 0 - 0 + 1 - 0 \\ &= \pi^3 - e^\pi + 1 \end{aligned}$$

## 3. SEMAINE 3 : 24 SEPTEMBRE 2018

## 3.1. Partie 1.

## 3.1.1. Rappel.

- (1) La somme de Riemann :  $\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i$   
 (2) L'intégrale définie :  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i$ .  
 (3) Théorème fondamental du calcul intégral : Si  $f(x)$  est une fonction continue sur un intervalle  $[a, b]$  et si  $F(x)$  est une primitive de  $f(x)$  alors

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$

- (4) L'intégrale indéfinie :  $\int f(x) dx = F(x) + c$ .  
 (5) La grande liste!

3.1.2. *Changement de variable*(§2.3 ou §2.2). Soit deux polynômes  $P(x)$  et  $Q(x)$ . Une fonction rationnelle est une fonction de la forme  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ . Rappelons que le degré d'un polynôme est le degré le plus élevé de ses termes. Si le degré du numérateur est inférieur au degré du dénominateur, on dit que la fonction est une fraction propre. Sinon, c'est une fraction impropre.

**Exemple 3.1** Lequelles sont propres ?

$$\begin{array}{ll} \frac{x^7 - x^6 + 2}{x^5 - 97} & \text{Non} \quad \frac{x^3 + 1}{x^3 + 2} & \text{Non} \\ \frac{x^2 + 99001}{x^3} & \text{Oui} \quad \frac{(x+1)(x^2-3)^3}{(x-8)(x^3+2)(x^2+x-1)^2} & \text{Oui} \end{array}$$

Si notre fraction n'est pas propre, on fait la division.

**Exemple 3.2** Soit

$$P(x) = 2x^6 - x^5 - x^4 + 3x - 3 \quad Q(x) = x^4 - x^3 \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x^6 - x^5 - x^4 + 3x - 3}{x^4 - x^3}$$

une fraction impropre. Faisons la division.

$$\begin{array}{r} 2x^6 - x^5 - x^4 + 3x - 3 \mid x^4 - x^3 \\ \underline{-(2x^6 - 2x^5)} \quad 2x^2 \\ x^5 - x^4 + 3x - 3 \mid + x \\ \underline{-(x^5 - x^4)} \quad \phantom{+ x} \\ 3x - 3 \end{array}$$

Alors

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x^6 - x^5 - x^4 + 3x - 3}{x^4 - x^3} = 2x^2 + x + \frac{3x - 3}{x^4 - x^3} = 2x^2 + x + \frac{3(x-1)}{x^3(x-1)} = 2x^2 + x + \frac{3}{x^3}$$

Et pourquoi on a fait ça ? Pour avoir une fonction plus facile pour faire l'intégration :

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^6 - x^5 - x^4 + 3x - 3}{x^4 - x^4} dx &= 2 \int x^2 dx + \int x dx + 3 \int \frac{1}{x^3} dx \\ &= 2 \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 3 \frac{1}{-2x^2} \\ &= \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x^{-2} \end{aligned}$$

Mais, on a encore un problème. Qu'est-ce qu'on peut faire avec une intégrale comme :  $\int (3x+2)^{7/9} dx$  ?

Avec les choses qu'on a vu, on a aucun moyen de faire cette intégrale. Heureusement, on peut appliquer une stratégie qui s'appelle un changement de variable.

On aimerait avoir quelque chose plus simple. Ça serait cool si on peut changer notre intégrale pour être :  $\int x^{7/9} dx$  parce que là, on sait ce qu'il faut faire. Alors, on va essayer de faire ça.

Mettons  $u = 3x+2$ . Alors, on a bien  $\int u^{7/9} dx$ . C'est quoi le problème ? La variable  
Have them write what they think the problem is.

Alors on va faire :

$$u = 3x + 2 \Rightarrow du = 3 dx \Rightarrow dx = \frac{du}{3}$$

et alors

$$\begin{aligned} \int (3x+2)^{7/9} dx &= \int u^{7/9} \frac{du}{3} \\ &= \frac{1}{3} \int u^{7/9} du \\ &= \frac{1}{3} \frac{u^{16/9}}{16/9} + c \\ &= \frac{9}{3 \cdot 16} u^{16/9} + c \\ &= \frac{3}{16} (3x+2)^{16/9} + c \end{aligned}$$

Et voilà, c'est fait ! Qu'est-ce qu'on a fait ?

- (1) Metter  $u = f(x)$
- (2) Faites les dérivées
- (3) Remplacer les variables
- (4) Faites l'intégrale
- (5) Re-remplacez les variables

À ton tour, essaye-le. Trouver l'intégrale indéfinie :  $\int x(7x^2 - 8)^{16/7} dx$

$$u = 7x^2 - 8 \Rightarrow du = 14x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{14x}$$

Alors

$$\begin{aligned}
 \int x(7x^2 - 8)^{16/7} dx &= \int x(u)^{16/7} dx \\
 &= \int x(u)^{16/7} \frac{du}{14x} \\
 &= \frac{1}{14} \int u^{16/7} du \\
 &= \frac{1}{14} \frac{u^{23/7}}{23/7} + c \\
 &= \frac{7}{14 * 23} u^{23/7} + c \\
 &= \frac{1}{46} u^{23/7} + c \\
 &= \frac{1}{46} (7x^2 - 8)^{\frac{23}{7}} + c
 \end{aligned}$$

Mais on a fait tout ça pour pouvoir calculer des intégrales définies! Alors, qu'est-ce que passe pour ça?

Trouvons l'intégrale définie :  $\int_2^4 \frac{2x-1}{x^2-x} dx$  Les changements de variable :

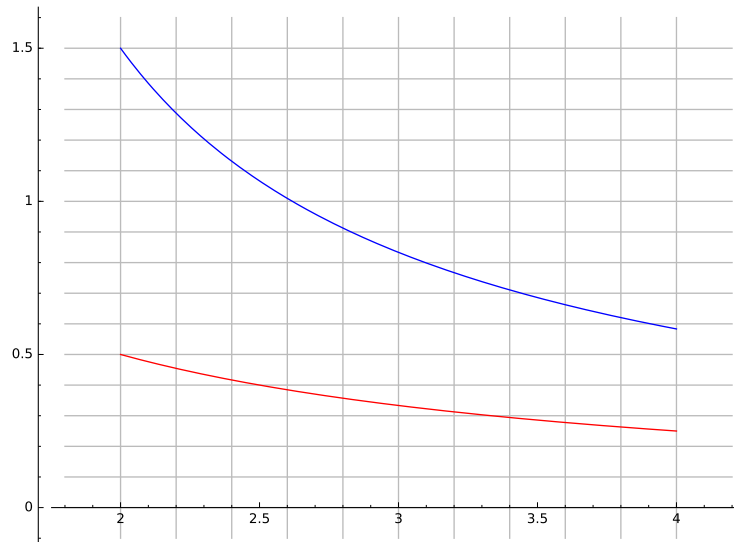
$$u = x^2 - x \Rightarrow du = (2x - 1) dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2x - 1}$$

Alors

$$\int_2^4 \frac{2x-1}{x^2-x} dx = \int_2^4 \frac{2x-1}{u} \frac{du}{2x-1} = \int_2^4 \frac{1}{u} du$$

Mais il y a encore un nouveau problème! **Les indices ne sont pas corrects.**

Regardons les deux fonctions ensemble. Celui de  $x$  en haut (bleue) et celui de  $u$  en bas (rouge).



Alors, on va faire comme on a fait avec le  $dx$ . Si  $x = 4$  alors  $u = x^2 - x = 4^2 - 4 = 16 - 4 = 12$ . Si  $x = 2$  alors  $u = 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2$ .

Alors

$$\begin{aligned} \int_2^4 \frac{2x-1}{x^2-x} dx &= \int_2^{12} \frac{1}{u} du \\ &= \ln(|u|) \Big|_2^{12} \\ &= \ln(12) - \ln(2) \\ &= \ln(12/2) = \ln(6) \end{aligned}$$

**Théorème 3.3** (Changement de variable dans une intégrale définie) Si  $g'(x)$  est une fonction continue sur l'intervalle  $[a, b]$  et si  $f(x)$  est une fonction continue qui admet une primitive sur l'intervalle couvrant les valeurs  $g(a)$  et  $g(b)$ , alors

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$$

Essayons quelque chose plus fun :  $\int \cotan(ax) dx$  pour  $a \in \mathbb{R}$ .

$$u = ax \Rightarrow dx = \frac{du}{a}$$

Alors

$$\int \cotan(ax) dx = \frac{1}{a} \int \cotan(u) du = \frac{1}{a} \int \frac{\cos(u)}{\sin(u)} du$$

Rappelons que  $\frac{d}{dx}(\sin(x)) = \cos(x)$  Alors

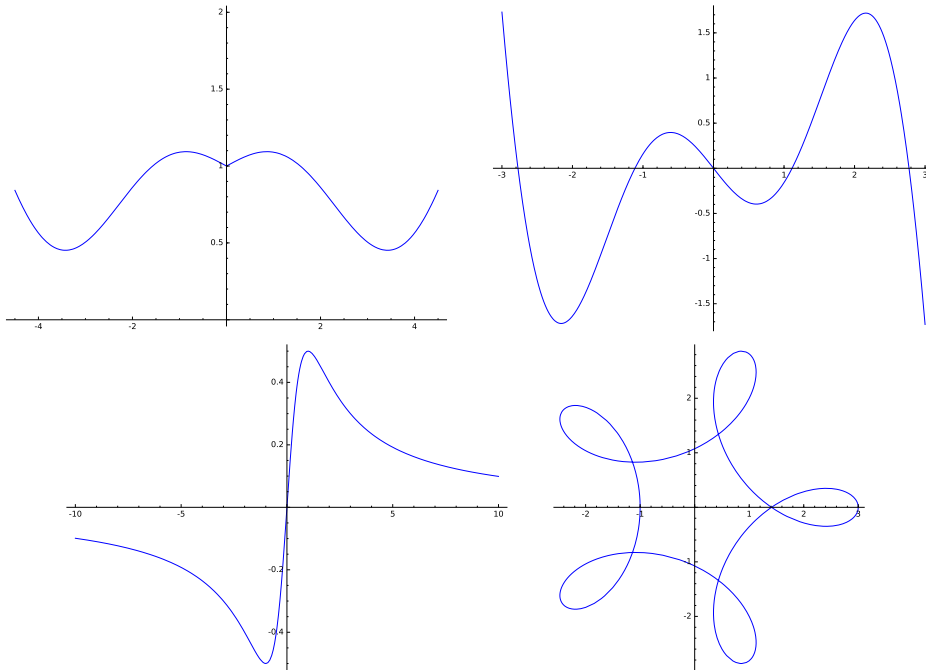
$$t = \sin(u) \Rightarrow du = \frac{dt}{\cos(u)}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \int \frac{\cos(u)}{\sin(u)} du &= \frac{1}{a} \int \frac{\cos(u)}{t} \frac{dt}{\cos(u)} \\ &= \frac{1}{a} \int \frac{1}{t} dt \\ &= \frac{1}{a} \ln(|t|) + c \\ &= \frac{1}{a} \ln(|\sin(u)|) + c \\ &= \frac{1}{a} \ln(|\sin(ax)|) + c \end{aligned}$$

## 3.2. Partie 2.

3.2.1. *Fonctions paires et impaires* (§2.3.3 ou -). On dit qu'une fonction  $f(x)$  est paire si  $f(-x) = f(x)$  et impaire si  $f(-x) = -f(x)$  Des exemples :



**Théorème 3.4** (Propriétés des fonctions paires et impaires) Si  $f_1(x)$  et  $f_2(x)$  sont des fonctions paires et si  $g_1(x)$  et  $g_2(x)$  sont des fonctions impaires, alors, là où les opérations sont définies :

- (1)  $f_1(x)f_2(x)$  et  $g_1(x)g_2(x)$  sont fonctions paire.
- (2)  $f_1(x)g_1(x)$  est une fonction impaire.
- (3)  $\int_{-a}^a f_1(x) dx = 2 \int_0^a f_1(x) dx$
- (4)  $\int_{-a}^a g_1(x) dx = 0$

*Démonstration.* On va montrer que

$$\int_{-a}^a f_1(x) dx = 2 \int_0^a f_1(x) dx$$

Soit une fonction paire  $f(x)$ . Par définition  $f(-x) = f(x)$ .

$$\begin{aligned}
 \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \\
 &= \int_a^0 f(-u) \frac{du}{-1} + \int_0^a f(x) dx \\
 &= - \int_a^0 f(u) du + \int_0^a f(x) dx \\
 &= \int_0^a f(u) du + \int_0^a f(x) dx \\
 &= \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \\
 &= 2 \int_0^a f(x) dx
 \end{aligned}$$

□

**Exemple 3.5**

$$\int_{-a}^a x^2 \sin(x) - x^7 + x \cos(x) dx = \underline{0}$$

3.2.2. *Complétion du carré* (§2.3.4 ou -). On va regarder les trois intégrales suivantes :

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \underline{\arcsin(x) + c} \\
 \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx &= \underline{\operatorname{arcsec}(|x|) + c} \\
 \int \frac{1}{1+x^2} dx &= \underline{\arctan(x) + c}
 \end{aligned}$$

Ils ont tous la forme :  $\pm 1 \pm x^2$ . Alors, on va trouver une façon de changer un polynôme  $ax^2 + bx + c$  en un polynôme de la forme  $\pm x^2 \pm 1$ . On appelle ça : complétion du carré. Cela consiste à transformer notre polynôme dans la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c &= a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \\
 &= a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) \\
 &= a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left( \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) \right)
 \end{aligned}$$

Mais, pour vrai, c'est trop difficile de mémoriser cette formule. La seule partie qu'il faut vraiment se rappeler est comment choisir notre  $\frac{b^2}{4a^2}$ . Et pour ça, c'est plus simple de commencer avec un exemple très facile :

**Exemple 3.6**

$$x^2 + bx$$

Ici, on a déjà que  $a = 1$  et  $c = 0$ , mais comme j'ai dit, on ne va pas regarder ça pour l'instant. On veut changer  $x^2 + bx$  en "un carré".

Donc, on va faire l'inverse. Supposons qu'on a :

$$(x + d)^2 = x^2 + 2dx + d^2$$

Ainsi, dans l'autre sens, il faut diviser notre  $b$  par 2 ce qui nous donne :

$$x^2 + bx = x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

**Exemple 3.7** Essayons avec des exemples réels :

$$x^2 + 8x = x^2 + 8x + 4^2 - 4^2 = (x + 4)^2 - 4^2$$

$$x^2 - 7x = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{-7}{2}\right)^2$$

$$2x^2 + 4x = 2\left((x + 1)^2 - 1^2\right)$$

$$3x^2 - 5x = 3\left(\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{-5}{6}\right)^2\right)$$

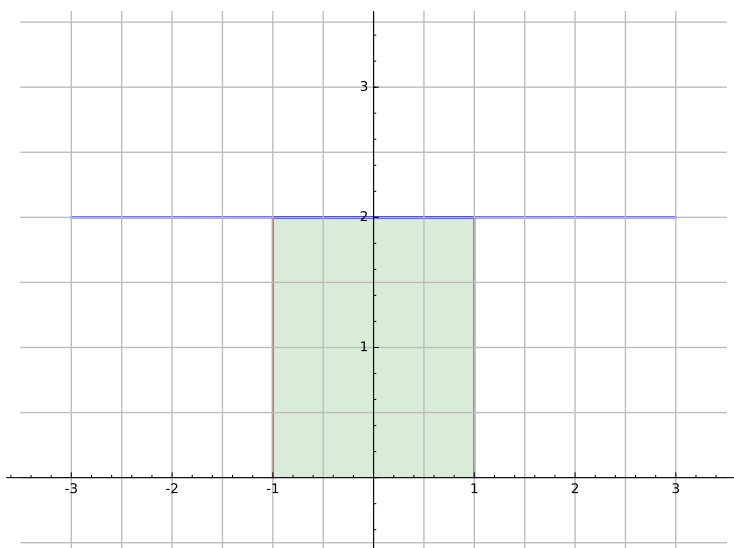
$$x^2 + 4x - 1 = (x + 2)^2 - 2^2 - 1 = (x + 2)^2 - 5$$

Alors, maintenant, on peut faire les intégrations qu'on voulait au début :

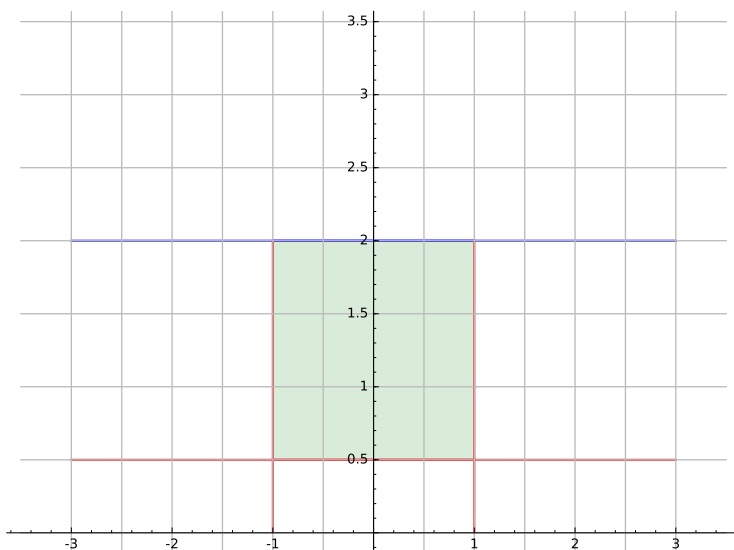
$$\int \frac{x + 2}{\sqrt{-2x^2 - 12x - 10}} dx$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+2}{\sqrt{-2x^2-12x-10}} dx &= \int \frac{x+2}{\sqrt{-2\left((x+3)^2-3^2+5\right)}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{x+2}{\sqrt{-(x+3)^2+4}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{x+2}{2\sqrt{1-\left(\frac{x+3}{2}\right)^2}} dx \quad u = (x+3)/2 \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{x+2}{\sqrt{1-u^2}} 2du \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{2u-1}{\sqrt{1-u^2}} du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} du + \frac{-1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du \quad 1-u^2 = v \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{u}{\sqrt{v}} \frac{dv}{-2u} + \frac{-1}{\sqrt{2}} \arcsin(u) + c \\
&= \frac{-1}{2\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{v}} dv - \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin(u) + c \\
&= \frac{-1}{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{v}}{2} + c - \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin(u) + c \\
&= \frac{-\sqrt{v}}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin(u) + c \\
&= \frac{-\sqrt{1-u^2}}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin(u) + c \\
&= \frac{-\sqrt{1-\left(\frac{x+3}{2}\right)^2}}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin\left(\frac{x+3}{2}\right) + c
\end{aligned}$$

3.2.3. *L'aire d'une surface plane (§3.1 ou §3.4).* Disons qu'on veut l'aire d'une surface comme une carrée



On veut utiliser l'intégration pour trouver l'aire. Depuis le début du cours, on sait déjà que  $\int_{-1}^1 2 \, dx$  va nous donner l'aire. Mais qu'est-ce qu'on peut faire si on change la taille de notre carrée ?

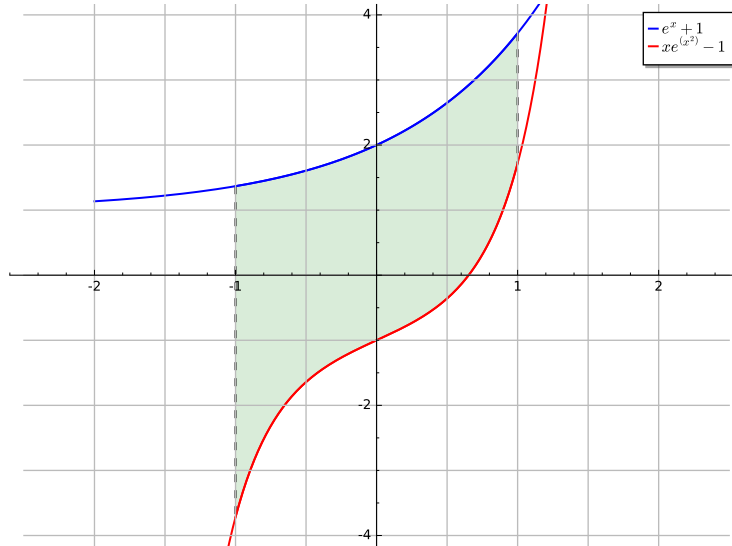


On peut le voir comme l'aire de la fonction en haut moins l'aire de la fonction en bas. C'est-à-dire

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 \left(2 - \frac{1}{2}\right) \, dx &= \int_{-1}^1 \frac{3}{2} \, dx \\
 &= \frac{3x}{2} \Big|_{-1}^1 \\
 &= \frac{3}{2} - \frac{-3}{2} \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

Mais ça c'était trop facile. Donc prenons quelque chose de plus difficile.

**Exemple 3.8** C'est quoi l'aire entre ces deux courbes ?



En bleu on a la fonction  $e^x + 1$  et en rouge on a la fonction  $xe^x - 1$ .

On va faire la même chose. On trouve l'aire sous la courbe du haut et on soustrait l'aire sous la courbe du bas.

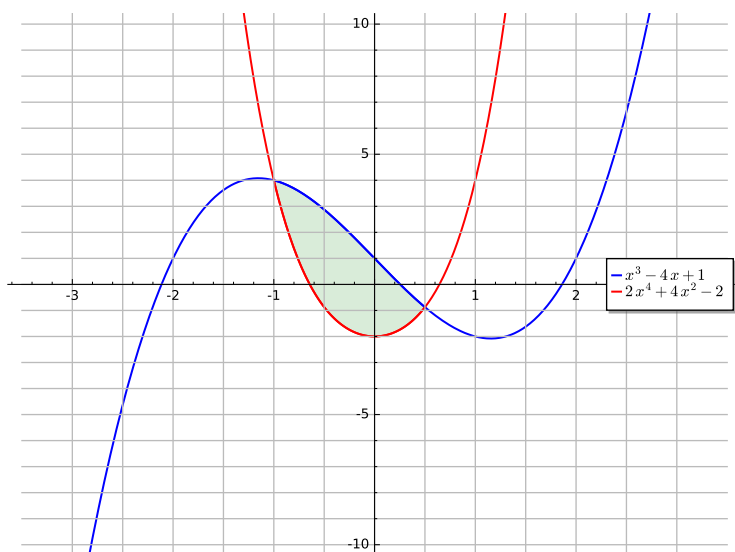
$$\int_{-1}^1 e^x + 1 - (xe^{(x^2)} - 1) dx = \int_{-1}^1 e^x - xe^{(x^2)} + 2 dx = \int_{-1}^1 e^x dx - \int_{-1}^1 xe^{(x^2)} dx + \int_{-1}^1 2 dx$$

Donc, on a

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 e^x dx &= e^x \Big|_{-1}^1 = e^1 - e^{-1} \\ \int_{-1}^1 2 dx &= 2x \Big|_{-1}^1 = 2 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) = 2 + 2 = 4 \\ \int_{-1}^1 xe^{(x^2)} dx &= u = x^2 \\ &= \int_{x=-1}^{x=1} \frac{e^u}{2} du \\ &= \frac{e^u}{2} \Big|_{x=-1}^{x=1} \\ &= \frac{e^{(x^2)}}{2} \Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{e^{(1^2)}}{2} - \frac{e^{(-1^2)}}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Alors l'aire est  $e^1 - e^{-1} + 4$ .

**Exemple 3.9** Faisons un autre exemple



Donc en bleue on a  $x^3 - 4x + 1$  et en rouge on a  $2x^4 + 4x^2 - 2$ . Si on veut l'aire du milieu il faut premièrement trouver où ces deux courbes intersectent.

Elles intersectent quand  $(2x^4 + 4x^2 - 2) - (x^3 - 4x + 1) = 0$ . Donc il faut trouver les racines de  $2x^4 - x^3 + 4x^2 + 4x - 3$ .

Ainsi, il faut utiliser les racines évidentes :  $p/q$  est une racine d'un polynôme  $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  si  $p|a_0$  et  $q|a_n$ . Alors, on sait que les racines doivent être dans l'ensemble :  $\{\pm 3, \pm 1, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{1}{2}\}$ .

Si on regarde notre image, ça nous donne des indices. Donc, on va voir si  $-1$  et  $\frac{1}{2}$  sont des racines.

$$\text{Si } x = -1 \Rightarrow 2 + 1 + 4 - 4 - 3 = 0$$

Alors oui,  $-1$  est une racine.

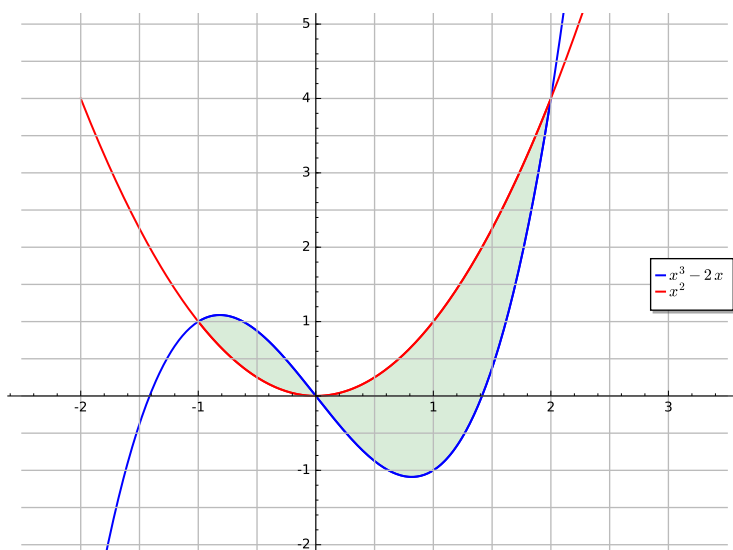
$$\text{Si } x = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{2^4} - \frac{1}{2^3} + \frac{2^2}{2^2} + \frac{2^2}{2} - \frac{3}{1} = \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^3} + 1 + 2 - 3 = 0$$

Ainsi oui,  $\frac{1}{2}$  est aussi une racine.

Alors, on peut maintenant trouver l'aire. Mais, il faut savoir quelle fonction on soustraite de l'autre. On peut voir que la bleue est au dessus donc, on fait

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (x^3 - 4x + 1) - (2x^4 + 4x^2 - 2) dx &= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} -2x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x + 3 dx \\
 &= \left. \frac{-2x^5}{5} + \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 3x \right|_{-1}^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left( \frac{-2}{5 \cdot 2^5} + \frac{1}{2^2 \cdot 2^4} - \frac{2^2}{3 \cdot 2^3} - \frac{2^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{3}{2} \right) \\
 &\quad - \left( \frac{-2 \cdot -1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{4 \cdot -1}{3} - \frac{4}{2} + 3 \cdot -1 \right) \\
 &= \frac{-2 \cdot 2 \cdot 3 + 5 \cdot 3 - 2^2 \cdot 2^3 \cdot 5 - 2^2 \cdot 2^3 \cdot 5 \cdot 3 + 3 \cdot 2^5 \cdot 5 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 2^6} \\
 &\quad - \frac{2 \cdot 4 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 4 \cdot 5 - 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 - 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5}{5 \cdot 4 \cdot 3} \\
 &= \frac{-12 + 15 - 160 - 480 + 1440}{3 \cdot 5 \cdot 2^6} - \frac{24 + 15 + 80 - 120 - 180}{3 \cdot 4 \cdot 5} \\
 &= \frac{803}{3 \cdot 5 \cdot 2^6} - \frac{-181}{3 \cdot 5 \cdot 2^2} \\
 &= \frac{803 + 181 \cdot 2^4}{3 \cdot 5 \cdot 2^6} \\
 &= \frac{803 + 2896}{3 \cdot 5 \cdot 2^6} \\
 &= \frac{3699}{3 \cdot 5 \cdot 2^6} \\
 &= \frac{1233}{5 \cdot 2^6} \\
 &= \frac{1233}{320}
 \end{aligned}$$

**Exemple 3.10** Un dernier exemple. Si on veut l'air dans les deux regions suivant :



Donc la première chose est de trouver où ça s'intersecte. Il faut trouver les solutions de  $x^3 - x^2 - 2x$ . On a

$$x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2) = x(x - 2)(x + 1)$$

Donc, on va trouver l'aire :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 x^3 - 2x - x^2 dx + \int_0^2 x^2 - x^3 + 2x dx &= \left. \frac{x^4}{4} - \frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right|_{-1}^0 + \left. \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{2x^2}{2} \right|_0^2 \\ &= - \left( \frac{(-1)^4}{4} - (-1)^2 - \frac{(-1)^3}{3} \right) + \left( \frac{2^3}{3} - \frac{2^4}{2^2} + 2^2 \right) \\ &= - \left( \frac{1}{4} - 1 + \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{8}{3} - 4 + 4 \right) \\ &= \frac{-1}{4} + 1 + \frac{-1}{3} + \frac{8}{3} \\ &= \frac{-3 + 12 - 4 + 32}{12} \\ &= \frac{37}{12} \end{aligned}$$

## 4. SEMAINE 4 : 15 OCTOBRE 2018

## 4.1. Partie 1.

## 4.1.1. Rappel.

## (1) Substitution

4.1.2. *Intégration par parties* (§2.4 ou §4.1). Disons que  $f(x) = u$  et  $g(x) = v$ . Alors  $d(uv) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x) = u dv + v du$ . Donc, on peut avoir  $\int_a^b d(uv) = \int_a^b u dv + \int_a^b v du$ . Ça nous donne :

$$\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du$$

La version indéfinie est donnée par :

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Une intégration utilisant la propriété a-dessus est une intégration par parties. Faisons des exemples.

**Exemples 4.1** (1)  $\int (e^x)^2 dx = ?$

$$u = e^x \quad dv = e^x dx$$

$$du = e^x dx \quad v = e^x$$

$$\int (e^x)^2 dx = (e^x)^2 - \int (e^x)(e^x dx)$$

$$2 \int (e^x)^2 dx = (e^x)^2$$

$$\int (e^x)^2 dx = \frac{(e^x)^2}{2} + c$$

(2)  $\int x \cos(x) dx =$

$$u = x \cos(x) \quad dv = dx$$

$$du = \cos(x) - x \sin(x) dx \quad v = x$$

$$\int x \cos(x) dx = x(x \cos(x)) - \int x(\cos(x) - x \sin(x)) dx$$

$$u = x \quad dv = \cos(x) dx$$

$$du = dx \quad v = \sin(x)$$

$$\begin{aligned} \int x \cos(x) dx &= x \sin(x) - \int \sin(x) dx \\ &= x \sin(x) + \cos(x) + c \end{aligned}$$

$$(3) \int x^2 \sin(x) dx =$$

$$u = x^2 \quad dv = \sin(x) dx$$

$$du = 2x dx \quad v = -\cos(x)$$

$$\int x^2 \sin(x) dx = -x^2 \cos(x) - \int -2x \cos(x) dx$$

$$= -x^2 \cos(x) + 2 \int x \cos(x) dx$$

$$u = x \quad dv = \cos(x) dx$$

$$du = dx \quad v = \sin(x)$$

$$= -x^2 \cos(x) + 2 \left( x \sin(x) - \int \sin(x) dx \right)$$

$$= -x^2 \cos(x) + 2x \sin(x) + 2 \cos(x) + c$$

$$(4) \int e^x \sin(x) dx =$$

$$u = \sin(x) \quad dv = e^x dx$$

$$du = \cos(x) dx \quad v = e^x$$

$$\int e^x \sin(x) dx = \sin(x)e^x - \int e^x \cos(x) dx$$

$$u = \cos(x) \quad dv = e^x dx$$

$$du = -\sin(x) dx \quad v = e^x$$

$$= \sin(x)e^x - \left( \cos(x)e^x - \int -e^x \sin(x) dx \right)$$

$$= (\sin(x) - \cos(x)) e^x + \int \sin(x)e^x dx$$

$$2 \int e^x \sin(x) dx = (\sin(x) - \cos(x)) e^x$$

$$\int e^x \sin(x) dx = \frac{(\sin(x) - \cos(x)) e^x}{2}$$

Des indices : Supposons qu'on a  $\int f(x)g(x) dx$ . Si  $f(x)$  est un polynôme, on veut toujours essayer avec  $u = f(x)$  et  $dv = g(x) dx$ . Si  $f(x)$  est une exponentielle et  $g(x)$  une fonction trigonométrique, on peut choisir n'importe laquelle pour  $u$  et l'autre pour  $dv$ .

#### Aide mémoire

L Log

I Inverse fonction trigonométrique -arcin

A Algèbre (= polynôme)

T Trigonométrie

E Exponentielle

4.1.3. *Intégration de fonctions trigonométriques (§2.5 ou §4.2).* Des fois, il faut utiliser des identités trigonométriques pour faciliter les intégrales. Voici une liste qui peut t'aider :

- (1)  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- (2)  $1 + \tan^2(x) = \underline{\sec^2(x)}$
- (3)  $1 + \cot^2(x) = \underline{\csc^2(x)}$
- (4)  $\sin(x) \cos(y) = \frac{1}{2} (\sin(x - y) + \sin(x + y))$
- (5)  $\sin(x) \sin(y) = \frac{1}{2} (\cos(x - y) - \cos(x + y))$
- (6)  $\cos(x) \cos(y) = \frac{1}{2} (\cos(x - y) + \cos(x + y))$
- (7)  $\sin(x \pm y) = \underline{\sin(x) \cos(y) \pm \sin(y) \cos(x)}$
- (8)  $\cos(x \pm y) = \underline{\cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y)}$

On peut utiliser cette liste pour avoir des identités plus simple :

- (1)  $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$
- (2)  $\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$
- (3)  $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$

Pourquoi ça nous aide ?

**Exemple 4.2** Essayons de trouver l'intégrale :  $\int \sin(32x) \cos(3501x) dx$ . Utilisons l'intégration par parties !

$$\begin{aligned} u &= \sin(32x) & dv &= \cos(3501x) dx \\ du &= \cos(32x) & v &= \frac{\sin(3501x)}{3501} \end{aligned}$$

$$\int \sin(32x) \cos(3501x) dx = \underline{\frac{\sin(32x) \sin(3501x)}{3501} + c - \int \frac{\sin(3501x)}{3501} \cos(32x) dx}$$

On a le même problème ! Rien a changé. ☹ Alors on va utiliser une identité trigonométrique.

$$\begin{aligned} \sin(32x) \cos(3501x) &= \frac{1}{2} (\sin(32x - 3501x) + \sin(32x + 3501x)) = \underline{\frac{\sin(-3469x)}{2} + \frac{\sin(3533x)}{2}} \\ \int \sin(32x) \cos(3501x) dx &= \underline{\int \frac{\sin(-3469x)}{2} dx + \int \frac{\sin(3533x)}{2} dx} \\ &= \frac{-\cos(-3469x)}{2 * -3469} + \frac{-\cos(3533x)}{2 * 3533} + c \\ &= \frac{\cos(-3469x)}{6938} + \frac{-\cos(3533x)}{7066} + c \end{aligned}$$

4.1.4. *Les intégrales du type  $\int \sin^m(x) \cos^n(x) dx$  (§2.5.2 ou §4.2).* Supposons qu'on a l'intégrale :  $\int \sin^m(x) \cos^n(x) dx$ . On a plusieurs astuces pour trouver une primitive.

- (1) Si  $m$  ou  $n$  est impair, on a un moyen pour la trouver. Supposons  $m = 2k + 1$ .  
On peut utiliser l'intégration par substitution !

$$\begin{aligned}
 u &= \cos(x) & du &= -\sin(x) dx \\
 \int \sin^m(x) \cos^n(x) dx &= \int \sin^{2k+1}(x) u^n \frac{du}{-\sin(x)} \\
 &= - \int \sin^{2k}(x) u^n du \\
 &= - \int (\sin^2(x))^k u^n du \\
 &= - \int (1 - \cos^2(x))^k u^n du \\
 &= - \int (1 - u^2)^k u^n du
 \end{aligned}$$

Alors essayons ça dans un vrai exemple :  $\int \cos^5(x) \sin^2(x) dx$ . On a  $5 = 2 \cdot 2 + 1$ , donc impair !

$$\begin{aligned}
 u &= \sin(x) & du &= \cos(x) dx \\
 \int \cos^5(x) \sin^2(x) dx &= \int \cos^{(2 \cdot 2 + 1)}(x) u^2 \frac{du}{\cos(x)} \\
 &= \int (\cos^2(x))^2 u^2 du \\
 &= \int (1 - \sin^2(x))^2 u^2 du \\
 &= \int (1 - u^2)^2 u^2 du \\
 &= \int (1 - 2u^2 + u^4) u^2 du \\
 &= \int u^2 - 2u^4 + u^6 du \\
 &= \int u^2 du - 2 \int u^4 du + \int u^6 du \\
 &= \frac{u^3}{3} - 2 \frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + c \\
 &= \frac{\sin^3(x)}{3} - \frac{2 \sin^5(x)}{5} + \frac{\sin^7(x)}{7} + c
 \end{aligned}$$

Et quelque chose plus difficile :  $\int \sin^3(x) \cos^{(-3/7)}(x) dx$  On a vu :

$$\begin{aligned}
 u &= \cos(x) & du &= -\sin(x) dx \\
 \int \sin^3(x) \cos^{(-3/7)}(x) dx &= - \int (1 - u^2) u^{(-3/7)} du \\
 &= - \int u^{-3/7} du + \int u^{11/7} du \\
 &= -\frac{u^{4/7}}{4/7} + \frac{u^{18/7}}{18/7} + c \\
 &= \frac{7(\cos(x))^{18/7}}{18} - \frac{7(\cos(x))^{4/7}}{4} + c
 \end{aligned}$$

#### 4.2. Partie 2.

(2) Si  $m$  et  $n$  sont pairs et non négatifs. On va utiliser les trois propriétés qu'on a vu avant :

$$(a) \sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$(b) \cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$(c) \sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

En utilisant ces formules, on fait des manipulations pour diminuer au max le degré.

**Exemple 4.3** Faisons l'exemple :  $\int \sin^4(x) \cos^2(x) dx$

$$\begin{aligned}
 \int \sin^4(x) \cos^2(x) dx &= \int \underbrace{(\sin^2(x))(\sin(x) \cos(x))^2}_{\substack{\text{formule (c)} \\ \text{formule (a)}}} dx \\
 &= \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} \cdot \left(\frac{\sin(2x)}{2}\right)^2 dx \\
 &= \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} \cdot \frac{\sin^2(2x)}{4} dx \\
 &= \int \frac{\sin^2(2x)}{8} - \frac{\sin^2(2x) \cos(2x)}{8} dx \\
 &= \frac{1}{8} \int \frac{1 - \cos(4x)}{2} dx - \frac{1}{8} \int \sin^2(2x) \cos(2x) dx \\
 &= \frac{1}{16} \left( \int 1 dx - \int \cos(4x) dx \right) - \frac{1}{8} \int \sin^2(2x) \cos(2x) dx \\
 &= \frac{x}{16} - \frac{\sin(4x)}{64} + c - \frac{1}{8} \int \sin^2(2x) \cos(2x) dx
 \end{aligned}$$

Alors il faut résoudre  $\int \sin^2(2x) \cos(2x) dx$

$$u = \sin(2x) \quad du = 2 \cos(2x) dx$$

$$\begin{aligned} \int \sin^2(2x) \cos(2x) dx &= \int \frac{u^2 \cos(2x) du}{2 \cos(2x)} \\ &= \int \frac{u^2}{2} du \\ &= \frac{u^3}{6} + c \\ &= \frac{\sin^3(2x)}{6} + c \end{aligned}$$

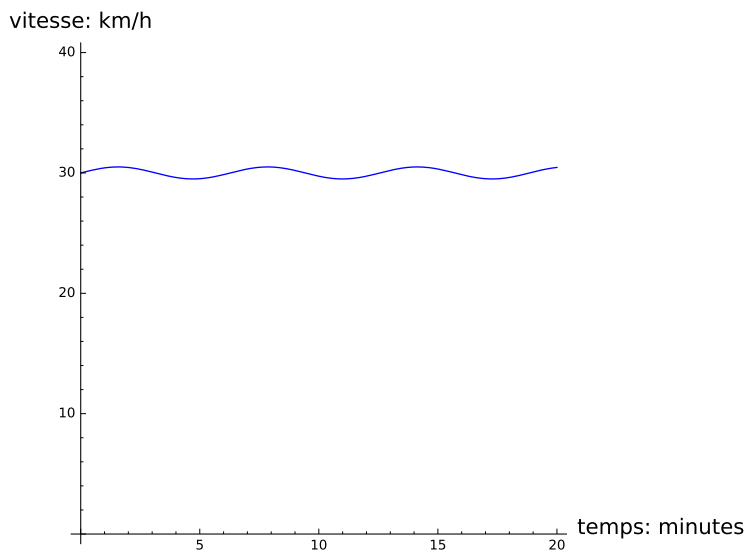
Alors, on a

$$\begin{aligned} \int \sin^4(x) \cos^2(x) dx &= \frac{x}{16} - \frac{\sin(4x)}{64} + c - \frac{1}{8} \int \sin^2(2x) \cos(2x) dx \\ &= \frac{x}{16} - \frac{\sin(4x)}{64} + c - \frac{1}{8} \left( \frac{\sin^3(2x)}{6} \right) \\ &= \frac{x}{16} - \frac{\sin(4x)}{64} - \frac{\sin^3(2x)}{48} + c \end{aligned}$$

#### 4.2.1. Applications en physique (- ou §3.5).

##### (1) Accélération, vitesse et déplacement

Dans le cours de calcul différentiel, tu as probablement appris qu'il y a un lien entre l'accélération, la vitesse et le déplacement d'un objet. En effet, si on sait la distance qu'un objet à déplacer pendant un intervalle du temps, on peut trouver sa vitesse et sa accélération. Mais on peut utiliser l'intégrale pour aller dans l'autre sens. Supposons que tu es en train de conduire et ta vitesse est donnée par  $\sin(x)/2 + 30$  :



Donc, ça veut dire que à un chaque instant ton pied est sur l'accélérateur ou non. Pour voir l'accélération à un moment donné, on peut calculer la

derivée pour trouver notre accélération :

$$\frac{d\left(\frac{\sin(x)}{2} + 30\right)}{dx} = \frac{\cos(x)}{2}$$

Mais, si on veut connaître la distance qu'on a parcouré il faut faire l'intégration !

Donc disons que on a conduit pendant 25 minutes, alors, pour calculer la distance parcouré il suffit de faire l'intégrale :

$$\int_0^{25} \frac{\sin(x)}{2} + 30 dx = -\frac{\cos(x)}{2} + 30x \Big|_0^{25} = -\frac{\cos(25)}{2} + 30 * 25 - \frac{-\cos(0)}{2} + 0 \approx 750$$

Mais, ça nous donne pas la bonne réponse ! Il faut diviser par 60 parce que l'axe vertical est en "heures" et l'axe horizontal est en "minutes". Donc on a

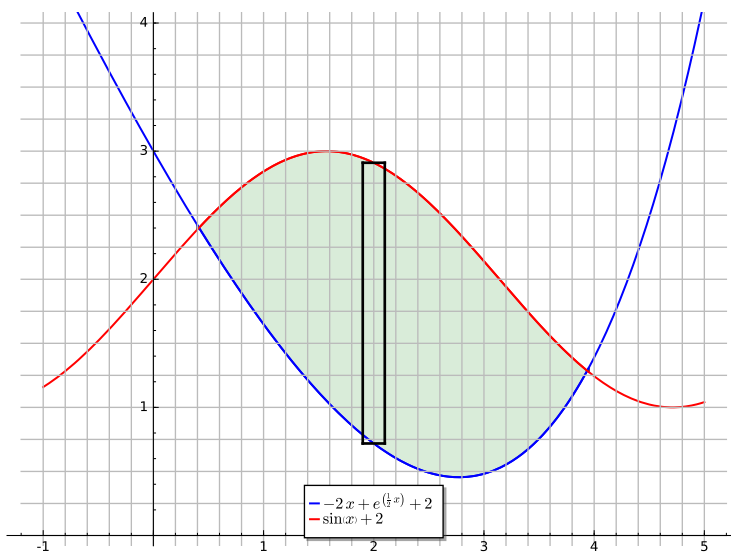
$$\frac{750}{60} = \frac{25}{2} = 12.5 \text{ km}$$

## (2) Centre de gravité

Le *moment* d'un objet mesure la tendance à tourner autour d'un axe. Les moments par rapport aux axes  $x$  et  $y$  sont donnés par :

$$M_x = \bar{y}A \quad M_y = \bar{x}A$$

où  $(\bar{x}, \bar{y})$  est le *centre de gravité* de la surface et  $A$  est l'aire. Alors, comment est-ce qu'on peut trouver les moments ?



Ici, le centre de gravité pour la petite boîte est donné par  $\left(x_i, \frac{f(x_i) + g(x_i)}{2}\right)$ .  
Donc

$$M_{x_i} = \bar{y}_i A_i = \left(\frac{f(x_i) + g(x_i)}{2}\right) ((f(x_i) - g(x_i)) \Delta x_i)$$

Alors, on peut faire

$$M_x = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{f(x_i)^2 - g(x_i)^2}{2} \Delta x_i = \int_a^b \frac{f(x)^2 - g(x)^2}{2} dx$$

Dans l'autre sens

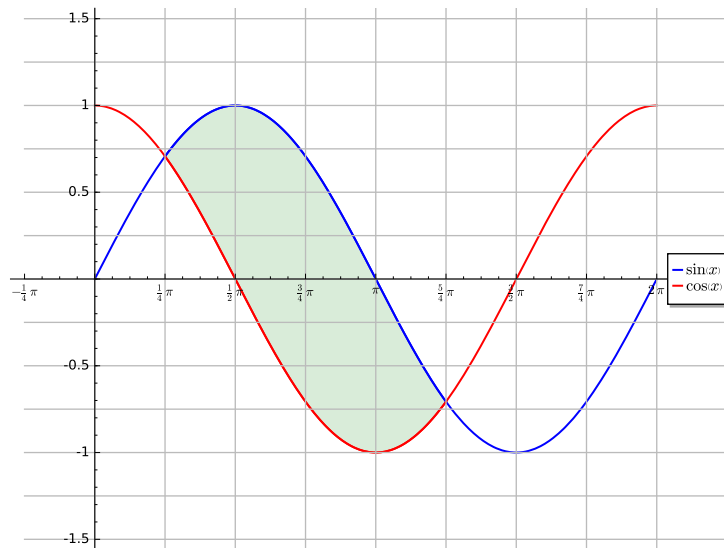
$$M_{y_i} = \bar{x}_i A_i = x_i (f(x_i) - g(x_i)) \Delta x_i$$

Donc,

$$M_y = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n x_i (f(x_i) - g(x_i)) \Delta x_i = \int_a^b x f(x) - x g(x) dx$$

**Exemple 4.4** Alors, faisons un exemple pour trouver le centre de gravité entre deux fonctions. Posons

$$f(x) = \sin(x) \quad g(x) = \cos(x)$$



Donc, pour trouver le centre de gravité on a les formules :

$$M_x = \bar{y}A \quad M_y = \bar{x}A$$

Alors il faut trouver  $A$ ,  $M_x$ , et  $M_y$ .

$$\begin{aligned} A &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin(x) - \cos(x) \, dx \\ &= -\cos(x) - \sin(x) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \\ &= -\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) + \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= -\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{-\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{\sin^2(x) - \cos^2(x)}{2} \, dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_y &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} x \sin(x) - x \cos(x) \, dx \\ &= \frac{3\pi\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Donc

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{\frac{3\pi\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{3\pi}{4} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{A} = 0$$

## 5. SEMAINE 5 : 22 OCTOBRE 2018

Devoir 1 - Date d'échéance

## 5.1. Partie 1.

## 5.1.1. Rappel.

- (1) Par Parties  $vu - vdu$
- (2) LIATE
- (3) Substitutions trigonométriques

5.1.2. *Sécantes, cosécantes, tangentes, cotangentes!* (§2.5.3 ou §4.2). Commençons avec  $\int \tan^n(ax) dx$  où  $n \geq 1$ . En général on a

$$\begin{aligned} \int \tan^n(ax) dx &= \int \tan^2(ax) \tan^{n-2}(ax) dx \\ &= \int (\sec^2(ax) - 1) \tan^{n-2}(ax) dx \\ &= \int \sec^2(ax) \tan^{n-2}(ax) dx - \int \tan^{n-2}(ax) dx \end{aligned}$$

Cette intégrale n'a pas l'air plus simple que celle d'avant. Alors, on va essayer d'utiliser les méthodes qu'on a déjà vu dans le cours : substitution et par parties. Commençons avec la substitution. Posons  $u = \tan(ax)$ , alors  $du = a \sec^2(ax) dx$ . D'où

$$\begin{aligned} \int \sec^2(ax) \tan^{n-2}(ax) dx - \int \tan^{n-2}(ax) dx &= \int \sec^2(ax) u^{n-2} \frac{du}{a \sec^2(ax)} - \int \tan^{n-2}(ax) dx \\ &= \frac{1}{a} \int u^{n-2} du - \int \tan^{n-2}(ax) dx \\ &= \frac{u^{n-1}}{a(n-1)} + c - \int \tan^{n-2}(ax) dx \\ &= \frac{\tan^{n-1}(ax)}{a(n-1)} + c - \int \tan^{n-2}(ax) dx \end{aligned}$$

Alors

$$\int \tan^n(ax) dx = \frac{\tan^{n-1}(ax)}{a(n-1)} - \int \tan^{n-2}(ax) dx + c$$

qui est beaucoup mieux!

**Exemple 5.1** Faisons ça avec un exemple :  $\int \tan^5(2x) dx$ .

$$\begin{aligned}
 \int \tan^5(2x) dx &= \int \tan^3(2x) \tan^2(2x) dx \\
 &= \int \tan^3(2x) (\sec^2(2x) - 1) dx \\
 &= \int \tan^3(2x) \sec^2(2x) dx - \int \tan^3(2x) dx \\
 u &= \tan(2x) \quad du = 2 \sec^2(2x) dx \\
 &= \int u^3 \sec^2(2x) \frac{du}{2 \sec^2(2x)} - \int \tan^3(2x) dx \\
 &= \int \frac{u^3}{2} du - \int \tan(2x) \tan^2(2x) dx \\
 &= \int \frac{u^3}{2} du - \int \tan(2x) (\sec^2(2x) - 1) dx \\
 &= \int \frac{u^3}{2} du - \int \tan(2x) \sec^2(2x) dx + \int \tan(2x) dx \\
 &= \int \frac{u^3}{2} du - \int u \sec^2(2x) \frac{du}{2 \sec^2(2x)} + \int \tan(2x) dx \\
 &= \int \frac{u^3}{2} du - \int \frac{u}{2} du + \int \tan(2x) dx \\
 &= \frac{u^4}{2 \cdot 4} - \frac{u^2}{2 \cdot 2} + \frac{\ln(|\sec(2x)|)}{2} + c \\
 &= \frac{\tan^4(2x)}{8} - \frac{\tan^2(2x)}{4} + \frac{\ln(|\sec(2x)|)}{2} + c
 \end{aligned}$$

Ou, plus facilement :

$$\begin{aligned}
 \int \tan^5(2x) dx &= \frac{\tan^{5-1}(2x)}{2(5-1)} - \int \tan^{5-2}(2x) dx + c \\
 &= \frac{\tan^4(2x)}{2(4)} - \left( \frac{\tan^{3-1}(2x)}{2(3-1)} - \int \tan^{3-2}(2x) dx \right) \\
 &= \frac{\tan^4(2x)}{8} - \frac{\tan^2(2x)}{4} - \frac{\ln(|\sec(2x)|)}{2} + c
 \end{aligned}$$

On peut utiliser une stratégie similaire pour la sécante :  $\int \sec^n(ax) dx$ .

**Exemple 5.2** Faisons  $\int \sec^8(x) dx$

$$\begin{aligned}
 \int \sec^8(x) dx &= \int \sec^2(x) \sec^6(x) dx \\
 &= \int \sec^2(x) (\tan^2(x) + 1)^3 dx \\
 u = \tan(x) \quad du &= \sec^2(x) dx \\
 &= \int \sec^2(x) (u^2 + 1)^3 \frac{du}{\sec^2(x)} \\
 &= \int (u^2 + 1)^3 du \\
 &= \int u^6 + 3u^4 + 3u^2 + 1 \\
 &= \frac{u^7}{7} + \frac{3u^5}{5} + \frac{3u^3}{3} + u + c \\
 &= \frac{\tan^7(x)}{7} + \frac{3 \tan^5(x)}{5} + \tan^3(x) + \tan(x) + c
 \end{aligned}$$

Cette méthode ne marche que quand  $n$  est pair. Si  $n$  est impair, il faut utiliser la formule de l'intégration par parties.

5.1.3. *Intégration par substitution trigonométrique (§2.6 ou §4.3).* L'idée maintenant est de trouver une façon d'intégrer les intégrales comme :  $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ . Pour l'instant aucune méthode nous donne une façon facile pour le faire. Par contre, on peut utiliser les identités trigonométriques pour les résoudre.

**Exemple 5.3** Si on a  $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$  on va utiliser le fait que  $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$  pour résoudre cette intégrale. Comment ça nous aide ? Parce que, on peut jouer avec la formule !

$$a^2 \cos(x)^2 = a^2 - a^2 \sin(x)^2 \Rightarrow \sqrt{a^2 \cos(x)^2} = a \cos(x)$$

En particulier,  $\cos(x)^2 = 1 - \sin(x)^2$ , donc si on remplace  $x$  par  $a \sin(\theta)$  on aura quelque chose plus de simple.

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2(\theta)} = a \sqrt{1 - \sin^2(\theta)} = a \cos(\theta).$$

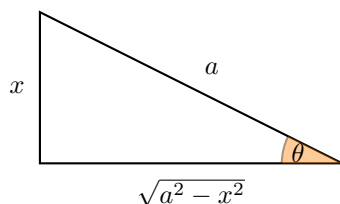
Prenons la dérivée, on a  $dx = a \cos(\theta) d\theta$  ! Donc,  $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int a^2 \cos^2(\theta) d\theta$ .

Et de là on a déjà vu comment faire ça :

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int a^2 \cos^2(\theta) d\theta \\
 &= \frac{a^2}{2} \int 1 + \cos(2\theta) d\theta \\
 &= \frac{a^2}{2} \theta + \frac{1}{2} \sin(2\theta) + c.
 \end{aligned}$$

MAIS ! On a un autre problème maintenant. On veut la formule avec les  $x$ . Alors, il faut trouver ce que vaut  $\theta$  et  $\sin(2\theta)$  en fonction  $x$ .

Si  $x = a \sin(\theta)$  alors  $\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) = \theta$ . Pour  $\sin 2\theta$  on a  $\sin(2\theta) = 2 \sin(\theta) \cos(\theta)$ . En utilisant le triangle :



on a  $\sin(\theta) = \frac{x}{a}$  et  $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$ . Alors,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \frac{a^2}{2} \theta + \frac{1}{2} \sin(2\theta) + c \\ &= \frac{a^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{x}{a} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} + c \\ &= \frac{a^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + c. \end{aligned}$$

Mais on a plusieurs identités qu'on peut utiliser pour nous aider !

$$\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1 \quad 1 + \tan(x)^2 = \sec(x)^2$$

Pour chaque cas on utilise une substitution différente :

$a^2 - x^2$	$x = \underline{a \sin(\theta)}$	$\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$a^2 + x^2$	$x = \underline{a \tan(\theta)}$	$\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
$x^2 - a^2$	$x = \underline{a \sec(\theta)}$	$\begin{cases} \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[ & \text{pour } x \geq a \\ \theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right] & \text{pour } x \leq -a \end{cases}$

Faisons quelques exemples.

**Exemples 5.4** (1)  $\int (25 + (x-3)^2)^{-3/2} dx$

La formule  $25 + (x-3)^2$  est comme  $1 + x^2$ , alors on va utiliser  $x = \underline{a \tan(\theta)}$  comme substitution.

$$\begin{aligned} x - 3 &= \underline{5 \tan(\theta)} \Rightarrow dx = \underline{5 \sec^2(\theta) d\theta} \\ \int (25 + (x-3)^2)^{-3/2} dx &= \int (25 + 25 \tan^2(\theta))^{-3/2} \underline{5 \sec^2(\theta) d\theta} \\ &= \int (25)^{-3/2} (1 + \tan^2(\theta))^{-3/2} \underline{5 \sec^2(\theta) d\theta} \\ &= \int \frac{5 \sec^2(\theta)}{5^3 (\sec^2(\theta))^{3/2}} d\theta \\ &= \int \frac{1}{5^2 \sec(\theta)} d\theta \\ &= \frac{1}{25} \int \cos(\theta) d\theta \\ &= \frac{\sin(\theta)}{25} + c \\ &= \frac{x-3}{\underline{25\sqrt{(x-3)^2 + 25}}} + c \end{aligned}$$

$$(2) \int \frac{1}{x\sqrt{2x^2-16}} dx$$

Disons que  $\sqrt{2}x > 4$  et alors  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$

$$\sqrt{2}x = 4 \sec(\theta) \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{8} \sec(\theta) \tan(\theta) d\theta}{4}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x\sqrt{2x^2-16}} dx &= \int \frac{\sqrt{8} \sec(\theta) \tan(\theta)}{\sqrt{8} \sec(\theta) \sqrt{16 \sec^2(\theta) - 16}} d\theta \\ &= \int \frac{\tan(\theta)}{4\sqrt{\sec^2(\theta) - 1}} d\theta \\ &= \int \frac{\tan(\theta)}{4\sqrt{\tan^2(\theta)}} d\theta \quad \theta \in [0, \pi/2] \\ &= \int \frac{\tan(\theta)}{4 \tan(\theta)} d\theta \\ &= \frac{1}{4} \theta + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{8}}{x}\right) &\Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{8}}{x}\right) \\ &= \frac{1}{4} \arccos\left(\frac{\sqrt{8}}{x}\right) + c \end{aligned}$$

## 5.2. Partie 2.

5.2.1. *Intégration d'expressions comportant des fonctions quadratiques (§2.7 ou §4.3).* On a déjà tous les outils nécessaires pour intégrer les fonctions qui contiennent  $ax^2 + bx + c$  (n'importe où).

Rappelons comment compléter le carré.

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) \\ &= a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left( \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) \right) \end{aligned}$$

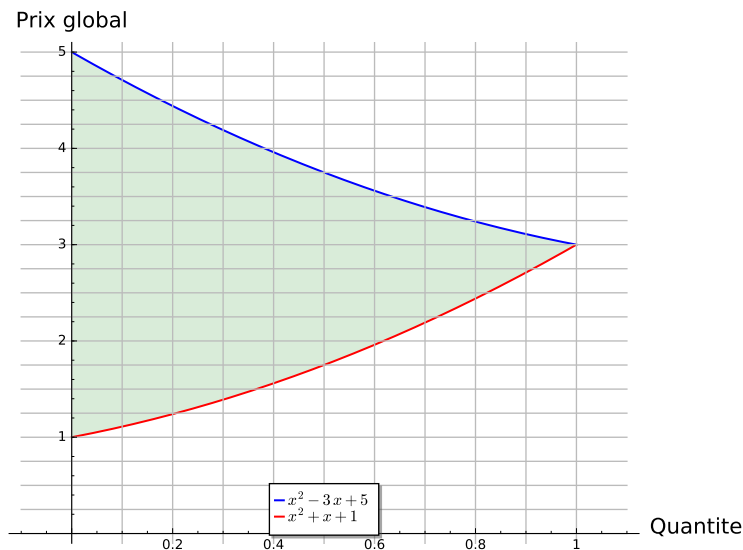
D'ici, on peut utiliser les méthodes précédentes pour trouver l'intégrale.

**Exemple 5.5** Faisons un exemple :  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-6x+14}} dx$ .

$$\begin{aligned}
 x^2 - 6x + 14 &= x^2 - 6x + 9 - 9 + 14 = (x - 3)^2 + 5 \\
 \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 6x + 14}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{(x - 3)^2 + 5}} dx \\
 &\Rightarrow x - 3 = \sqrt{5} \tan(\theta) \Rightarrow dx = \sqrt{5} \sec^2(\theta) d\theta \\
 \therefore &= \int \frac{\sqrt{5} \sec^2(\theta)}{\sqrt{5 \tan^2(\theta) + 5}} d\theta \\
 &= \int \frac{\sqrt{5} \sec^2(\theta)}{\sqrt{5} \sqrt{\tan^2(\theta) + 1}} d\theta \\
 &= \int \frac{\sec^2(\theta)}{\sqrt{\sec^2(\theta)}} d\theta \\
 &= \int \sec(\theta) d\theta \\
 &= \ln(|\sec(\theta) + \tan(\theta)|) + c \\
 &= \ln \left( \left| \frac{\sqrt{(x-3)^2 + 5}}{\sqrt{5}} + \frac{x-3}{\sqrt{5}} \right| \right) + c
 \end{aligned}$$

5.2.2. Applications en économie (§3.1 ou §3.5).

(1) **Surplus du consommateur et surplus du producteur :**



La *demande* est la quantité demandée selon le prix. Quand le prix diminue, la publique veut en acheter plus, alors la quantité demandée augmente. L'*offre* est la quantité offert selon le prix. Si le prix augmente, le/lau vendeur/vendeuse veut vendre plus, alors la quantité offerte augmente aussi. Donc la courbe du haut  $D(x)$  est la fonction de demande et le courbe en bas  $O(x)$  est la fonction d'offre.

Le *surplus du consommateur*  $SC$  représente l'économie que l'ensemble des consommateurs ont pu réaliser en achetant l'article au prix courant plutôt qu'à un prix plus élevé qu'ils étaient prêts à payer. Le *surplus du producteur*  $SP$  est le montant supplémentaire que l'ensemble des producteurs ont pu amasser en vendant le produit au prix courant plutôt qu'à un prix moindre qu'ils étaient prêts à accepter. **Dessiner the SC and the SP**

Le *surplus total*  $ST$  est la somme du surplus du consommateur et du surplus du producteur. Ça veut dire que  $ST = SC + SP$ . Alors,  $ST =$  l'aire entre  $D(x)$  et  $O(x)$ .

Donc, pour trouver le total il faut trouver le **point d'équilibre** qui est le point où les deux courbes sont égales. Après on fait l'intégrale.

Si  $D(x) = x^2 - 3x + 5$  et  $O(x) = x^2 + x + 1$  il faut tout d'abord, trouver quand les deux fonctions sont égales. On a  $D(x) = O(x)$  quand  $x^2 - 3x + 5 = x^2 + x + 1$ . Alors

$$x^2 - 3x + 5 - x^2 - x - 1 = -4x + 4 = 0$$

Alors, c'est quand  $x = \underline{1}$ .

Donc on a

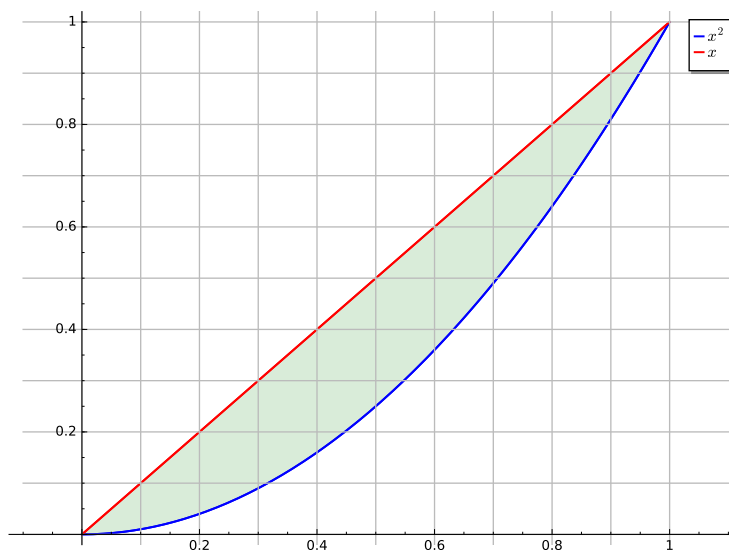
$$\begin{aligned} ST &= \int_0^1 D(x) - O(x) dx \\ &= \int_0^1 x^2 - 3x + 5 - x^2 - x - 1 dx \\ &= \int_0^1 -4x + 4 dx \\ &= -2x^2 + 4x \Big|_0^1 \\ &= -2 + 4 = 2. \end{aligned}$$

Ainsi, il y a un surplus de \$ 2.

## (2) Courbe de Lorenz et coefficient de Gini

Il y a plusieurs mesures pour quantifier l'inégalité des revenus dans une société. Vers 1905 Max Otto Lorenz a introduit une approche graphique permettant de mesurer l'inégalité. Il a utilisé ce qu'on appelle la ***courbe de Lorenz***. Une courbe de Lorenz  $L(x)$  possède les propriétés suivantes :

- Le domaine et l'image sont entre 0 et 1
- $L(0) = \underline{0}$  et  $L(1) = \underline{1}$ .
- $L$  doit être une fonction **croissante** sur  $[0, 1]$ .
- $L$  doit être concave vers le haut sur  $]0, 1[$ .
- $L(x) \leq \underline{x}$  pour tout  $x$ . **Perfect equality line**



Donc on veut minimiser l'aire entre les deux courbes! Ça c'est exactement ce l'italien Corrado Gini a pensé à l'époque. Ainsi, il a décidé de calculer le quotient entre l'aire en dessous de la courbe  $x$  et l'aire entre les deux courbes. Cette quotient est appelé le coefficient de Gini. Il est donné par

$$G = \frac{\text{aire}}{1/2} = \frac{\int_0^1 x - L(x) dx}{1/2}$$

<https://www150.statcan.gc.ca/t1/tbl1/en/cv.action?pid=1110013401#timeframe>  
<http://www.oecd.org/social/income-distribution-database.htm>

**Exemple 5.6** Faisons un exemple. Supposons que la courbe de Lorenz est donnée par  $L(x) = x^{1.8}$ . Alors

$$\begin{aligned} G &= 2 \int_0^1 x - L(x) dx \\ &= 2 \int_0^1 x - x^{1.8} dx \\ &= 2 \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^{2.8}}{2.8} \right) \Big|_0^1 \\ &= 2 \left( \frac{1^2}{2} - \frac{1^{2.8}}{2.8} \right) \\ &= \frac{2}{2} - \frac{2}{2.8} \\ &= 1 - \frac{10}{14} \\ &= \frac{14}{14} - \frac{10}{14} \\ &= \frac{4}{14} \\ &= \frac{2}{7} \cong 0.2857 \end{aligned}$$

## 6. SEMAINE 6 : 29 OCTOBRE 2018

## 6.1. Partie 1.

## 6.1.1. Rappel.

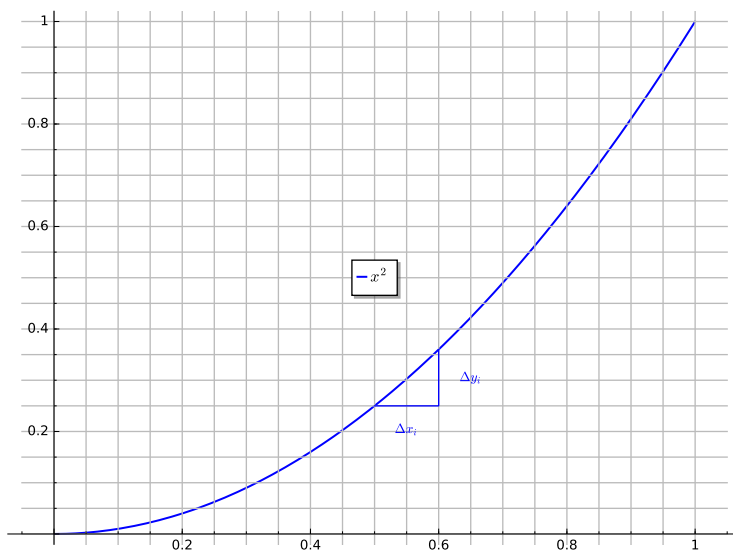
(1)  $\int \tan^n, \int \sec^n$

(2)  $\sqrt{a^2 - x^2}$

## Examen Pratique

## 6.2. Partie 2.

6.2.1. Longueur de courbes planes (§3.4 ou §5.3). Soit une courbe, on veut maintenant calculer sa longueur.



Pour calculer la longueur de la courbe de 0 à 1, il nous faut retourner à la sommation de Riemann. Rappelons la sommation de Riemann :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i$$

Si on veut calculer la longueur, on peut calculer la longueur un petit morceau à la fois. C'est-à-dire, on peut calculer :

$$\begin{aligned}\sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} &= \sqrt{\Delta x_i^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} \\ &= \sqrt{\Delta x_i^2 + (f'(c_i)\Delta x_i)^2} \\ &= \sqrt{1 + f'(c_i)^2}\Delta x_i\end{aligned}$$

Ainsi la longueur est donnée par,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f'(c_i)^2}\Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

**Exemple 6.1** Calculer la longueur de la courbe  $f(x) = 4 + 2\sqrt{x^3}$  de  $(0, 4)$  à  $(1, 6)$ .

Donc, il faut calculer :

$$\int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Premièrement il faut calculer  $f'(x)$ . Ainsi,  $f'(x) = 2 \cdot \frac{3}{2}\sqrt{x}$ . Alors,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2} dx &= \int_0^1 \sqrt{1 + (3\sqrt{x})^2} dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{1 + 9x} dx \\ &\quad \underline{u = 1 + 9x \Rightarrow du = 9 dx} \\ &= \frac{1}{9} \int_1^{10} \sqrt{u} du \\ &= \frac{2}{9 * 3} u^{3/2} \Big|_1^{10} \\ &= \frac{2}{9 * 3} (10^{3/2} - 1^{3/2}) \\ &= \frac{20\sqrt{10} - 2}{27}\end{aligned}$$

Des fois, il vaut mieux utiliser l'axe des  $y$ .

**Exemple 6.2** Voyons ça avec un autre exemple. Calculons la longueur de la courbe  $f(x) = 2x^{\frac{2}{3}}$  de  $(0, 0)$  à  $(1, 2)$ .

Si on le fait de façon normale, on trouve que ce problème est difficile :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2} dx &= \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right)^2} dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{16}{9}x^{-\frac{2}{3}}} dx\end{aligned}$$

On n'a pas encore vu une façon de résoudre ce problème.

Mais, on peut le faire avec l'axe des  $y$ . Donc si  $y = 2x^{\frac{2}{3}}$  alors  $x = \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$ .

$$\begin{aligned}
 \int_0^2 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2 \cdot 2^{\frac{2}{3}}} \sqrt{y}\right)^2} dy &= \int_0^2 \sqrt{1 + \frac{9}{4 \cdot 8} y} dy \\
 &= \int_0^2 \sqrt{1 + \frac{9}{32} y} dy \\
 u = 1 + \frac{9}{32} y &\Rightarrow du = \frac{9}{32} dy \\
 &= \frac{32}{9} \int_{y=0}^{y=2} \sqrt{u} du \\
 &= \frac{32}{9} \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_{y=0}^{y=2} \\
 &= \frac{64}{27} \left(1 + \frac{9}{32} y\right)^{3/2} \Big|_0^2 \\
 &= \frac{64}{27} \left(\left(1 + \frac{9}{16}\right)^{3/2} - 1^{3/2}\right) \\
 &= \frac{64}{27} \left(\left(\frac{25}{16}\right)^{3/2} - 1\right) \\
 &= \frac{64}{27} \left(\frac{5^3}{4^3} - 1\right) \\
 &= \frac{64}{27} \cdot \frac{125 - 64}{64} \\
 &= \frac{61}{27}
 \end{aligned}$$

6.2.2. *Récapitulation - Un grand rappel.* Qu'est-ce que vous aimeriez voir ?

- (1) **Règle de L'Hôpital** Si  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$  ou  $\pm \frac{\infty}{\infty}$  et si la limite  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  existe ou est infinie, alors

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

### Exemple 6.3

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - x^4 + x^3 - x^2 - 2x + 2}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2}{2 \cdot (x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{20x^3 - 12x^2 + 6x - 2}{2} = 6$$

Et si la limite est de la forme  $\infty - \infty$ ,  $0 \cdot \pm \infty$  ou la forme  $0^0$ ,  $\infty^0$ ,  $1^{\pm \infty}$ .

### Exemples 6.4

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^x$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x \sin(x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{\sin(x) + x \cos(x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\cos(x) + \cos(x) - x \sin(x)} \\
&= \frac{0}{2} = 0 \\
\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{1/x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{-1/x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{x} \\
&= 0 \\
\lim_{x \rightarrow 0} x^x &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0 \\
&\Rightarrow e^0 = 1
\end{aligned}$$

- (2) **Sommation** Abréger la sommation suivante avec  $\Sigma$  :

$$\begin{aligned}
f(4) - \frac{f(6)}{2} + \frac{f(8)}{3} - \frac{f(10)}{4} + \frac{f(12)}{5} - \frac{f(14)}{6} \\
\sum_{i=1}^6 (-1)^{i+1} \frac{f(2i+2)}{i}
\end{aligned}$$

- (3) **Intégrable au sens de Riemann** Ça veut dire quoi d'être intégrable au sens de Riemann ?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx \text{ (si la limite existe)}$$

Intégrable si  $f(x)$  est continue sur  $[a, b]$ .

- (4) **Théorème fondamental du calcul intégrale** Si  $f(x)$  est une fonction continue sur un intervalle  $[a, b]$  et si  $F(x)$  est une primitive de  $f(x)$  alors  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$ .

- (5) **Changement de variable/Méthode de substitution**

Version indéfinie :

- Mettez  $u = f(x)$ .
- Faites les dérivées.
- Remplacez les variables.
- Faites l'intégrale.
- Re-remplacez les variables.

Version définie :

- Mettez  $u = f(x)$ .
- Faites les dérivées.
- Remplacez les variables.
- Calculer les nouvelles bornes.
- Faites l'intégrale.

La partie la plus dure : Décider  $u$

### Exemple 6.5

$$\begin{aligned} \int \frac{(\ln(x))^4}{x} dx &= \int \frac{u^4}{du} \\ u &= \ln(x) \\ du &= 1/x dx \\ &= \frac{u^5}{5} + c \\ &= \frac{(\ln(x))^5}{5} + c \end{aligned}$$

Redo with definite integral

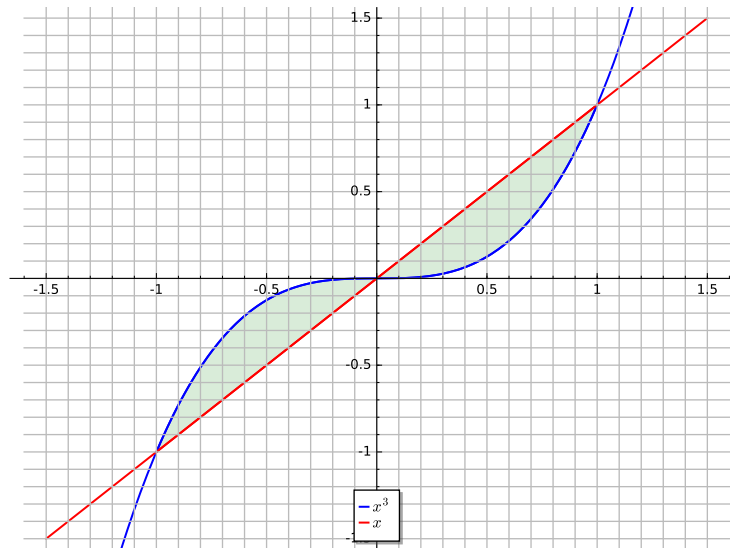
### (6) Complétion du carré

$$ax^2 + bx + c = a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left( \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) \right)$$

### Exemple 6.6

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{-x^2-6x-8}} dx &= \\ -x^2 - 6x - 8 &= -(x^2 + 6x + 3^2 - 3^2 + 8) \\ &= -((x+3)^2 - 1) \\ \int \frac{1}{\sqrt{-x^2-6x-8}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{1-(x+3)^2}} dx \\ u = x + 3 &\Rightarrow du = dx \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du \\ &= \arcsin(u) + c \\ &= \arcsin(x+3) + c \end{aligned}$$

### (7) L'aire d'une surface plane



$$\int_{-1}^0 x^3 - x \, dx + \int_0^1 x - x^3 \, dx$$

(8) **Intégration par parties**

- (a) Trouvez  $u$  et  $dv$  (utilisez LIATE!)
- (b) Trouvez  $du$  et  $v$
- (c) Remplacez les variables

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du \quad \int_a^b u \, dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v \, du$$

**Exemple 6.7**

$$\int_1^2 x \ln(x) \, dx$$

$$u = \ln(x) \quad dv = x \, dx$$

$$du = \frac{dx}{x} \quad v = \frac{x^2}{2}$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 x \ln(x) \, dx &= \left. \frac{x^2}{2} \ln(x) \right|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} \, dx \\ &= \frac{2^2}{2} \ln(2) - \frac{1^2}{2} \ln(1) - \int_1^2 \frac{x}{2} \, dx \\ &= 2 \ln(2) - \left. \frac{x^2}{4} \right|_1^2 \\ &= 2 \ln(2) - \left( \frac{2^2}{4} - \frac{1^2}{4} \right) \\ &= 2 \ln(2) - \left( 1 - \frac{1}{4} \right) \\ &= 2 \ln(2) - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

(9) **Intégration de fonctions trigonométriques**  $\int \sin^m(ax) \cos^n(ax) dx$ 

Si  $m$  ou  $n$  est impair, on essaye de le changer pour qu'il soit pair. Si tous les deux sont positifs et pairs, on utilise nos identités pour diminuer l'exposant.

**Exemple 6.8**

$$\begin{aligned}
 \int \sin^2(x) \cos^4(x) dx &= \int (\sin(x) \cos(x))^2 \cos^2(x) dx \\
 &= \int \left(\frac{\sin(2x)}{2}\right)^2 \frac{1+\cos(2x)}{2} dx \\
 &= \int \frac{(1+\cos(2x)) \sin^2(2x)}{8} dx \\
 &= \int \frac{\sin^2(2x)}{8} dx + \int \frac{\sin^2(2x) \cos(2x)}{8} dx \\
 &= \int \frac{1-\cos(4x)}{16} dx + \int \frac{\sin^2(2x) \cos(2x)}{8} dx \\
 &= \int \frac{1}{16} dx - \int \frac{\cos(4x)}{16} + \int \frac{\sin^2(2x) \cos(2x)}{8} dx \\
 &= \frac{x}{16} - \frac{\sin(4x)}{64} + c + \int \frac{\sin^2(2x) \cos(2x)}{8} dx
 \end{aligned}$$

$$u = \sin(2x) \Rightarrow du = 2 \cos(2x) dx$$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sin^2(2x) \cos(2x)}{8} dx &= \int \frac{u^2}{16} du \\
 &= \frac{u^3}{48} + c \\
 &= \frac{\sin^3(2x)}{48} + c
 \end{aligned}$$

$$= \frac{x}{16} - \frac{\sin(4x)}{64} + \frac{\sin^3(2x)}{48} + c$$

- (10) **Sécantes, cosécantes, tangentes, cotangentes** Il faut faire une substitution de la forme  $u = \tan(x)$  après avoir fait des substitutions trigonométriques. Rappelons qu'il faut utiliser la méthode par parties si  $n$  est impair pour la sécante :  $\sec^n(x)$ .

**Exemple 6.9** (a)

$$\begin{aligned}
 \int \tan^3(x) dx &= \int \tan(x) \tan^2(x) dx \\
 &= \int \tan(x)(\sec^2(x) - 1) dx \\
 &= \int \tan(x) \sec^2(x) dx - \int \tan(x) dx \\
 &= \int \tan(x) \sec^2(x) dx - \ln(|\sin(x)|) + c \\
 u = \tan(x) &\Rightarrow du = \sec^2(x) dx \\
 &= \int u du - \ln(|\sin(x)|) + c \\
 &= \frac{u^2}{2} - \ln(|\sin(x)|) + c \\
 &= \frac{\tan^2(x)}{2} - \ln(|\sin(x)|) + c
 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
 \int \sec^4(x) dx &= \int \sec^2(x) \sec^2(x) dx \\
 &= \int \sec^2(x) (\tan^2(x) + 1) dx \\
 u = \tan(x) &\Rightarrow du = \sec^2(x) dx \\
 &= \int u^2 + 1 du \\
 &= \frac{u^3}{3} + u + c \\
 &= \frac{\tan^3(x)}{3} + \tan(x) + c
 \end{aligned}$$

(11) **Intégration par substitution trigonométrique** Si on a des quadratiques, on utilise intégration par substitution avec un changement de variable selon la formule dans la racine carrée. On a les trois options suivantes :

$$a^2 - x^2 \Rightarrow x = a \sin(\theta)$$

$$a^2 + x^2 \Rightarrow x = a \tan(\theta)$$

$$x^2 - a^2 \Rightarrow x = a \sec(\theta)$$

**Exemple 6.10**

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-8x+20}} &= \\x^2 - 8x + 20 &= x^2 - 8x + 16 - 16 + 20 = (x - 4)^2 + 4 \\&= \int \frac{dx}{\sqrt{(x-4)^2+2^2}} \\&= \int \frac{dx}{2\sqrt{\left(\frac{x-4}{2}\right)^2+1}} \\ \frac{x-4}{2} = \tan(\theta) &\Rightarrow dx = 2 \tan(\theta) \sec(\theta) d\theta \\&= \int \frac{2 \tan(\theta) \sec(\theta) d\theta}{2\sqrt{\tan^2(\theta)+1}} \\&= \int \frac{\tan(\theta) \sec(\theta) d\theta}{\sqrt{\sec^2(\theta)}} \\&= \int \tan(\theta) d\theta \\&= \ln(|\sec(\theta)|) + c \\&= \ln\left(\left|\sec\left(\frac{\sqrt{x^2-8x+20}}{2}\right)\right|\right) + c\end{aligned}$$

## 7. SEMAINE 7 : 12 NOVEMBRE 2018

7.1. **Partie 1.**7.1.1. *Rappel.*

(1) algo

7.1.2. *Intégration de fonctions rationnelles par décomposition en une somme de fractions partielles (§2.8 ou §4.4).* Des fois, c'est facile de multiplier plusieurs polynômes ensemble. Mais qu'est-ce qu'on peut faire pour inverser ce processus? Les fractions partielles!!!

Commençons avec une fonction propre :  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ .

Rappelons qu'une fraction est propre si le degré du numérateur est inf. au degré du dénominateur.

**La première étape** qu'on fait c'est de changer  $Q(x)$  en un polynôme de facteurs linéaires et quadratiques. Ça veut dire que

$$Q(x) = (a_1x + b_1)^{i_1} \dots (a_nx + b_n)^{i_n} (c_1x^2 + d_1x + e_1)^{j_1} \dots (c_mx^2 + d_mx + e_m)^{j_m}.$$

**Exemple 7.1** Un exemple! Soit

$$Q(x) = 2x^5 + 5x^4 - 12x^3 - 14x^2 + 34x - 15.$$

Il faut utiliser une **racine évidente**.  $p/q$  est une racine ou  $p|a_0$  et  $q|a_n$  avec  $Q(x) = a_nx^n + \dots + a_0$ .

On a  $-15 = a_0$  et  $2 = a_n$ . Donc  $p/q$  peut être :  $\{\pm 15, \pm 5, \pm 3, \pm 1, \pm 15/2, \pm 5/2, \pm 3/2, \pm 1/2\}$ . Essayons avec le plus simple : 1.

$$Q(1) = 1 : 2 + 5 - 12 - 14 + 34 - 15 = 0$$

Donc,  $(x - 1)|Q(x)$  et

$$Q(x) = (x - 1)(2x^4 + 7x^3 - 5x^2 - 19x + 15)$$

Essayons 1 encore :

$$Q(1) = 1 : 2 + 7 - 5 - 19 + 15 = 0.$$

Donc :

$$Q(x) = (x - 1)^2(2x^3 + 9x^2 + 4x - 15)$$

Alors, on essaye encore 1.

$$Q(1) = 1 : 2 + 9 + 4 - 15 = 0.$$

Donc :

$$Q(x) = (x - 1)^3(2x^2 + 11x + 15)$$

Mais, d'ici, c'est évident que 1 ne va pas marcher parce que ça nous donnera quelque chose de positif! Donc, essayons  $-1$ .

$$Q(-1) = -1 : 2 - 11 + 15 = 6.$$

Nope! Essayons,  $-3$ .

$$Q(-3) = -3 : 2 \cdot (-3)^2 + 11 \cdot (-3) + 15 = 2 \cdot 9 - 33 + 15 = 18 - 33 + 15 = 0$$

Alors :

$$Q(x) = (x - 1)^3(x + 3)(2x + 5)$$

**La deuxième étape** est de développer notre quotient selon le dénominateur.

$$\frac{P(x)}{(ax+b)^n} = \frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \dots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

$$\frac{P(x)}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

Si on en a plusieurs, on les ajoute ensemble.

$$\frac{P(x)}{(ax+b)(cx+d)} = \frac{A}{ax+b} + \frac{B}{cx+d}$$

**Exemples 7.2** (1) Dans notre exemple :  $\frac{P(x)}{2x^5+5x^4-12x^3-14x^2+34x-15}$ .

$$\frac{P(x)}{(x-1)^3(x+3)(2x+5)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{2x+5} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{(x-1)^3}$$

$$(2) \frac{P(x)}{(x^2+1)^2(2x+3)} = \frac{A}{2x+3} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+D}{(x^2+1)^2}$$

$$(3) \frac{P(x)}{x^2(x+1)^3(x-\frac{5}{2})(x^2+1)^3(x^2+2x+8)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2} + \frac{E}{(x+1)^3} + \frac{F}{x-\frac{5}{2}} + \frac{Gx+H}{x^2+1} + \frac{Ix+J}{(x^2+1)^2} + \frac{Kx+L}{(x^2+1)^3} + \frac{Mx+N}{x^2+2x+8}$$

Mais, comment est-ce qu'on peut trouver les variables majuscules ? Si on n'a pas de puissance, c'est facile :

**Exemple 7.3**  $\frac{12x+3}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}$ .

$$= \frac{A(x-1)}{x(x-1)} + \frac{B(x)}{x(x-1)}$$

$$12x+3 = \frac{A(x-1) + B(x)}{x(x-1)}$$

Si  $x = 0$  alors  $A = -3$

Si  $x = 1$  alors  $B = 15$

Alors  $A = -3$  et  $B = 15$ . Donc

$$\frac{12x+3}{x(x-1)} = \frac{-3}{x} + \frac{15}{x-1}$$

**Exemple 7.4**  $\frac{2x^2-15x+3}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3}$ .

$$= \frac{A(x+3)}{(x-1)(x+3)} + \frac{B(x-1)}{(x-1)(x+3)}$$

$$2x^2 - 15x + 3 = A(x+3) + B(x-1)$$

Si  $x = 1$  alors  $2 - 15 + 3 = A(1+3) + B(1-1) \Rightarrow -10 = 4A$

Si  $x = -3$  alors  $18 + 45 + 3 = A(-3+3) + B(-3-1) \Rightarrow 66 = -4B$

Alors  $A = \frac{-5}{2}$  et  $B = \frac{-33}{2}$ . Donc,

$$\frac{2x^2 - 15x + 3}{(x-1)(x+3)} = \frac{-5}{2(x-1)} - \frac{33}{2(x+3)}$$

Essayons quelque chose plus compliqué.

**Exemple 7.5**  $\frac{x^2+x}{(x+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}$ . Commençons de la même façon :

$$x^2 + x = \frac{A(x+1)^2 + B(x+1) + C}{(x+1)^3}$$

$$C = \underline{0} \leftarrow (x = -1)$$

Mais, on ne sait pas ce qu'on peut mettre pour les  $x$  pour trouver  $A$  et  $B$  ! Alors, on va faire la multiplication :

$$\begin{aligned} x^2 + x &= Ax^2 + 2Ax + A + Bx + B - 1 \\ &= \underline{Ax^2 + (2A+B)x + (A+B-1)} \end{aligned}$$

$$A = \underline{1}$$

$$B = \underline{2} + B = 1 \Rightarrow B = -1$$

**Exemple 7.6** Et si  $\frac{x^2+x}{x(x+1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{(x+1)^3}$ . Alors

$$x^2 + x = \frac{A(x+1)^3 + Bx(x+1)^2 + Cx(x+1) + Dx}{x(x+1)^3}$$

$$A = \underline{0} \leftarrow (x = 0)$$

$$D = \underline{0} \leftarrow (x = -1)$$

Pour  $B$  et  $C$  on fait la même chose qu'avant.

$$\begin{aligned} x^2 + x &= Bx^3 + 2Bx^2 + Bx + Cx^2 + Cx \\ &= \underline{Bx^3 + (2B+C)x^2 + (B+C)x} \end{aligned}$$

$$B = \underline{0}$$

$$C = \underline{1}$$

**Exemple 7.7**  $\frac{2x^4+x^3+17x-20}{(x-1)^3(x+3)(2x+5)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{2x+5} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{(x-1)^3}$ . Commençons dans le même sens **Expand**

$$\begin{aligned} 2x^4 + x^3 + 17x - 20 &= A(x-1)^3(2x+5) + B(x+3)(x-1)^3 + C(x+3)(2x+5)(x-1)^2 \\ &\quad + D(x+3)(2x+5)(x-1) + E(x+3)(2x+5) \end{aligned}$$

$$A = \underline{1} \leftarrow (x = -3)$$

$$B = \underline{0} \leftarrow (x = -5/2)$$

$$E = \underline{0} \leftarrow (x = 1)$$

Alors

$$\begin{aligned}
 2x^4 + x^3 - 17x - 20 &= (2x^4 - x^3 - 9x^2 + 13x - 5) + C(2x^4 + 7x^3 - 5x^2 - 19x + 15) \\
 &\quad + D(2x^3 + 9x^2 + 4x - 15) \\
 &= (2 + 2C)x^4 + (-1 + 7C + 2D)x^3 + (-9 - 5C + 9D)x^2 \\
 &\quad + (13 - 19C + 4D)x + (-5 + 15C - 15D) \\
 C &= \underline{0} \leftarrow (x^4) \\
 D &= \underline{1} \leftarrow (1)
 \end{aligned}$$

Faisons, l'exemple d'une intégrale.

**Exemple 7.8**  $\int \frac{3x^2+x+2}{x^3-x^2-x+1} dx$

$$Q(x) = \underline{x^3 - x^2 - x + 1} = (x-1)^2(x+1)$$

$$\frac{3x^2 + x + 2}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$$3x^2 + x + 2 = \underline{A(x-1)^2 + B(x+1)(x-1) + C(x+1)}$$

$$A = \underline{1} \leftarrow (x = -1)$$

$$C = \underline{3} \leftarrow (x = 1)$$

$$3x^2 + x + 2 = \underline{(x^2 - 2x + 1) + B(x^2 - 1) + 3(x+1)}$$

$$= (1+B)x^2 + (-2+3)x + (1-B+3)$$

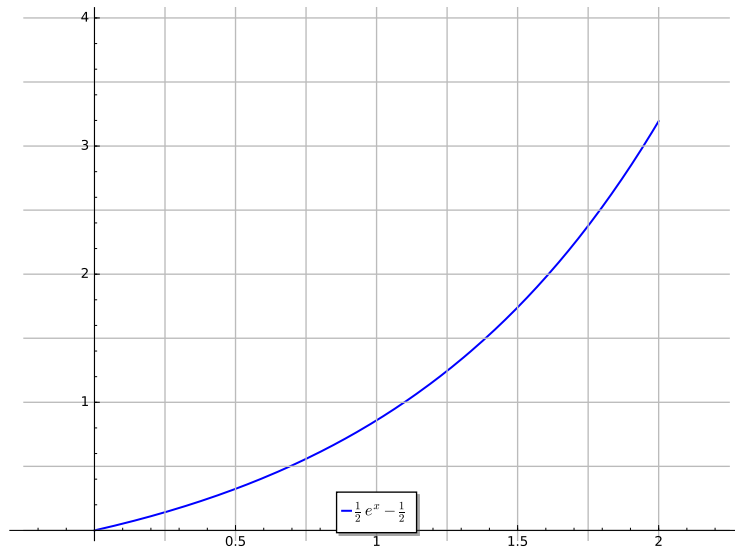
$$B = \underline{2} \leftarrow (x^2)$$

$$\frac{3x^2 + x + 2}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2}$$

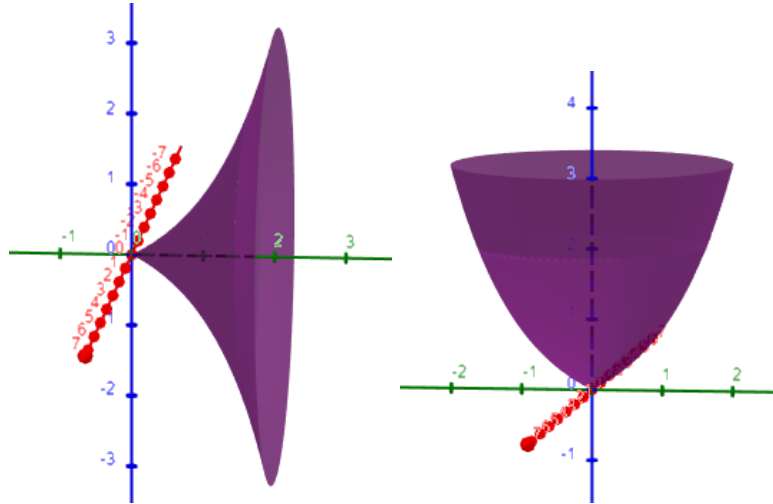
$$\begin{aligned}
 \int \frac{3x^2 + x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1} dx &= \int \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} dx \\
 &= \int \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{2}{x-1} dx + \int \frac{3}{(x-1)^2} dx \\
 &= \ln(|x+1|) + 2\ln(|x-1|) + \frac{-3}{(x-1)} + c
 \end{aligned}$$

## 7.2. Partie 2.

7.2.1. *Volume de solides (§3.3 ou §5.1).* On va essayer de calculer un volume étant donné une fonction. Donc supposons qu'on a la fonction  $\frac{e^x-1}{2}$  :

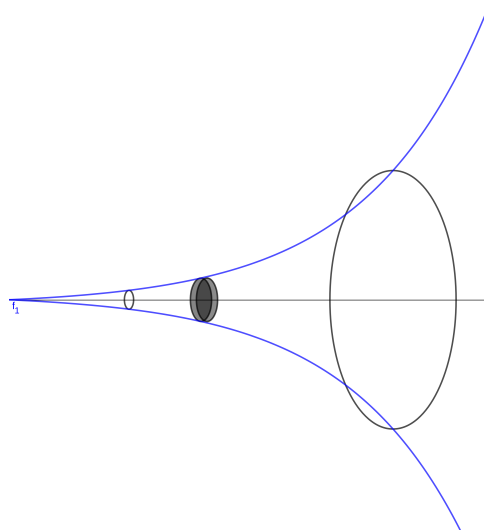


On va faire des rotations selon différents axes :



D'ici on peut se demander, quel est le volume d'une partie de notre fonction en rotation autour d'un axe ? On va faire comme on a fait avec les fonctions en 2d.

On peut approximer le volume en faisant la somme des volumes des disques très minces.

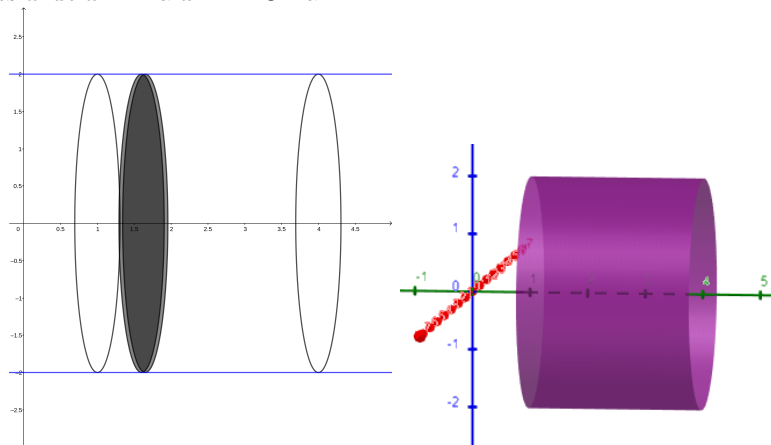


Quel est le volume du petit disque ?  $\pi r^2 \Delta x$ . Alors, pour trouver le volume il nous faut calculer l'intégrale :

$$\int_a^b \pi (f(x))^2 dx$$

Cette méthode pour évaluer le volume d'un solide de révolution est la *méthode des disques*. Alors, faisons des exemples.

**Exemple 7.9** Trouver le volume de la courbe  $f(x) = 2$  en rotation autour de l'axe des  $x$  de  $x = 1$  à  $x = 4$ . On a :



Donc, le volume sera :

$$\begin{aligned}
 \int_1^4 \pi (f(x))^2 dx &= \int_1^4 \pi (2)^2 dx \\
 &= \int_1^4 4\pi dx \\
 &= 4\pi x \Big|_1^4 \\
 &= 4\pi(4 - 1) \\
 &= 12\pi
 \end{aligned}$$

**Exemple 7.10** Quelque chose plus difficile : Trouver le volume de la courbe  $f(x) = \frac{e^x - 1}{2}$  en rotation autour de l'axe des  $x$  de  $x = 1$  à  $x = 4$ . On a déjà vu cette courbe. Donc, le volume sera :

$$\begin{aligned}
 \int_1^4 \pi (f(x))^2 dx &= \int_1^4 \pi \left( \frac{e^x - 1}{2} \right)^2 dx \\
 &= \frac{\pi}{4} \int_1^4 (e^x)^2 - 2e^x + 1 dx \\
 &= \frac{\pi}{4} \left( \int_1^4 e^{2x} dx - 2 \int_1^4 e^x dx + \int_1^4 dx \right) \\
 &= \frac{\pi}{4} \left( \frac{e^{2x}}{2} \Big|_1^4 - 2(e^x) \Big|_1^4 + x \Big|_1^4 \right) \\
 &= \frac{\pi}{4} \left( \frac{e^8}{2} - \frac{e^2}{2} - 2e^4 + 2e^1 + 4 - 1 \right) \\
 &= \frac{\pi e^8 - \pi e^2 - 4\pi e^4 + 4\pi e^1 + 8\pi - 2\pi}{8}
 \end{aligned}$$

Mais on avait deux façons de faire la rotation !

**Exemple 7.11** Donc essayons de trouver le volume de la courbe en rotation autour de l'axe des  $y$  de  $y = 1$  à  $y = 4$ .

$$\int_1^4 \pi x^2 dy = \pi \int_1^4 \ln(2y + 1)^2 dy$$

Pour l'instant, c'est trop compliqué, donc essayons quelque chose de plus facile.

**Exemple 7.12**  $f(x) = x^{1/3}$ . Autour de l'axe des  $x$  on a :

$$\int \pi x^{2/3} dx$$

et autour de l'axe des  $y$  on a :

$$\int \pi y^6 dy$$

Donc il faut faire les intégrales.

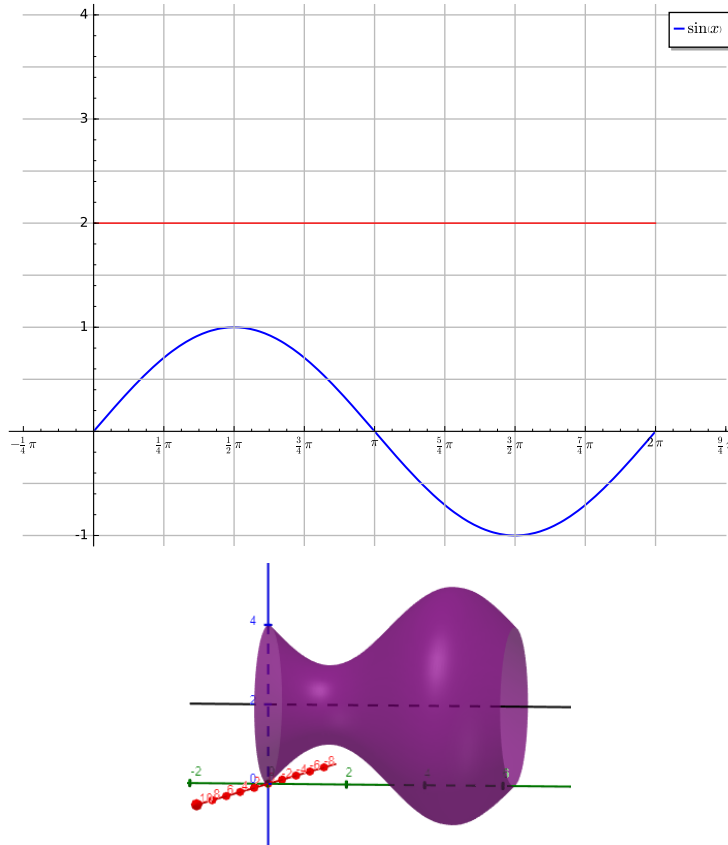
$$\int \pi x^{2/3} dx = \frac{\pi x^{5/3}}{5/3} + c$$

et

$$\int \pi y^6 dy = \frac{\pi y^7}{7} + c$$

Finalement, on fait une rotation autour des axes, mais à quoi est-ce qu'on arrive si on fait une rotation autour d'une autre droite ?

### Exemple 7.13



Qu'est-ce qu'on peut faire ? On a toujours  $\pi r^2 \Delta x$  pour les disques, mais quoi vaut  $r$  ici ? Ce n'est plus  $f(x)$  ! Maintenant, c'est  $2 - \sin(x)$ . Donc, il nous faut l'intégrale :

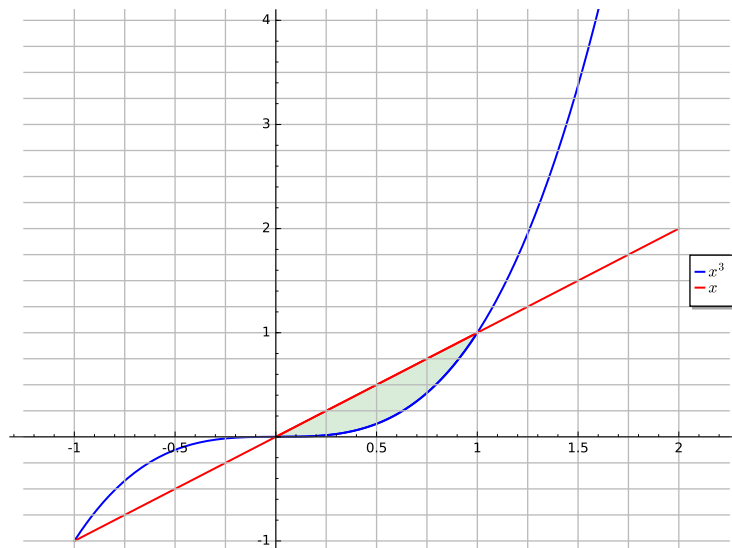
$$\int_0^{2\pi} \pi (2 - \sin(x))^2 dx$$

Pour l'intégrer, on a

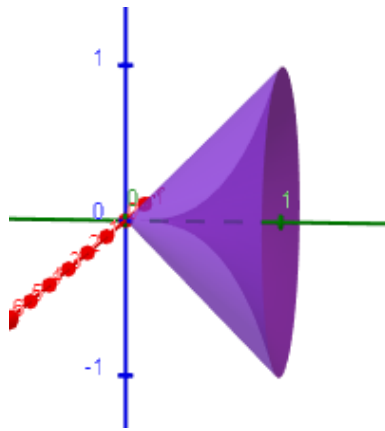
$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \pi (2 - \sin(x))^2 dx &= \pi \int_0^{2\pi} 4 - 4 \sin(x) + \sin^2(x) dx \\
 &= \pi \int_0^{2\pi} 4 - 4 \sin(x) + \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx \\
 &= \pi \left( 4x + 4 \cos(x) + \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} \\
 &= \pi \left( 8\pi + 4 \cos(2\pi) + \frac{2\pi}{2} - \frac{\sin(4\pi)}{4} - 0 - 4 \cos(0) - 0 - \frac{\sin(0)}{4} \right) \\
 &= \pi (8\pi + 4 + \pi - 0 - 4 - 0) \\
 &= 9\pi^2
 \end{aligned}$$

Continuons à compliquer les choses, qu'est-ce qui peut arriver si on fait une rotation d'un objet entre deux courbes ?

**Exemple 7.14** Supposons qu'on a l'objet :



C'est exactement la même chose qu'on a fait pour trouver l'aire.

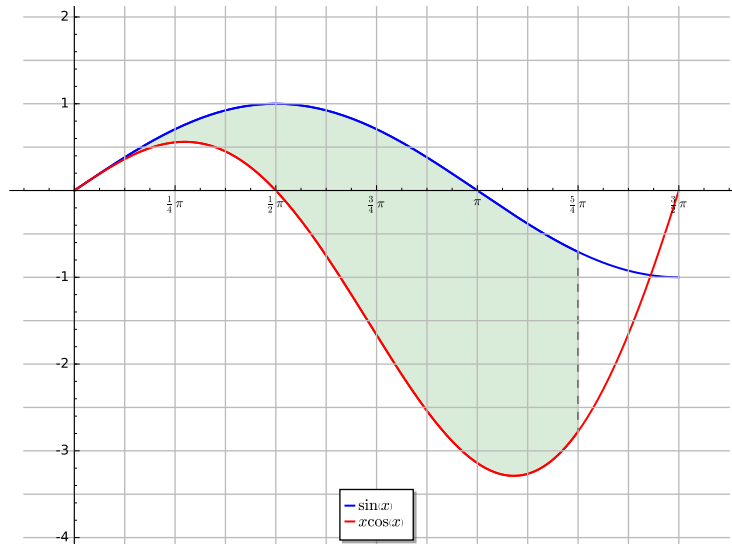


On prend le grand et on soustrait le petit.

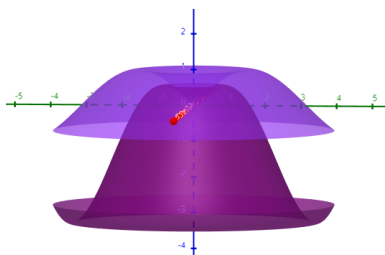
$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \pi(x)^2 - \pi(x^3)^2 dx &= \pi \int_0^1 x^2 - x^6 dx \\
 &= \pi \left( \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7} \right) \Big|_0^1 \\
 &= \pi \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{7} \right) \\
 &= \pi \frac{7-3}{21} \\
 &= \frac{4\pi}{21}
 \end{aligned}$$

Cette méthode est la *méthode des disques troués*.

Mais, qu'est-ce qu'on peut faire si on veut trouver le volume de



après avoir fait une rotation autour de l'axe des  $y$ .



On ne peut pas utiliser les disques parce que des fois, c'est la même fonction.  
Donc il faut utiliser une autre forme pour trouver le volume : méthode de tubes.

Premièrement, il faut calculer le volume de cet objet :

$$2\pi r h \Delta r$$

**Exemple 7.15** Pour notre exemple, on a  $r = x$  et  $h = \sin(x) - x \cos(x)$ . Alors,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{5\pi}{4}} 2\pi x (\sin(x) - x \cos(x)) dx &= 2\pi \int_0^{\frac{5\pi}{4}} x \sin(x) - x^2 \cos(x) dx \\ u = x \quad dv = \sin(x) dx \quad u' = x^2 \quad dv' = \cos(x) dx \\ du = dx \quad v = -\cos(x) \quad du' = 2x dx \quad v' = \sin(x) \\ &= 2\pi \left( -x \cos(x) \Big|_0^{\frac{5\pi}{4}} - \int_0^{\frac{5\pi}{4}} -\cos(x) dx - x^2 \sin(x) \Big|_0^{\frac{5\pi}{4}} + \int_0^{\frac{5\pi}{4}} 2x \sin(x) dx \right) \\ u' = 2x \quad dv' = \sin(x) dx \\ du' = 2 dx \quad v' = -\cos(x) \\ &= 2\pi \left( -x \cos(x) - x^2 \sin(x) \Big|_0^{\frac{5\pi}{4}} + \sin(x) \Big|_0^{\frac{5\pi}{4}} - 2x \cos(x) \Big|_0^{\frac{5\pi}{4}} - \int_0^{\frac{5\pi}{4}} -2 \cos(x) dx \right) \\ &= 2\pi \left( -x \cos(x) - x^2 \sin(x) + \sin(x) - 2x \cos(x) \Big|_0^{\frac{5\pi}{4}} + 2 \sin(x) \Big|_0^{\frac{5\pi}{4}} \right) \\ &= 2\pi \left( \left( -\frac{5\pi}{4} \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) - \left(\frac{5\pi}{4}\right)^2 \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) - 2 \cdot \frac{5\pi}{4} \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + 2 \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \right) \right. \\ &\quad \left. - (-0 \cos(0) - 0^2 \sin(0) + \sin(0) - 2 \cdot 0 \cdot \cos(0) + 2 \sin(0)) \right) \\ &= 2\pi \left( \left( -\frac{5\pi-1}{4\sqrt{2}} - \left(\frac{5\pi}{4}\right)^2 \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{5\pi-1}{2\sqrt{2}} + 2 \frac{-1}{\sqrt{2}} \right) \right. \\ &\quad \left. - (0 - 0 + 0 - 0 + 0) \right) \\ &= 2\pi \left( \frac{5\pi}{4\sqrt{2}} + \frac{25\pi^2}{16\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{5\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} \right) \\ &= 2\pi \left( \frac{20\pi + 25\pi^2 - 16 + 40\pi - 32}{16\sqrt{2}} \right) \\ &= \pi \frac{25\pi^2 + 60\pi - 48}{8\sqrt{2}} \\ &= \frac{25\pi^3 + 60\pi^2 - 48\pi}{8\sqrt{2}} \end{aligned}$$

## 8. SEMAINE 8 : 19 NOVEMBRE 2018

8.1. **Partie 1.**8.1.1. *Rappel.*

(1) algo

8.1.2. *Intégrales impropres (§5.4 ou §5.5).* On commence aujourd'hui avec un exemple.**Exemple 8.1** Disons qu'on veut calculer l'intégrale suivante :

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$$

On trouve que

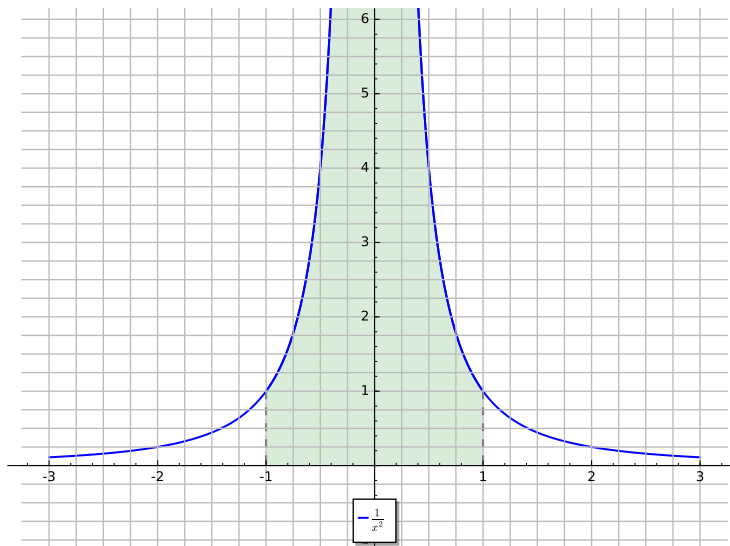
$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx &= \left. \frac{-1}{x} \right|_{-1}^1 \\ &= \frac{-1}{1} - \frac{-1}{-1} \\ &= -1 - 1 \\ &= -2 \end{aligned}$$

Est-ce que c'est correct? non

Pourquoi?

On voit que  $\frac{1}{x^2}$  est toujours positive. Donc l'aire doit être positive! Mais ce n'est pas ce qu'on a trouvé.

En effet, si on regarde le graphe on voit :



Donc, il y a un problème. Le problème vient de notre théorème.

**Théorème 8.2** Si  $f(x)$  est une fonction continue sur un intervalle  $[a, b]$  et si  $F(x)$  est une primitive de  $f(x)$  alors  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ .

Alors, le problème vient du fait que  $\frac{1}{x^2}$  n'est pas continue à 0.

Pour résoudre ce problème on utilise les limites. Déjà comme notre fonction est paire on sait que :

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = 2 \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$$

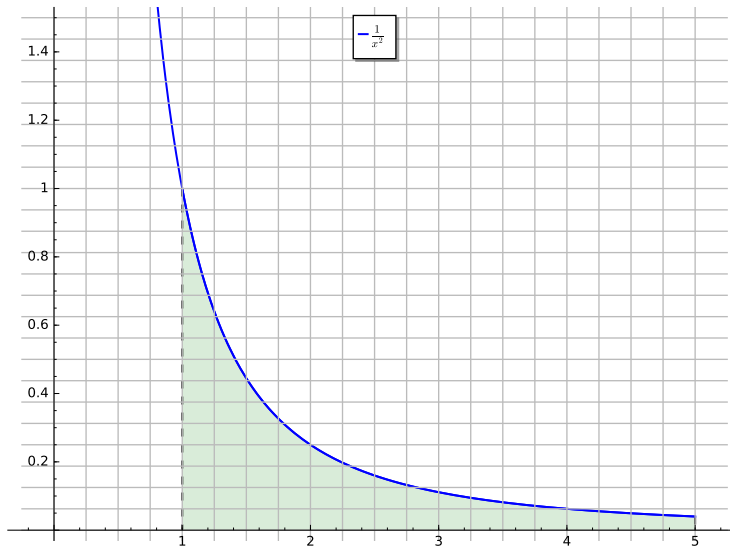
Maintenant, on va utiliser les limites.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{n \rightarrow 0^+} \int_n^1 \frac{1}{x^2} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow 0^+} \left. -\frac{1}{x} \right|_n^1 \\ &= \lim_{n \rightarrow 0^+} -\frac{1}{1} - \frac{-1}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow 0^+} -1 + \frac{1}{n} \\ &= \infty \end{aligned}$$

Alors

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = 2 \cdot \infty = \infty$$

On peut faire la même chose vers l'infinie.



$$\begin{aligned}
 \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x^2} dx \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left. -\frac{1}{x} \right|_1^n \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} - \frac{-1}{1} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{n} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Donc on a la définition suivante. Une intégrale est une *intégrale impropre*

- (1) si l'intégrande tend vers  $\pm\infty$  en une ou plusieurs valeurs entre les bornes ou
- (2) si au moins une des bornes d'intégration est infinie.

Pour le premier cas, soit  $\int_a^b f(x) dx$

- (1) Si  $f$  est continue sur  $[a, b[$  et  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \pm\infty$  alors

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{B \rightarrow b^-} \int_a^B f(x) dx$$

si la limite existe.

- (2) Si  $f$  est continue sur  $]a, b]$  et  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$  alors

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{A \rightarrow a^+} \int_A^b f(x) dx$$

si la limite existe.

- (3) Si  $f$  est continue sur  $]a, b[$ ,  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \pm\infty$  alors

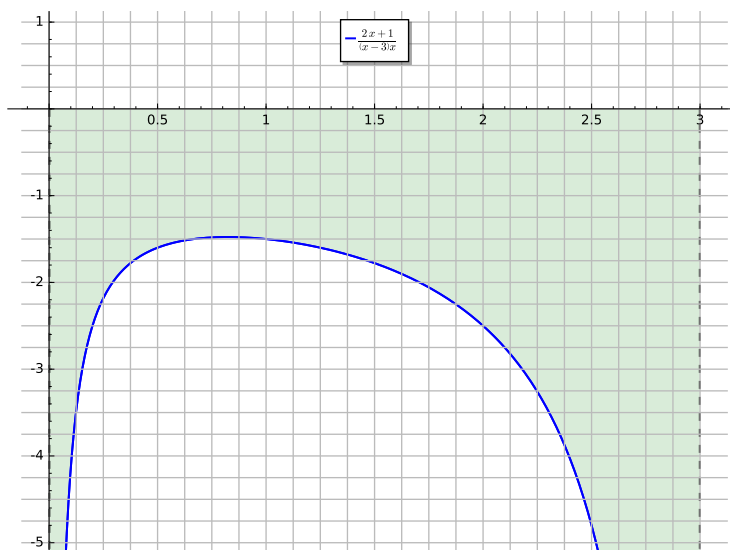
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{A \rightarrow a^+} \int_A^c f(x) dx + \lim_{B \rightarrow b^-} \int_c^B f(x) dx$$

si les limites existent pour un  $c \in ]a, b[$ .

Si les limites donnent un nombre réel, l'intégrale impropre est *convergente*. Si elles existent pas ou sont infinies, alors l'intégrale impropre est *divergente*.

Pour nos exemples on a  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$  est *divergente* et  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$  est *convergente*.

**Exemple 8.3** L'intégrale  $\int_0^3 \frac{2x+1}{x(x-3)} dx$  est-elle convergente ou divergente ?



$$\int_0^3 \frac{2x+1}{x(x-3)} dx = \lim_{A \rightarrow 0^+} \int_A^1 \frac{2x+1}{x(x-3)} dx + \lim_{B \rightarrow 3^-} \int_1^B \frac{2x+1}{x(x-3)} dx$$

$$\frac{2x+1}{x(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3}$$

$$2x+1 = \frac{A(x-3) + B(x)}{x(x-3)}$$

$$A = \frac{-1}{3} \leftarrow (x=0)$$

$$B = \frac{7}{3} \leftarrow (x=3)$$

$$\frac{2x+1}{x(x-3)} = \frac{-1}{3x} + \frac{7}{3(x-3)}$$

Alors

$$\int_0^3 \frac{2x+1}{x(x-3)} dx = \lim_{A \rightarrow 0^+} \int_A^1 \frac{-1}{3x} + \frac{7}{3(x-3)} dx + \lim_{B \rightarrow 3^-} \int_1^B \frac{-1}{3x} + \frac{7}{3(x-3)} dx$$

$$= \lim_{A \rightarrow 0^+} \left. \frac{-\ln(|x|)}{3} + \frac{7 \ln(|x-3|)}{3} \right|_A^1 + \lim_{B \rightarrow 3^-} \left. \frac{-\ln(|x|)}{3} + \frac{7 \ln(|x-3|)}{3} \right|_1^B$$

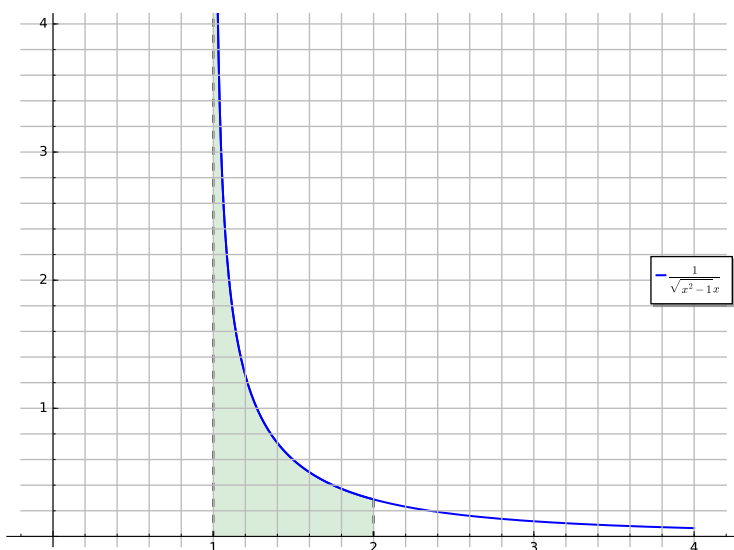
$$= \lim_{A \rightarrow 0^+} \frac{-\ln(1)}{3} + \frac{7 \ln(|1-3|)}{3} - \frac{-\ln(|A|)}{3} - \frac{7 \ln(|A-3|)}{3}$$

$$+ \lim_{B \rightarrow 3^-} \frac{-\ln(|B|)}{3} + \frac{7 \ln(|B-3|)}{3} - \frac{-\ln(1)}{3} + \frac{7 \ln(|1-3|)}{3}$$

$$= \infty + \infty \text{ 3rd term, 2nd term}$$

Alors, c'est divergent.

**Exemple 8.4** Un autre exemple. L'intégrale  $\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$  est-elle convergente ou c'est divergent ?



Alors, on a que l'intégrande tend vers  $\infty$  à 1. Donc, on a

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx &= \lim_{A \rightarrow 1^+} \int_A^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx \\ &= \lim_{A \rightarrow 1^+} \operatorname{arcsec}(|x|) \Big|_A^2 \\ &= \lim_{A \rightarrow 1^+} \operatorname{arcsec}(|2|) - \operatorname{arcsec}(|A|) \\ &= \frac{\pi}{3} - 0 \\ &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

Alors, c'est convergent.

Pour le deuxième cas, soit  $\int_a^b f(x) dx$

(1) Si  $f$  est continue sur  $[a, \infty[$  alors

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{B \rightarrow \infty} \int_a^B f(x) dx$$

si la limite existe.

(2) Si  $f$  est continue sur  $] -\infty, b]$  alors

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^b f(x) dx$$

si la limite existe.

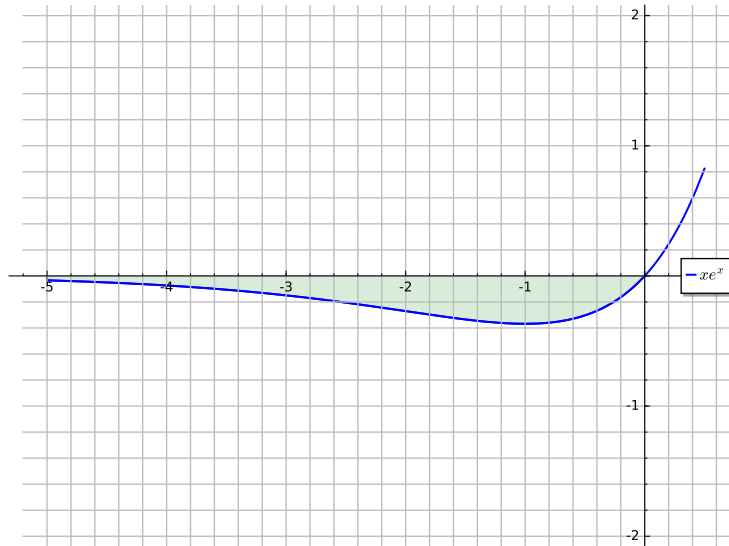
(3) Si  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  alors

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^c f(x) dx + \lim_{B \rightarrow \infty} \int_c^B f(x) dx$$

si les limites existent pour un  $c \in \mathbb{R}$ .

Faisons des exemples.

**Exemples 8.5** (1) Déterminer si  $\int_{-\infty}^0 xe^x dx$  est convergente ou divergente.  
On voit que  $xe^x$  est continue sur  $] -\infty, 0]$  :



Alors, on a

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^0 xe^x dx &= \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^0 xe^x dx \\
 &= \lim_{A \rightarrow -\infty} \left. xe^x \right|_A^0 - \int_A^0 e^x dx \\
 &= \lim_{A \rightarrow -\infty} xe^x - e^x \Big|_A^0 \\
 &= \lim_{A \rightarrow -\infty} 0e^0 - e^0 - Ae^A + e^A \\
 &= 0 - 1 - \lim_{A \rightarrow -\infty} Ae^A + e^A \\
 &= -1 - \lim_{A \rightarrow -\infty} \frac{A}{e^{-A}} + 0 \\
 &= -1 - \lim_{A \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-A}} \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

Ainsi, c'est convergent.

(2) Déterminer si  $\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x) dx$  est convergente ou divergente. Au début on commence en faisant une mauvaise chose !

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \sin(x) dx &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A \sin(x) dx \\
 &= \lim_{A \rightarrow \infty} 0 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

NOOOON!!!!

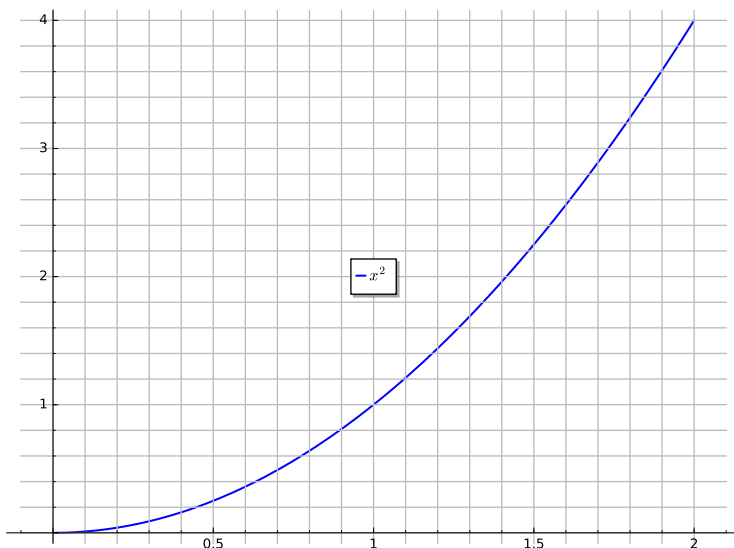
Le problème c'est que on a pas utilisé la bonne formule !

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(x) dx &= \frac{\lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^0 \sin(x) dx + \lim_{B \rightarrow \infty} \int_0^B \sin(x) dx}{=} \\ &= \frac{\lim_{A \rightarrow -\infty} \cos(x)|_A^0 + \lim_{B \rightarrow \infty} \cos(x)|_0^B}{=} \\ &= \lim_{A \rightarrow -\infty} \cos(1) - \cos(A) + \lim_{B \rightarrow \infty} \cos(B) - \cos(1) \\ &= \lim_{A \rightarrow -\infty} -\cos(A) + \lim_{B \rightarrow \infty} \cos(B) \end{aligned}$$

Mais aucun entre ces deux limites n'est pas bien définie ! Alors, les limites n'existent pas ! D'où  $\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x) dx$  est divergent.

## 8.2. Partie 2.

8.2.1. Aire d'une surface de révolution (§3.5 ou §5.4). On a calculé le volume de la rotation d'une courbe autour d'un axe, mais comment est-ce qu'on peut calculer l'aire de la surface ? Là il faut utiliser les mêmes méthodes qu'on a vu avec le calcul de la longueur d'un arc d'une courbe plane. Si on peut calculer la longueur d'un arc, on peut calculer l'aire de la surface. Donc, disons qu'on a la courbe suivante entre  $(0, 0)$  et  $(1, 4)$  :



Avec une rotation autour de l'axe des  $x$  on a la formule :

$$2\pi r_i \Delta \ell_i$$

C'est quoi notre  $r_i$  ?  $f(x_i^*)$

C'est quoi notre  $\Delta \ell_i$  ?

$$\Delta \ell_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \Delta x_i \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}$$

En utilisant le théorème des accroissements finis :  $\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(c)$  pour un  $c \in ]x_{i-1}, x_i[$ .

Alors on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 2\pi f(x_i^*) \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Et si on a fait la rotation autour de l'axe des  $y$  on aura :

$$r_i = \underline{x_i} \quad \Delta \ell_i = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}$$

Donc, selon l'axe des  $y$ , on change la formule de l'intégration pour :

$$\int_a^b 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

**Exemple 8.6** Faisons un exemple assez simple :  $f(x) = \sqrt{x}$ . Avec une rotation autour de l'axe des  $x$  de  $(0, 0)$  à  $(4, 2)$  on a que l'aire de la surface est :

$$\begin{aligned} \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx &= \int_0^4 2\pi \sqrt{x} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2} dx \\ &= 2\pi \int_0^4 \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} dx \\ &= 2\pi \int_0^4 \sqrt{x} \sqrt{\frac{4x+1}{4x}} dx \\ &= \pi \int_0^4 \sqrt{4x+1} dx \\ &= \pi \int_1^{17} \sqrt{u} \frac{du}{4} \\ &= \frac{\pi}{4} \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3} \Big|_1^{17} \\ &= \frac{\pi}{6} \left(17^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right) \\ &= \frac{\pi}{6} \left(17^{\frac{3}{2}} - 1\right) \end{aligned}$$

**Exemple 8.7** Et si maintenant on fait un exemple avec la formule  $f(x) = x^2$  où on fait une rotation autour de l'axe des  $y$  de  $(0, 0)$  à  $(2, 4)$ .

$$\begin{aligned}
 \int_a^b 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx &= \int_0^2 2\pi x \sqrt{1 + (2x)^2} dx \\
 &= \int_0^2 2\pi x \sqrt{1 + 4x^2} dx \\
 &= \frac{\pi}{4} \int_1^{17} \sqrt{u} du \\
 &= \frac{\pi}{4} \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3} \Big|_1^{17} \\
 &= \frac{\pi}{6} \left(17^{\frac{3}{2}} - 1\right)
 \end{aligned}$$

		Axe de rotation	
		Rotation autour de l'axe des $x$	Rotation autour de l'axe des $y$
Description de la courbe	$y = f(x) \ x \in [a, b]$	$\int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$	$\int_a^b 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$
	$x = g(y) \ y \in [c, d]$	$\int_c^d 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$	$\int_c^d 2\pi g(y) \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$

## 9. SEMAINE 9 : 26 NOVEMBRE 2018

## 9.1. Partie 1.

## 9.1.1. Rappel.

(1) algo

9.1.2. *Équations différentielles (§4 ou §2.3).* Une équation à plusieurs variables dans laquelle il y a une relation entre une fonction inconnue et une ou plusieurs de ses dérivées, ou une relation des différentielles est appelée une *équation différentielle*.

**Exemples 9.1** Des exemples :

(1)  $\frac{dy}{dx} = 1$

(2)  $V \frac{dP}{dt} = nr$

(3)  $y'' + 2y' - 3 = x'$

(4)  $y^2 + \frac{dy}{dt} = t^3$

(5)  $\frac{dQ}{du} = kQ$  ( $k$  une constante)

Have them make their own examples

Une équation différentielle est *ordinaire* si il y a au plus deux variables, ainsi que des dérivées d'ordre supérieur ou égal à 1 d'une des variables par rapport à l'autre. Quels exemples en haut sont ordinaires ?

(1) oui(2) non(3) oui(4) oui(5) oui

*L'ordre* d'une équation différentielle est le plus élevé des ordres des dérivées contenues.

(1) 1(2) 1(3) 2(4) 1(5) 1

Une *solution* d'une équation différentielle est une fonction qui ne contient aucune dérivée et aucune différentielle, et qui satisfait cette équation.

**Exemple 9.2** La fonction  $y = 2x^2 + \sin(x)$  est une solution de  $\frac{d^2y}{dx^2} - x^2 = 2 - \frac{y}{2}$ 

$$\frac{dy}{dx} = 4x + \cos(x) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 4 - \sin(x)$$

**Exemple 9.3** La fonction  $y = 1 - x$  est une solution de  $7y'' + y' + y + x = 0$ .

$$y' = -1 \quad y'' = 0$$

Une équation différentielle est à *variables séparables* si on peut l'écrire sous la forme

$$g(y) dy = f(x) dx$$

**Exemple 9.4** Lesquelles sont à variables séparables ?

$$\frac{dy}{dx} = \sin(x) \cos(y) \text{ oui } \quad \frac{dy}{dx} = \sin(xy) \text{ non } \quad \frac{dy}{dx} = e^{2x+3y} \text{ oui } \quad \frac{dy}{dx} = x^y \text{ non }$$

$$\sec(y) dy = \sin(x) dx \quad - \quad e^{-3y} dy = e^{2x} dx \quad -$$

Et pourquoi on veut avoir une équation différentielle à variables séparables ? Car dans ce cas, c'est facile de trouver une solution !

**Exemple 9.5** Faisons  $\frac{dy}{dx} = \sin(x) \cos(y)$ . Ça nous donne :  $\sec(y) dy = \sin(x) dx$ . On va utiliser l'intégration !

$$\begin{aligned} \int \sec(y) dy &= \int \sin(x) dx \\ \ln(|\sec(y) + \tan(y)|) + c_y &= -\cos(x) + c_x \\ \ln(|\sec(y) + \tan(y)|) &= -\cos(x) - C \end{aligned}$$

Donc, on a une solution générale pour notre équation différentielle.

Une solution est appelée *implicite* si on peut mettre la solution sous la forme  $F(x, y, C) = 0$ . Notre exemple a comme solution implicite :

$$\ln(|\sec(y) + \tan(y)|) + \cos(x) + C = 0$$

Une solution est appelée *explicite* si on peut mettre la solution sous la forme  $y = f(x, C)$ . On peut trouver une solution explicite par rapport à  $x$  facilement pour notre exemple :

$$x = \arccos(-\ln(|\sec(y) + \tan(y)|) + C)$$

Par contre, par rapport à  $y$ , il n'y a pas de solution explicite.

**Exemple 9.6** Faisons un autre exemple :  $\frac{dy}{dx} = e^{2x+3y}$ . On a  $e^{-3y} dy = e^{2x} dx$ . Alors

$$\begin{aligned} \int e^{-3y} dy &= \int e^{2x} dx \\ \frac{e^{-3y}}{-3} + c_y &= \frac{e^{2x}}{2} + c_x \\ e^{-3y} &= \frac{-3e^{2x}}{2} + c \\ y &= \frac{\ln\left(\frac{-3}{2}\right) + 2x}{-3} + c \end{aligned}$$

On voit que cet exemple a une solution explicite.

Une *condition initiale* est une condition imposée pour les valeurs de  $x$  ou  $y$ . Par exemple, on peut imposer que  $y = 0$  lorsque  $x = 1$ . Ça nous aide à trouver nos constantes  $C$  et en même temps nous donne une solution *particulière*.

Pour trouver une solution particulière il nous faut  $n$  conditions initiales où  $n$  est l'ordre de l'équation différentielle.

**Exemple 9.7** Soit l'équation différentielle  $2y''' = 3x + 6$ , trouvez une solution particulière.

Pour trouver une solution particulière, il nous faut 3 conditions initiales. Donc, disons qu'on a

$$(0, 0) \quad (1, 1) \quad (-1, 0)$$

comme solutions à notre équation différentielle.

Commençons par trouver une solution implicite.

$$\begin{aligned} 2y''' &= 2 \frac{d(y'')}{dx} = 3x + 6 \\ \int 2d(y'') &= \int 3x + 6 \, dx \\ 2y'' &= \underline{\frac{3}{2}x^2 + 6x + C_1} \\ \int 2d(y') &= \int \frac{3}{2}x^2 + 6x + C_1 \, dx \\ 2y' &= \underline{\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 + C_1x + C_2} \\ \int 2 \, dy &= \int \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 + C_1x + C_2 \, dx \\ 2y &= \underline{\frac{x^4}{8} + x^3 + \frac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3} \end{aligned}$$

Avec nos conditions initiales on a :

$$\begin{aligned} y = 0, x = 0 &\Rightarrow \underline{C_3 = 0} \\ y = 1, x = 1 &\Rightarrow \underline{2 \cdot 1 = \frac{1}{8} + 1 + \frac{C_1}{2} + C_2} \\ y = 0, x = -1 &\Rightarrow \underline{0 = \frac{1}{8} - 1 + \frac{C_1}{2} - C_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{1}{8} - 1 + \frac{C_1}{2} \\ 2 &= \frac{1}{8} + 1 + \frac{C_1}{2} + \frac{1}{8} - 1 + \frac{C_1}{2} = \frac{1}{4} + C_1 \\ \Rightarrow C_1 &= \frac{7}{4} \\ \Rightarrow C_2 &= \frac{1}{8} - \frac{8}{8} + \frac{7}{8} = 0 \end{aligned}$$

Donc, notre solution particulière est :

$$y = \frac{x^4}{8} + x^3 + \frac{7x^2}{8}$$

9.1.3. *Suites* (§6.2 ou §6.1). Une *suite* est une séquences des nombres.

**Exemple 9.8** (1)  $\{1, 1, 1, 1, 1, \dots\}$

(2)  $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

(3)  $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\}$

(4)  $\{1, 2, 6, 24, 120, \dots\}$

(5)  $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots\}$

(6)  $\{1, 1, 2, 5, 14, 42, \dots\}$

(7) Make your own

Plus précisément, une *suite* est une fonction dont le domaine est un ensemble  $E \subseteq \mathbb{N}$ . On a deux façons d'écrire une suite donnée :

$$\{a_1, a_2, a_3, \dots\} \quad f(n) = a_n$$

Si notre suite est donné par une fonction explicite, le terme  $a_n$  est appelé un *terme général* de la suite. Ça nous permet d'utiliser la notation :  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  ou  $\{a_n\}$  pour désigner la suite.

**Exemple 9.9** (1)  $\{1, 1, 1, 1, 1, \dots\} = \{1\}$

(2)  $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\} = \{i\}$

(3)  $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\} = \left\{ \frac{1}{i+1} \right\}$

(4)  $\{1, 2, 6, 24, 120, \dots\} = \{i!\}$

(5)  $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots\} = \left\{ \frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}} \right\}$  où  $\varphi = 1.61803398874989\dots$

(6)  $\{1, 1, 2, 5, 14, 42, \dots\} = \left\{ \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \right\}$

(7) Make your own

**Exemple 9.10** C'est quoi le terme général de la suite  $\{\frac{1}{3}, \frac{-1}{6}, \frac{1}{11}, \frac{-1}{18}, \frac{1}{27}, \dots\}$  ?

$$\left\{ \frac{(-1)^{i+1}}{i^2 + 2} \right\}$$

9.2. **Partie 2.** On peut aussi définir une suite en utilisant les termes précédents. Une suite est *définie par récurrence* si la valeur des premiers termes est donnée et que le terme général est défini en fonction des termes précédents.

**Exemple 9.11** (1)  $\{1, 1, 1, 1, 1, \dots\} : a_1 = 1$  et  $a_n = a_{n-1}$ .

(2)  $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\} : a_1 = 1$  et  $a_n = a_{n-1} + 1$ .

(3)  $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\} : a_1 = \frac{1}{2}$  et  $a_n = \frac{n-1}{n} a_{n-1}$ .

(4)  $\{1, 2, 6, 24, 120, \dots\} : a_1 = 1$  et  $a_n = n a_{n-1}$ .

(5)  $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots\} : a_1 = 1$  et  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ .

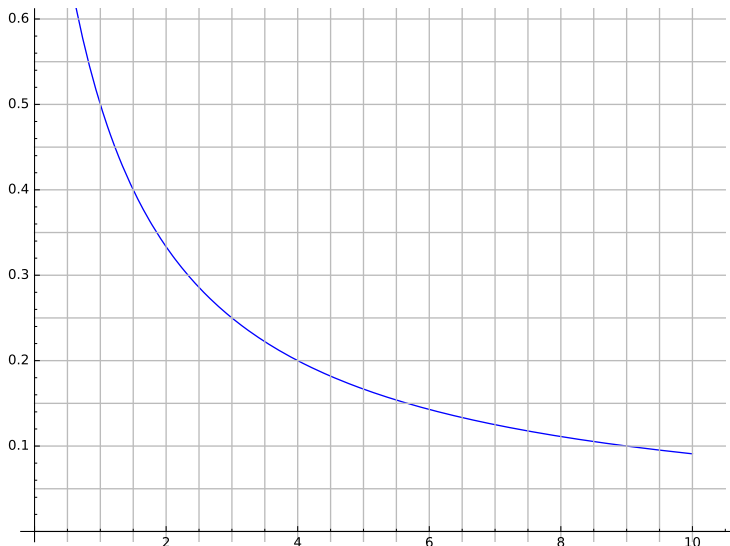
(6)  $\{1, 1, 2, 5, 14, 42, \dots\} : a_1 = 1$  et  $a_n = \frac{2(2n-1)}{n+1} a_{n-1}$ .

(7) Make your own

Donc, on peut voir que, des fois, la définition récursive est plus simple que la définition explicite.

On peut voir les suites comme des graphes.

**Exemple 9.12**  $\left\{ \frac{1}{n+1} \right\}$  :



Une suite est *croissante* si  $a_n \geq a_{n-1}$  et *strictement croissante* si  $a_n > a_{n-1}$  pour tout  $n$ . De la même façon, une suite est *décroissante* si  $a_n \leq a_{n-1}$  et *strictement décroissante* si  $a_n < a_{n-1}$  pour tout  $n$ . Une suite est *monotone* si elle est croissante ou décroissante.

Une suite  $\{a_n\}$  est *bornée supérieurement* s'il existe un nombre réel  $B$  t.q.  $a_n \leq B$  pour tout  $n$ . De la même façon, une suite est *bornée inférieurement* s'il existe un nombre réel  $b$  t.q.  $a_n \geq b$  pour tout  $n$ . Une suite est *bornée* si elle est bornée supérieurement ou bornée inférieurement.

		Bornée sup ?	Bornée inf ?	Monotone ? (si oui, laquelle ?)
$\left\{ \frac{1}{n} \right\}$	$\left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\}$	1	0	décroissante
$\{(-1)^n\}$	$\{-1, 1, -1, 1, \dots\}$	<u>1</u>	<u>-1</u>	<u>non</u>
$\{n\}$	$\{1, 2, 3, 4\}$	<u>n</u>	<u>1</u>	<u>cro</u>
$\{(-1)^n n\}$	$\{-1, 2, -3, 4\}$	<u>n</u>	<u>n</u>	<u>non</u>

**Théorème 9.13** Soit une suite  $\{a_n\}$  et une fonction  $f$  telles que  $f(n) = a_n$  et  $f(x)$  est continue. Si  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$  où  $L \in \mathbb{R} \cup \pm\infty$  alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ .

Si  $L \in \mathbb{R}$  on dit que la suite  $\{a_n\}$  converge vers  $L$  et que la suite est *convergente*. Si  $L \in \pm\infty$  ou  $L$  n'existe pas on dit que la suite *diverge* ou que la suite est *divergente*.

**Théorème 9.14** Soit une suite  $\{a_n\}$ .

- Si  $\{a_n\}$  converge alors elle est *bornée*.
- Si  $\{a_n\}$  n'est pas bornée alors elle diverge.
- Si  $\{a_n\}$  est monotone, alors elle converge si et seulement si elle est bornée.

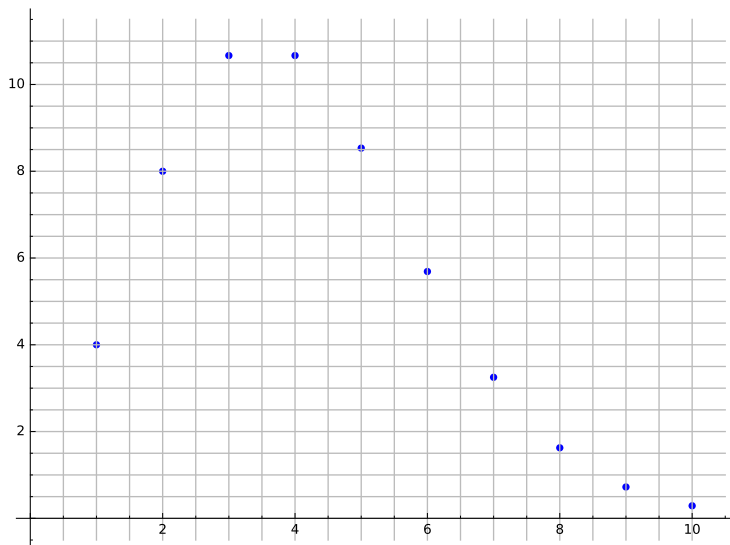
—  $\{a_n\}$  converge vers 0 si et seulement si  $\{|a_n|\}$  converge vers 0.

**Théorème 9.15** Soit une suite  $\{a_n\}$  qui converge vers  $L_1$  et une suite  $\{b_n\}$  qui converge vers  $L_2$  et  $C \in \mathbb{R}$ . Alors

- $\{C\}$  converge vers  $C$ .
- $\{a_n \pm b_n\}$  converge vers  $L_1 \pm L_2$ .
- $\{Ca_n\}$  converge vers  $CL_1$ .
- $\{a_nb_n\}$  converge vers  $L_1L_2$ .
- $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$  converge vers  $\frac{L_1}{L_2}$ .

**Théorème 9.16** (Théorème du sandwich) Soit les suites  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  et  $\{c_n\}$  telles que  $a_n \leq c_n \leq b_n$  pour tout  $n \geq m$  pour  $m \in \mathbb{N}$ . Alors si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$  alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$ .

**Exemple 9.17** Soit  $\{a_n\} = \left\{\frac{4^n}{n!}\right\} = \left\{4, 8, \frac{32}{3}, \frac{32}{3}, \frac{128}{15}, \frac{256}{45}, \frac{1024}{315}\right\}$ .



Déjà on peut voir qu'elle va converger vers 0. Alors, il nous faut trouver une autre suite qui va faire un sandwich.

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{4^n}{n!} \\
 &= \frac{4}{n} \cdot \frac{4}{n-1} \cdot \frac{4}{n-2} \cdots \frac{4}{4} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{4}{1} \\
 &\leq \frac{4}{n} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{2} \cdot 4 \\
 &= \frac{4^4}{6n}
 \end{aligned}$$

Mais on peut voir que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^4}{6n} = 0$ . Alors, parce que  $0 \leq \frac{4^n}{n!} \leq \frac{4^4}{6n}$  on a que  $\{a_n\}$  converge vers 0.

**Exemple 9.18** Soit  $\{a_n\} = \left\{2 + \frac{\sin(n)}{n^3}\right\}$ . On voit que  $2 + \frac{-1}{n^3} \leq 2 + \frac{\sin(n)}{n^3} \leq 2 + \frac{1}{n^3}$ . Mais  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \frac{-1}{n^3} = 2$  et également  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \frac{1}{n^3} = 2$ . Alors  $\{a_n\}$  converge vers 2.

9.2.1. *Séries infinies (§6.4 ou §6.2).* Une *série infinie* (ou *série*) est la somme suivante d'une suite :  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + \dots$ . Alors chaque suite est associée à une série.

**Exemple 9.19** Soit la suite  $\{(-1)^n\}$  la série qui lui est associée est la série :

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Une *somme partielle*  $S_n$  d'une série est la somme des  $n$  premiers termes de la série.

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

La *somme* (si elle existe) de la série est :

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i$$

La *suite des sommes partielles*  $\{S_n\}$  est la suite des sommes partielles.

On dit que la série  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  *converge* si  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \in \mathbb{R}$ . On dit que la série  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  *diverge* si  $S \in \{\pm\infty\}$  ou n'existe pas.

**Exemple 9.20** Soit la suite  $\left\{\frac{1}{3^n}\right\}$ . Alors la série est donnée par

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots$$

Les sommes partielles sont données par :

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{3} \\ S_2 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9} \\ S_3 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} = \frac{13}{27} \\ S_4 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} = \frac{40}{81} \\ &\vdots \\ S_n &= \frac{3^n - 1}{2 \cdot 3^n} \end{aligned}$$

Alors on cherche  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ .

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 1}{2 \cdot 3^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \ln(3)}{2 \cdot 3^n \ln(3)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Alors notre série converge vers  $\frac{1}{2}$ .

**Théorème 9.21** Si  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  converge, alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

**Théorème 9.22** Si  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  et  $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$  sont deux séries convergentes respectivement vers  $A$  et  $B$ , et si  $c, k \in \mathbb{R}$  alors  $\sum_{i=1}^{\infty} (ca_i + kb_i)$  converge vers  $cA + kB$ .

**Théorème 9.23** Si  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  diverge,  $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$  converge et  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Alors  $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i \pm b_i)$  et  $\sum_{i=1}^{\infty} ca_i$  divergent.

9.2.2. *Séries importants* (§6.6 ou §6.2). La série harmonique est la série  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ . Elle est divergente vers  $\infty$ .

Une série de la forme  $\sum_{i=1}^{\infty} (a + (i-1)d)$  est une série *arithmétique* de premier terme  $a$  et de *raison*  $d$ .

$$\sum_{i=1}^{\infty} (a + (i-1)d) = a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d) + \dots$$

**Exemple 9.24** Soit la série suivante :

$$A = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$$

c'est une série arithmétique avec  $d = 1$  et  $a = 1$ . Ainsi,  $A = \sum_{i=1}^{\infty} 1 + 1(i-1)$ .

**Exemple 9.25** Soit la série suivante :

$$B = 2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17 + \dots$$

C'est une série arithmétique avec  $d = 3$  et  $a = 2$ . Ainsi,  $B = \sum_{i=1}^{\infty} 2 + 3(i-1)$ .

**Théorème 9.26** Soit la série arithmétique  $\sum_{i=1}^{\infty} (a + (i-1)d)$  alors elle diverge pour tout  $d \in \mathbb{R}$  sauf si  $a = 0$  et  $d = 0$ . En plus la somme partielle  $S_n$  est donnée par :

$$S_n = na + \frac{n(n-1)}{2}d$$

**Exemple 9.27** Pour nos exemples :

$$A : S_n = n + \frac{n(n-1)}{2} \quad B : S_n = 2n + \frac{3n(n-1)}{2}$$

Une série de la forme  $\sum_{i=1}^{\infty} ar^{i-1}$  est une série *géométrique* de premier terme  $a$  et de *raison*  $r$ .

$$\sum_{i=1}^{\infty} ar^{i-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots$$

**Exemple 9.28** Soit la série suivante :

$$C : 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \dots$$

C'est une série géométrique avec  $r = 2$  et  $a = 1$ . Ainsi,  $C = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{i-1}$ .

**Exemple 9.29** Soit la série suivante :

$$D : \pi + \pi 3 + \pi 3^2 + \pi 3^3 + \dots$$

C'est une série géométrique avec  $r = 3$  et  $a = \pi$ . Ainsi,  $D = \sum_{i=1}^{\infty} \pi 3^{i-1}$ .

**Théorème 9.30** Soit la série géométrique  $\sum_{i=1}^{\infty} ar^{i-1}$  où  $r \neq 1$  alors la somme partielle  $S_n$  est donnée par :

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

**Exemple 9.31** Avec nos exemples on a :

$$C : S_n = \frac{1 - 2^n}{1 - 2} \quad D : S_n = \frac{\pi(1 - 3^n)}{1 - 3}$$

**Théorème 9.32** Soit la série géométrique  $\sum_{i=1}^{\infty} ar^{i-1}$  où  $a \neq 0$ , alors elle converge vers  $\frac{a}{1-r}$  si  $|r| < 1$  et diverge autrement.

## 10. SEMAINE 10 : 3 DECEMBRE 2018

Devoir 2 - Date d'échéance

10.1. **Partie 1.**10.1.1. *Rappel.*

(1) algo

10.1.2. *Séries à termes positifs (§6.7 ou §6.3).* Maintenant, notre but est de savoir si les séries sont convergentes ou pas. Pour ça il existe plein de critères qu'on peut utiliser pour nous aider.

(1) **Critère de l'intégrale**

**Théorème 10.1** Soit  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  où  $a_i > 0$  et  $f$  une fonction positive, continue et décroissante sur  $[1, \infty[$  t.q.  $f(n) = a_n$  pour tout  $n$ . Alors  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  et  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  sont convergentes toutes les deux ou sont divergentes toutes les deux.

**Exemple 10.2** Montrons que  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i}}$  diverge. Posons  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  qui est bien positive, continue et décroissante sur  $[1, \infty[$ . Alors,

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \lim_1^a \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} 2\sqrt{x}|_1^a = 2 \lim_{a \rightarrow \infty} \sqrt{a} - 1 = \infty$$

Alors  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i}}$  diverge.

Une série de Riemann est une série de la forme  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^p}$  où  $p \in \mathbb{R}$ .

**Théorème 10.3** Soit une série de Riemann,  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^p}$ , où  $p \in \mathbb{R}$ . Si  $p \leq 1$  alors la série diverge. Si  $p > 1$  alors la série converge.

(2) **Critère des polynômes**

**Théorème 10.4** Soit la série  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  où  $a_i > 0$  et  $a_i = \frac{P(i)}{Q(i)}$  t.q.  $P(i)$  et  $Q(i)$  sont deux polynômes de degrés respectifs  $p$  et  $q$ . Si  $q - p \leq 1$  alors la série diverge. Si  $q - p > 1$  alors la série converge.

**Exemple 10.5** Est-ce que les séries suivantes convergent ou divergent ?

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i+2}{i^4 + i^3 - i^2} \text{ converge,}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^3 + 3i^2}{i} \text{ diverge,}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i+2}{i^2} \text{ diverge.}$$

(3) **Critère de d'Alembert**

**Théorème 10.6** Soit la série  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  où  $a_i > 0$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ . Alors si  $r < 1$  la série converge. Si  $r > 1$  ou  $r = \infty$  la série diverge. Si  $r = 1$ , alors on ne peut rien conclure.

**Exemple 10.7** Soit  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{e^i}$ . Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{e^{i+1}}}{\frac{1}{e^i}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^i}{e^{i+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e} < 1$$

Alors  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{e^i}$  converge.

**Exemple 10.8** Soit  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{n}{2(n+1)}$ . Alors,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{2(n+2)}}{\frac{n}{2(n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot 2 \cdot (n+1)}{2(n+2)(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n^2 + 2n + 1)}{2(n^2 + 2n)} = 1$$

Donc, on peut rien conclure.

#### (4) Critère de Cauchy

**Théorème 10.9** Soit la série  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  où  $a_i > 0$  et  $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ . Si  $r < 1$  alors  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  converge. Si  $r > 1$  ou  $r = \infty$  alors  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  diverge. Si  $r = 1$  on peut rien conclure.

**Exemple 10.10** Soit  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^{33^n}}{n^3}$ . Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(2n+1)^{33^n}}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left( \frac{2n+1}{n} \right)^{\frac{33}{n}} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{33}{n}} = \underline{3}.$$

Donc,  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^{33^n}}{n^3}$  diverge.

#### (5) Critère de comparaison

**Théorème 10.11** Soit la série  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  où  $a_i > 0$ . Si  $a_i \leq c_i$  pour tout  $i \geq n$  où  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  et si  $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$  converge, alors  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  converge. Si  $a_i \geq d_i > 0$  pour tout  $i \geq n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  et si  $\sum_{i=1}^{\infty} d_i$  diverge, alors  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  diverge.

**Exemple 10.12** Soit la série  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{98+2\sin(i)}{i!}$ . Parce que  $0 \leq \frac{98+2\sin(i)}{i!}$  on peut utiliser le critère de comparaison.

$$\frac{98 + 2 \sin(i)}{i!} \leq \frac{98 + 2}{i!} = \frac{100}{i!}$$

Et, car  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{100}{i!}$  converge on sait que  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{98+2\sin(i)}{i!}$  converge aussi.

#### (6) Critère de comparaison à l'aide d'une limite

**Théorème 10.13** Soit la série  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  où  $a_i > 0$  et la série  $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$  où  $b_i > 0$ . Soit  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ , si la limite existe, où  $0 < L < \infty$ , alors si  $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$  converge alors  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  converge aussi. Si  $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$  diverge alors  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  diverge aussi.

**Exemple 10.14** Vérifions si  $\sum_{i=1}^{\infty} \sin\left(\frac{2}{\sqrt{i}}\right)$  converge ou pas. Soit  $b_i = \frac{1}{\sqrt{i}}$ . Alors

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right) \left(-x^{-\frac{3}{2}}\right)}{\frac{-1}{2} x^{-\frac{3}{2}}} \cdot n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right) \cdot -1 \cdot -2 \\ &= 2 \cdot 1 = 2 \end{aligned}$$

Et parce que  $\sum_{i=1}^{\infty} b_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i}}$  **diverge**, alors  $\sum_{i=1}^{\infty} \sin\left(\frac{2}{\sqrt{i}}\right)$  **diverge** aussi.

10.1.3. *Convergence absolue et convergence conditionnelle (§6.8 ou §6.4).* Une série alternée est une série de la forme suivante :

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} a_i \quad \text{ou} \quad -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i a_i$$

**Théorème 10.15** (Critère de Leibniz ou Critère de la série alternée) *Soit les séries alternées  $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i a_i$  et  $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} a_i$  où  $a_i > 0$ . Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  et si la suite  $\{a_n\}$  est décroissant à partir d'un certain indice, alors les deux séries convergent.*

Rappelons que si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$  alors les séries divergent.

**Exemple 10.16** Est-ce que la version alternée de la série harmonique converge ?  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{k}$ . Alors on peut voir que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$ . De plus, elle est décroissante parce que si  $f(x) = \frac{1}{x}$  alors  $f'(x) = \frac{-1}{x^2} < 0$  pour tout  $x > 0$ . Donc la série converge !

On dit une série  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  est **absolument convergente** si  $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$  converge.

**Théorème 10.17** *Si  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  est absolument convergente alors elle est convergente.*

Si une série est convergente mais pas absolument convergente on dit qu'elle est **conditionnellement convergente**.

**Exemple 10.18** On voit que  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i}$  n'est pas absolument convergente parce que la série harmonique :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^i}{i} \right| = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$$

ne converge pas. Mais parce que elle est convergente, on sait qu'elle est conditionnellement convergente.

**Exemple 10.19** Soit  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos(i)}{i^3}$ . Notons que  $\left| \frac{\cos(i)}{i^3} \right| \leq \frac{1}{i^3}$ . Mais,  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^3}$  est une série de Riemann avec  $p = 3 > 1$  alors elle converge. D'où, par comparaison on sait que  $\sum_{i=1}^{\infty} \left| \frac{\cos(i)}{i^3} \right|$  converge aussi. Donc  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos(i)}{i^3}$  est absolument convergente.

10.2. **Partie 2.**

10.2.1. *Séries de puissances (§6.9 ou §6.5).* Une *série de puissance en  $(x - a)$*  (ou une [série entière centrée en  \$a\$](#) ) est une série de la forme :

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i(x-a)^i = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \dots$$

où  $c_i \in \mathbb{R}$  et  $a \in \mathbb{R}$ .

**Exemples 10.20** Des exemples :

- (1)  $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$
- (2)  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(x-1)^i}{i}$
- (3)  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^i}{\sqrt{i+1}} (x-2)^i$
- (4) [Make your own](#)

Si on regarde le premier exemple, on peut voir que si  $|x| < 1$  alors elle va converger, et si  $|x| > 1$  alors elle va diverger.

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^i = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} (2)^i = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots$$

Donc on peut voir que, selon notre choix de  $x$ , la série peut diverger ou converger. L'ensemble  $I$  de tous les  $x$  tels que la série de puissance converge s'appelle [l'intervalle de convergence](#). Toute série de puissance a au moins un  $x$  tel que la série converge. En particulier si  $x = a$  alors  $\sum_{i=0}^{\infty} c_i(x-a)^i = 0$ .

Le [rayon de convergence](#)  $r$  est défini comme suit :

- (1) Si la série converge seulement pour  $x = a$  alors  $r = 0$ .
- (2) Si la série converge pour tout  $x$  t.q.  $|x - a| < r$  et diverge pour tout  $x$  t.q.  $|x - a| > r$ , alors le nombre  $r$  est le rayon de convergence.
- (3) si la série converge pour tout  $x \in \mathbb{R}$  alors  $r = \infty$ .

**Théorème 10.21** (Critère généralisé de d'Alembert) *Soit la série  $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$  où  $u_i \neq 0$ , et soit  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$ . Si  $R < 1$  alors la série converge absolument. Si  $R > 1$  ou si  $R = \infty$  alors la série diverge. Si  $R = 1$  alors on peut rien conclure.*

**Théorème 10.22** (Critère généralisé de Cauchy) *Soit la série  $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$  et soit  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|}$ . Si  $R < 1$  alors elle converge absolument. Si  $R > 1$  ou  $R = \infty$  alors elle diverge. Si  $R = 1$  alors on peut rien conclure.*

**Théorème 10.23** *Si  $\sum_{i=0}^{\infty} c_i(x-a)^i$  est une série de puissance, alors le rayon de convergence est donné par  $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$ , dans le mesure où cette limite existe ou vaut l'infini.*

10.2.2. *Séries de Taylor et de Maclaurin (§6.10 ou §6.6).* Finalement, on veut savoir si on peut intégrer une série entière. La réponse est donné par le théorème suivant :

**Théorème 10.24** *Si la série entière  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-a)^i$  a un rayon de convergence  $r > 0$ , alors la fonction définie par  $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-a)^i$  est dérivable et intégrable sur  $]a-r, a+r[$ . De plus,*

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i (x-a)^{i-1}$$

et

$$\int f(x) dx = C + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i(x-a)^{i+1}}{i+1}$$

le rayon de convergence de ces deux nouvelles séries vaut également  $r$ .

Maintenant, faisons quelque chose un peu bizarre (comme toujours).

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-a)^i \Rightarrow f(a) = \underline{a_0}$$

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i(x-a)^{i-1} \Rightarrow f'(a) = \underline{a_1}$$

$$f''(x) = \sum_{i=2}^{\infty} i \cdot i - 1 \cdot a_i(x-a)^{i-2} \Rightarrow f''(a) = \underline{2a_2}$$

$$f'''(x) = \sum_{i=3}^{\infty} i \cdot i - 1 \cdot i - 2 \cdot a_i(x-a)^{i-3} \Rightarrow f'''(a) = \underline{3 \cdot 2 \cdot a_3}$$

$$f^{(4)}(x) = \sum_{i=4}^{\infty} i \cdot i - 1 \cdot i - 2 \cdot i - 3 \cdot a_i(x-a)^{i-4} \Rightarrow f^{(4)}(a) = \underline{4 \cdot 3 \cdot 2a_4}$$

Donc, on a

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i$$

On appelle cette expression la *série de Taylor centrée en  $a$* . Si  $a = 0$  alors, c'est plutôt le *série de Maclaurin*.

Pour nous, la partie la plus importante c'est de trouver le développement de la fonction  $f(x) = e^x$ .

**Exemple 10.25** Rappelons que si  $f(x) = e^x$  alors  $f'(x) = e^x$ , et que  $e^0 = 1$ . Alors, si on veut la série de Maclaurin de  $f(x) = e^x$  on trouve :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

Mais quel est le rayon de convergence ? On a

$$\begin{aligned} r &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1/n!}{1/(n+1)!} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} |n+1| \\ &= \infty \end{aligned}$$

Donc la série converge pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . En particulier, pour  $x^2$  ! Alors, on peut finalement résoudre un problème qu'on a vu au début de cours :  $\int e^{(x^2)} dx$ .

$$e^{(x^2)} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(x^2)^i}{i!}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \int e^{(x^2)} dx &= \int \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i}}{i!} dx \\ &= C + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{(2i+1)}}{i! \cdot (2i+1)} dx \end{aligned}$$

11. SEMAINE 11 : 10 DECEMBRE 2018

11.1. **Partie 1.**

11.1.1. *Rappel.*

(1) Do something

## Examen Pratique

11.2. **Partie 2.**11.2.1. *Récapitulation - Un grand rappel.* Qu'est-ce que vous aimeriez voir ?

- (1) **Longueur de courbes planes** Soit  $y = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}$ . Trouver la longueur de la courbe entre l'origine et le point  $(2, 2)$ .

$$\begin{aligned} \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx &= \int_0^2 \sqrt{1 + (\sqrt{x})^2} dx \\ &= \int_1^3 \sqrt{u} du \\ &= \left. \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_1^3 \\ &= \frac{2 \cdot 3^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

- (2) **Intégration de fonctions rationnelles par décomposition en une somme de fractions partielles** Trouver l'intégrale suivante :

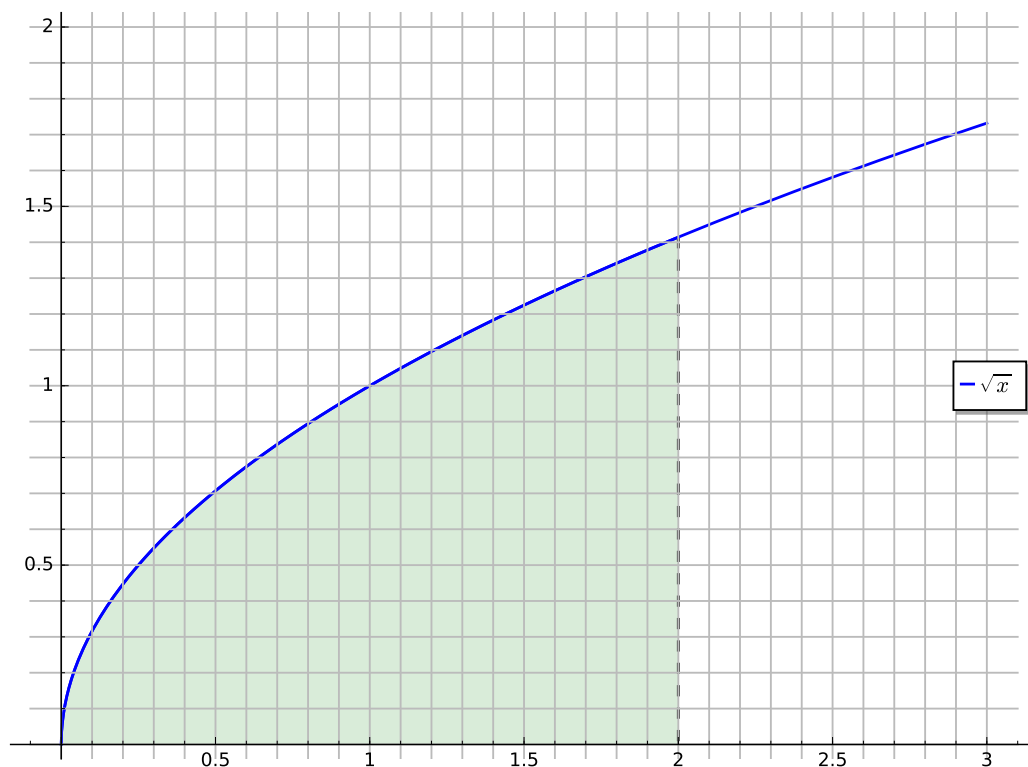
$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 + 11x + 9}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4} dx \\ \frac{3x^2 + 11x + 9}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4} &= \frac{3x^2 + 11x + 9}{(x+1)(x+2)^2} \\ &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} \\ 3x^2 + 11x + 9 &= \frac{A(x+2)^2 + B(x+1)(x+2) + C(x+1)}{(x+1)(x+2)^2} \\ A &= \underline{1} \\ B &= \underline{2} \\ C &= \underline{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 + 11x + 9}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4} dx &= \int \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^2} dx \\ &= \ln(|x+1|) + 2\ln(|x+2|) + \frac{-1}{x+2} + c \end{aligned}$$

- (3) **Volume de solides** On avait trois façons différentes pour trouver les volumes de la rotation d'une courbe autour d'un axe.

$$\begin{aligned} \int_a^b \pi (f(x))^2 dx &\quad \text{Méthode des } \underline{\text{disques}} \\ \int_a^b \pi (f(x))^2 - \pi (g(x))^2 dx &\quad \text{Méthode des } \underline{\text{disques troués}} \\ \int_a^b 2\pi x (f(x) - g(x)) dx &\quad \text{Méthode des } \underline{\text{tubes}} \end{aligned}$$

**Exemple 11.1** Trouver le volume du solide engendré par la révolution autour de l'axe des  $x$  de la surface plane bornée par  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = 0$  et  $x = 2$ .



$$\begin{aligned} \int_0^2 \pi (\sqrt{x})^2 dx &= \int_0^2 \pi x dx \\ &= \pi \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

#### (4) Intégrales impropres

(a) Si  $f$  est continue sur  $[a, b[$  et  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \pm\infty$  alors

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{B \rightarrow b^-} \int_a^B f(x) dx$$

si la limite existe.

(b) Si  $f$  est continue sur  $]a, b]$  et  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$  alors

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{A \rightarrow a^+} \int_A^b f(x) dx$$

si la limite existe.

- (c) Si  $f$  est continue sur  $]a, b[$ ,  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \pm\infty$  alors

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{A \rightarrow a^+} \int_A^c f(x) dx + \lim_{B \rightarrow b^-} \int_c^B f(x) dx$$

si les limites existent pour un  $c \in ]a, b[$ .

- (a) Si  $f$  est continue sur  $[a, \infty[$  alors

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{B \rightarrow \infty} \int_a^B f(x) dx$$

si la limite existe.

- (b) Si  $f$  est continue sur  $] -\infty, b]$  alors

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^b f(x) dx$$

si la limite existe.

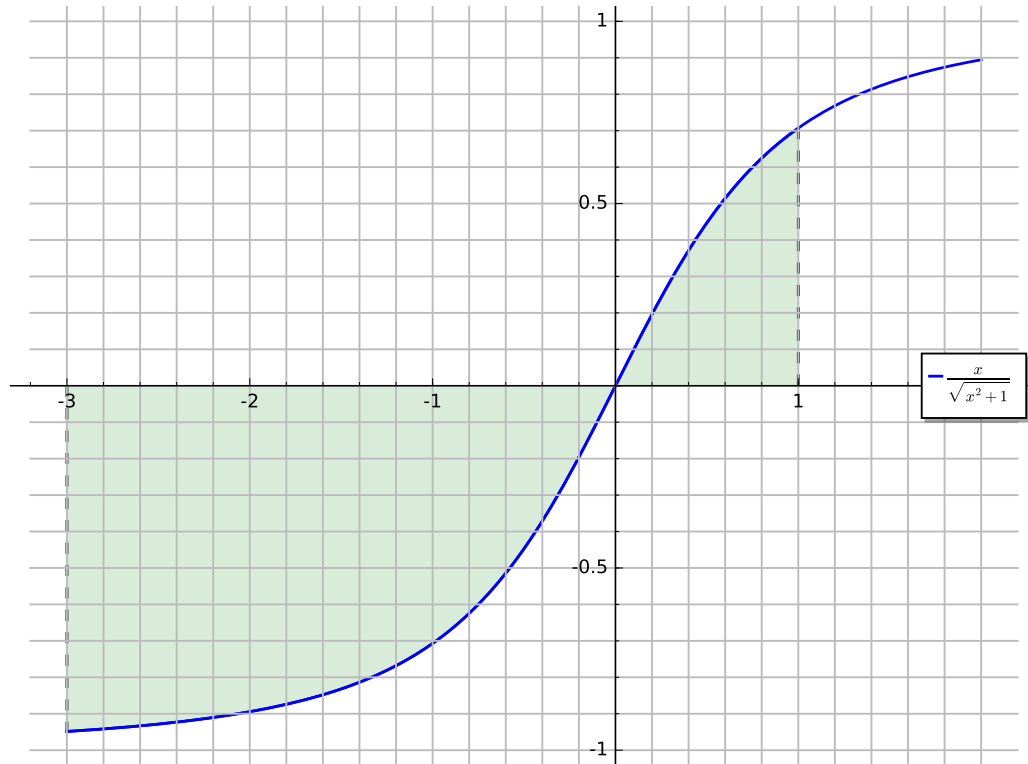
- (c) Si  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  alors

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^c f(x) dx + \lim_{B \rightarrow \infty} \int_c^B f(x) dx$$

si les limites existent pour un  $c \in \mathbb{R}$ .

**Exemple 11.2** Évaluer

$$\int_{-\infty}^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$



$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx &= \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx \\
 &= \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_{x=A}^{x=1} \frac{1}{2\sqrt{u}} du \\
 &= \lim_{A \rightarrow -\infty} \sqrt{u} \Big|_{x=A}^{x=1} \\
 &= \lim_{A \rightarrow -\infty} \sqrt{1+x^2} \Big|_A^1 \\
 &= \sqrt{1+1^2} - \lim_{A \rightarrow -\infty} \sqrt{1+A^2} \\
 &= -\infty
 \end{aligned}$$

Donc, l'intégrale diverge.

(5) Aire d'une surface de révolution

		Axe de rotation	
		Rotation autour de l'axe des $x$	Rotation autour de l'axe des $y$
Description de la courbe	$y = f(x) \quad x \in [a, b]$	$\int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$	$\int_a^b 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$
	$x = g(y) \quad y \in [c, d]$	$\int_c^d 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$	$\int_c^d 2\pi g(y) \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$

**Exemple 11.3** Calculer l'aire de la surface engendrée par la rotation de l'arc  $y = \frac{x^3}{3}$  autour de l'axe des  $x$  de  $x = 0$  à  $x = 3$

$$\begin{aligned}
 \int_0^3 2\pi \frac{x^3}{3} \sqrt{1 + (x^2)^2} dx &= \underline{2\pi \int_0^3 \frac{x^3}{3} \sqrt{1 + x^4} dx} \\
 &= 2\pi \int_1^{82} \frac{\sqrt{u}}{12} du \\
 &= \frac{\pi}{6} \frac{u^{3/2}}{3/2} \Big|_1^{82} \\
 &= \frac{\pi}{9} (82^{3/2} - 1)
 \end{aligned}$$

### (6) Équations différentielles

$$y'' = 6x + 2$$

- (a) C'est quoi l'ordre ? 2  
 (b) C'est à variables séparables ? oui  
 (c) Donne une solution générale.

$$y'' = 6x + 2$$

$$\underline{\int d(y') = \int 6x + 2 dx}$$

$$y' = 3x^2 + 2x + c_1$$

$$\underline{\int dy = \int 3x^2 + 2x + c_1 dx}$$

$$y = x^3 + x^2 + c_1x + c_2$$

- (d) Si  $(0, 1)$  et  $(2, 14)$ , c'est quoi la solution particulière ?

$$x = 0, y = 1 \Rightarrow \underline{c_2 = 1}$$

$$x = 2, y = 14 \Rightarrow \underline{c_1 = \frac{1}{2}}$$

$$y = \underline{x^3 + x^2 + \frac{x}{2} + 1}$$

### (7) Suites

Mot	Définition ou exemple
Suite	$1, 1, 1, 1, 1, \dots$
Terme Général	$\{a_n\} = \{1\}$
Par Récurrence	Si on a des premiers termes et un terme général
Croissante	$a_n \geq a_{n-1} \forall n$
Strictement Croissante	$a_n > a_{n-1} \forall n$
Décroissante	$a_n \leq a_{n-1} \forall n$
Strictement Décroissante	$a_n < a_{n-1} \forall n$
Monotone	Soit croissante, soit décroissante
Bornée supérieurement	$\exists B \in \mathbb{R} \text{ t.q. } a_n \leq B \forall n$
Bornée inférieurement	$\exists b \in \mathbb{R} \text{ t.q. } a_n \geq b \forall n$
Bornée	Soit bornée sup, soit bornée inf
Convergente	Si il existe $L \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$
Divergente	Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ n'existe pas ou c'est $\pm\infty$

On avait plein des théorèmes en plus.

**Théorème 11.4** Soit une suite  $\{a_n\}$ .

- Si  $\{a_n\}$  converge alors elle est bornée.
- Si  $\{a_n\}$  n'est pas bornée alors elle diverge.
- Si  $\{a_n\}$  est monotone, alors elle converge ssi elle est bornée.
- Si  $\{a_n\}$  converge vers 0 ssi  $\{|a_n|\}$  converge vers 0.

**Théorème 11.5** (Théorème du sandwich) Soit les suites  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$ ,  $\{c_n\}$ , t.q.  $a_n \leq c_n \leq b_n$  pour tout  $n \geq m$  pour  $m \in \mathbb{N}$ . Alors si  $\{a_n\}$  et  $\{b_n\}$  convergent vers  $L$ , alors  $\{c_n\}$  converge vers  $L$ .

**Exemple 11.6** Est-ce que les suites suivantes convergent ou pas ?

- (a)  $\left\{\frac{3}{n}\right\}$ ? **oui**  $L = 0$
- (b)  $\left\{\frac{n^2+1}{n+1}\right\}$ ? **non**  $L = \infty$
- (c)  $\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$ ? **oui** Converge ← monotone and bound
- (d)  $\left\{\frac{\sin(n)}{n}\right\}$ ? **oui**  $L = 0$  Sandwich

- (8) **Séries infinies** Une série est la somme  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  d'une suite  $\{a_n\}$  où les sommes partielles sont  $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$ .

La série converge si  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \in \mathbb{R}$ . Sinon, elle diverge.

### Séries importantes

— Série arithmétique de premier terme  $a$  et de raison  $d$  :  $\sum_{i=1}^{\infty} a + (i-1)d$ .

$$S_n = na + \frac{n(n-1)}{2}d$$

— Série géométrique de premier terme  $a$  et de raison  $r$  :  $\sum_{i=1}^{\infty} ar^{i-1}$ .

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

**Séries à termes positifs** Soit  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum a_i$  où  $a_i > 0$ .

Critère	
Critère de l'intégrale	Si $f(n) = a_n$ est continue et décroissante sur $[1, \infty[$ alors $\sum a_i$ est convergente ssi $\int_1^{\infty} f(x) dx$ est convergente.
Série de Riemann	$\sum \frac{1}{i^p}$ converge ssi $p > 1$ .
Critère des polynômes	Si $a_i = \frac{P(i)}{Q(i)}$ alors $\sum a_i$ converge ssi $\deg(Q) - \deg(P) > 1$ .
Critère de d'Alembert	Soit $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ . Si $r > 1$ alors $\sum a_i$ diverge. Si $r < 1$ alors $\sum a_i$ converge.
Critère de Cauchy	Soit $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = r$ . Si $r < 1$ alors $\sum a_i$ converge. Si $r > 1$ alors $\sum a_i$ diverge.
Critère de comparaison	Si $\sum c_i$ converge et $c_i \geq a_i$ pour tout $i \geq k \in \mathbb{N}$ alors $\sum a_i$ converge. Si $\sum d_i$ diverge et $d_i \leq a_i$ pour tout $i \geq k \in \mathbb{N}$ alors $\sum a_i$ diverge.
Critère de comparaison à l'aide d'une limite	Si $\sum b_i$ t.q. $b_i > 0$ . Soit $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in \mathbb{R}^+$ , alors $\sum a_i$ converge ssi $\sum b_i$ converge.
Critère de la série alternée	Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ et $\{a_n\}$ est décroissante à partir d'un certain indice, alors $\sum (-1)^i a_i$ et $\sum (-1)^{i+1} a_i$ convergent.
Absolument convergente	Si $\sum  a_i $ converge, alors $\sum a_i$ converge.

**Exemples 11.7** Est-ce que les séries suivantes converge ou diverge ?

(a)  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$  ? **div** ←  $1/2 + 1/4 + 1/4 + 1/8 + 1/8 + \dots$  **comparaison**

(b)  $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n+4}\right)^n$  ? **con**  $n$ -racine teste

(c)  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^3}$  ? **con** intégrale

(d)  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i+3}{i^2+i}$  ? **div** polynôme

(9) **Séries de puissances, de Taylor et de Maclaurin**

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i(x-a)^i = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots$$

Le rayon de convergence  $r$  :

- (a) Si la série converge seulement pour  $x = a$  alors  $r = 0$ .
- (b) Si la série converge pour tout  $x$  t.q.  $|x - a| < r$  et diverge pour tout  $x$  t.q.  $|x - a| > r$ , alors le nombre  $r$  est le rayon de convergence.
- (c) si la série converge pour tout  $x \in \mathbb{R}$  alors  $r = \infty$ .

**Théorème 11.8** Si  $\sum_{i=0}^{\infty} c_i(x-a)^i$  est une série de puissance, alors le rayon de convergence est donné par  $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$ , dans le mesure où cette limite existe ou vaut l'infini.

Série de Taylor :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i$$

Si  $a = 0$  alors, c'est un série de Maclaurin.

**Exemple 11.9** Développer la fonction  $f(x) = \ln(x)$  en série de Taylor centrée en 1 et donner le rayon de convergence.

$f(x)$	$\ln(x)$	$f(1)$	$\underline{0}$
$f'(x)$	$\frac{1}{x}$	$f'(1)$	$\underline{1}$
$f''(x)$	$\frac{-1}{x^2}$	$f''(1)$	$\underline{-1}$
$f'''(x)$	$\frac{2}{x^3}$	$f'''(1)$	$\underline{2}$
$f^{(4)}(x)$	$\frac{-2 \cdot 3}{x^4}$	$f^{(4)}(1)$	$\underline{-2 \cdot 3}$

$$\ln(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(1)}{i!} (x-1)^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i} (x-1)^i$$

Le rayon est donné par :

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n} \right| = 1$$