

Matemáticas I

Apuntes de clase - Versión Estudiante

Universidad de Loyola

Departamento de métodos cuantitativos

por Dr. Aram Dermenjian



Cálculo 1 ©2026 by Aram Dermenjian is licensed under CC BY-NC-SA 4.0. To view a copy of this license, visit

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Índice general

Bienvenida	1
1. Números complejos	3
1. Números	3
2. Historia	4
3. Números complejos	6
4. Representaciones	7
4.1. Representación gráfica	7
4.2. Representación binómica	8
4.3. Representaciones polar, trigonométrica y exponen- cial	8
5. Operaciones	10
5.1. Operaciones estándar	10
5.2. Conjugado	11
5.3. Potencias y raíces	12
2. Matrices y Elementary transformations	17
6. Matrices - Resumen rápido	17
6.1. Operaciones	18
7. Tipos de transformaciones	19
7.1. Operaciones por filas	19
7.2. Operaciones por columnas	21
7.3. Propiedades de transformaciones	23
8. Propiedades de matrices	23
8.1. Hallar la inversa	25
9. Sistemas de ecuaciones lineales	27
3. Espacios vectoriales	31
10. Espacios vectoriales	31
11. Combinaciones lineales	32
12. Bases	35
12.1. Sistemas generadores y bases	35
12.2. Canonical basis	38
13. Cambio de base	38

14.	Variedades lineales	42
14.1.	Variedad lineal	42
4.	Aplicaciones lineales	51
15.	Matriz asociada	51
16.	Expresión matricial y cambio de base	57
16.1.	Base canónica	58
17.	Imagen y núcleo	59
18.	Imagen y preimagen de una variedad lineal	62
19.	Polinomio característico, autovalores y autovectores	64
20.	Diagonalization	68
5.	Espacio euclídeo	71
21.	Producto escalar y espacio euclídeo	71
22.	Norms, angles, distance and orthogonality	72
23.	Gram-Schmidt process	73
24.	variedad lineal ortogonal	77
	Bibliografía	81

Bienvenida

¡Bienvenidos a Matemáticas II!

Este semestre vamos a trabajar con un montón de temas diferentes con el fin de que estén mejor preparados y cuenten con las herramientas necesarias para el álgebra lineal y el análisis. Estas notas están diseñadas para ayudarles a aprender mejor el material y guiarlos a lo largo del curso.

Cómo usar estas notas: Estas notas son diferentes de la mayoría de las notas de clase de matemáticas. Tienen huecos; ¡les falta información! Estas son las notas que utilizaré (literalmente) durante las clases, así que deberían ayudarles a seguir el ritmo. El propósito de estas notas es que no tengan que escribirlo todo; solo necesitan completar los huecos, lo que les dará más tiempo para escuchar las explicaciones y comprender mejor el material. Si necesitan añadir notas adicionales, hay muchísimo espacio en los márgenes. ¡Úsenlo! Estas son SUS notas. También he añadido enlaces a Wikipedia por si quieren otra referencia para los términos y las definiciones que veremos. Si sienten que usar estas notas dificulta su aprendizaje, entonces, por favor, utilicen otro sistema. El objetivo es aprender; así que usen lo que mejor les funcione.

Antes de comenzar una clase, les recomiendo echar un vistazo rápido a las notas (5-10 minutos) para hacerse una idea general de lo que veremos en clase. Recuerden repasar estas notas periódicamente para no olvidar los términos y ejemplos.

¡Buena suerte, creo en ustedes!

-Aram

Capítulo 1

Números complejos

1. Números

Trabajamos con números todos los días de nuestra vida. Ya sea que estemos llevando nuestras finanzas para asegurarnos de que nuestra cuenta bancaria no se quede vacía, calculando la probabilidad de sacar una buena nota en una asignatura o averiguando cuánto tiempo de nuestra vida hemos pasado haciendo *doomscrolling* en las redes sociales. Los números tienen una historia muy rica y existen muchos tipos y conjuntos de números diferentes.

Normalmente, cuando pensamos en números, pensamos en los números naturales. Los *números naturales* son simplemente los números que usamos habitualmente para contar.

1, 2, 3, 4, 5, ...

Normalmente usamos $\mathbb{N}$ para denotar el conjunto de todos los números naturales.



Dependiendo del libro que consultes, algunos autores consideran que 0 también es un número natural. Es un debate enorme dentro de la comunidad matemática, pero aquí supondremos, por lo general, que 0 no es un número natural.

Aunque el número 0 nos resulta hoy muy familiar, no fue hasta que el matemático indio Brahmagupta lo introdujo en el año 628 cuando comenzó a utilizarse en matemáticas. Este número incluso resultaba misterioso para Brahmagupta, quien cometió el error clásico de escribir en su libro que _____. Por cierto, los números negativos se utilizaban mucho antes y aparecieron como números varios siglos antes que el número 0.

Si añadimos 0 a los números naturales e incluimos también las versiones negativas de todos ellos, obtenemos los *números enteros*. De-

Wikipedia: [números naturales](#)

La “idea” del cero ya existía muchos siglos antes de Brahmagupta, y varias civilizaciones usaban un punto para representar el cero o simplemente dejaban un hueco. Sin embargo, en todos estos casos, el cero no se consideraba un número, sino un concepto.

Wikipedia: [números enteros](#)

notamos este conjunto por $\mathbb{Z}$, y contiene, por ejemplo, los siguientes elementos.

$$\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

Usamos la letra $\mathbb{Z}$ porque en alemán la palabra que significa “números” es “Zahlen”.

Wikipedia: [números racionales](#)
Aquí $\mathbb{Q}$ procede de la palabra francesa “quotient” y fue introducida por Bourbaki

Las fracciones también son muy antiguas: los babilonios ya tenían un sistema de fracciones hacia el año 1800 a. C. La barra horizontal que usamos habitualmente en las fracciones apareció por primera vez en la obra del matemático marroquí Abu Bakr al-Hassar, alrededor de 1200 (antes de eso, los números simplemente aparecían uno encima del otro, sin ninguna barra). Una fracción no es más que un número entero dividido entre otro número entero: $\frac{p}{q}$, donde $p, q \in \mathbb{Z}$. Esto nos proporciona otro conjunto de números, que llamamos *números racionales*, y que denotamos por $\mathbb{Q}$. Estos son algunos ejemplos de números racionales:

$$\frac{1}{2}, -2, \frac{22}{7}, \frac{-13}{37}, 0, \frac{-1}{99}, \dots$$

Hacia el año 500 a. C., los matemáticos griegos se dieron cuenta de que algunos números, como $\sqrt{2}$, no eran racionales. Es decir, no podían escribirse como una fracción de dos números enteros. En lugar de considerarlos números, los ignoraron y no los reconocieron como tales. La aceptación de las fracciones como números llegó durante la Edad Media gracias a matemáticos indios y chinos. Estos números se consideraban “números de medida”. Es decir, si tienes una regla, puedes medir esa cantidad. Cualquier número que pudiera medirse se denominaba *número real*. Estos incluían todas las fracciones, pero también otras longitudes que hasta entonces no habían aparecido. Denotamos el conjunto de los números reales mediante $\mathbb{R}$, que incluye todos los racionales y otros números como:

$$\pi, \sqrt{3}, \varphi, e, -\sqrt{7}, \dots$$

Wikipedia: [número real](#)

Wikipedia: [irracionales](#)

Los números que son reales, pero no racionales (como los de la lista anterior), se denominan habitualmente números *irracionales*.

Pero ¿qué pasa con los números complejos? Primero hablemos un poco de su historia.

2. Historia

Los números complejos comenzaron a aparecer en las matemáticas en el siglo 1 d. C., cuando el matemático griego Herón de Alejandría intentaba calcular el volumen de los troncos de las pirámides. Al hacer sus cálculos habituales, se encontró con algo muy extraño. Llegó al término $\sqrt{81 - 144} = \sqrt{-63}$. Para él, esto no tenía ningún sentido. Se preguntó: “¿Cómo puede un número, al multiplicarse por sí mismo, dar

un número negativo? ¡El producto de dos números negativos siempre es positivo!" Pensando que aquello era imposible, simplemente eliminó el signo $-$ de sus cálculos y usó $\sqrt{63}$ en su lugar.



Aunque lo hacemos con frecuencia por accidente, eliminar un signo $-$ sin ningún motivo no es una buena idea.

El tema dejó de estudiarse realmente hasta que los matemáticos italianos entraron en escena en el siglo XVI. En aquella época, las matemáticas estaban obsesionadas con encontrar las raíces de polinomios cúbicos y cuárticos. Se trata de polinomios como $x^3 + 2x^2 + x + 3$ y $x^4 - 7x^2 + 2x - 14$. Se enviaban problemas entre ellos para intentar demostrar que eran “mejores” que los demás. Así que la gran carrera consistía en encontrar una fórmula general como la que ya existía para el caso cuadrático.

En el caso cuadrático, la fórmula general para encontrar las raíces de un polinomio $ax^2 + bx + c$ viene dada por $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, que probablemente ya hayas visto.

El matemático Scipione del Ferro consiguió obtener una fórmula general para las funciones cúbicas, pero murió en 1526 y se llevó a la tumba sus secretos para resolverlas. Después, en 1535, el veneciano Niccolò Fontana Tartaglia redescubrió los métodos de del Ferro y comunicó sus ideas al milanés Girolamo Cardano (a quien juró mantenerlas en secreto). Aunque hizo esta promesa, Cardano la rompió cuando publicó los resultados de Tartaglia en *Ars Magna* en 1545. El libro presentaba las reglas de forma geométrica y reconocía que Tartaglia se las había comunicado y que Tartaglia las había aprendido de del Ferro. Tartaglia se enfureció porque Cardano había roto su promesa, lo que provocó una guerra (matemática) entre ambos. Cardano salió vencedor de esa guerra; por eso hoy llamamos a este método para resolver ecuaciones cúbicas el “método de Cardano”.

Las ecuaciones que descubrió del Ferro (y que Tartaglia redescubrió y Cardano robó) escondían algo que provocaría el mismo problema que había tenido Herón de Alejandría. El problema era que, incluso cuando todas las raíces eran reales y distintas, la mayoría de las veces aparecían números negativos dentro de la raíz cuadrada. Era absurdo. Incluso a Cardano le disgustaba trabajar con ellos; llamaba a estos números “tan sutiles como inútiles” y “tortura mental”. No fue hasta el matemático boloñés Raffaele Bombelli cuando los números negativos dentro de raíces cuadradas comenzaron a considerarse y estudiarse.

En su libro “L'algebra”, de 1572, Bombelli fue el primero en estudiar sistemáticamente los números negativos dentro de raíces cuadradas. Su libro fue tan popular que incluso Leibniz (uno de los fundadores del Cálculo) y Euler (quien tiene un millón de teoremas que llevan su nombre) lo leyeron y citaron. A Bombelli le disgustaban tanto que los

llamó “più radice di meno”, que significa “más la raíz de menos”. Esto se abrevió como *p.dm.*, de modo que $\sqrt{-2}$ se denotaba como *p.dm.2*. Los números complejos por fin estaban entrando en las matemáticas, pero todavía les quedaba un largo camino por recorrer.

Lo primero que hacía falta era ponerle un nombre a $\sqrt{-1}$. El término “imaginario” para $\sqrt{-1}$ apareció hacia 1637 gracias a René Descartes. Después hacía falta un símbolo, que Euler introdujo en 1770: utilizó la letra *i* porque cometía errores continuamente al trabajar con $\sqrt{-1}$. Aunque ya teníamos un nombre y un símbolo, nadie en la comunidad matemática utilizó realmente ninguno de los dos hasta 1867, cuando Gauss los empleó y consolidó su uso desde entonces.

3. Números complejos

Ahora que sabemos la historia de los números imaginarios, podemos aprovechar la gran cantidad de investigaciones que se han realizado sobre ellos durante los últimos siglos. Para empezar, definamos qué es exactamente un número complejo.

Wikipedia: [número imaginario](#)

Como hemos mencionado, llamamos *número imaginario* a $i = \sqrt{-1}$. Una de las mejores maneras de ver por qué necesitamos un número así es intentar resolver la siguiente ecuación:

$$x^2 + 1 = 0$$

Obviamente, $\pm\sqrt{-1}$ resuelve la ecuación y, por lo tanto, *i* es una parte importante de las matemáticas que nos ayuda a resolver ecuaciones polinómicas que normalmente no podríamos resolver. Esto nos lleva a nuestra primera definición, en la que formalizamos todo.

Wikipedia: [número complejo](#)

Definición 3.1 Un *número complejo* z es un par ordenado $z = (x, y)$ de números reales $x, y \in \mathbb{R}$. Decimos que x es la *parte real* de z y la denotamos por $\text{Re}(z) = x$. De manera similar, decimos que y es la *parte imaginaria* de z y la denotamos por $\text{Im}(z) = y$. Denotamos el conjunto de los números complejos por $\mathbb{C}$. Además, llamamos $(0, 1)$ *unidad imaginaria* y la denotamos por i .

Ejemplo 3.2 Consideremos $i = (0, 1)$. Sabemos que i representa $\sqrt{-1}$, así que $i^2 = -1$. En el mundo complejo, esto se escribiría como $i^2 = \underline{\hspace{2cm}}$. Por tanto, $\text{Re}(i^2) = \underline{\hspace{2cm}}$ y $\text{Im}(i^2) = \underline{\hspace{2cm}}$, ¡lo cual tiene sentido! Es claro que i^2 solo tenga parte real porque ¡es un número real!

Ejemplo 3.3 Consideremos $\sqrt{-4}$. ¿Cómo lo escribimos como número complejo?

Bien,

$$\sqrt{-4} =$$

Entonces $\text{Re}(\sqrt{-4}) = \underline{\hspace{2cm}}$ y $\text{Im}(\sqrt{-4}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

Esto también nos permite resolver ecuaciones cuadráticas arbitrarias.

Ejemplo 3.4 Por ejemplo, encontremos las raíces de

$$x^2 + 8x + 25 = 0$$

Por la fórmula cuadrática tenemos:

$$x =$$

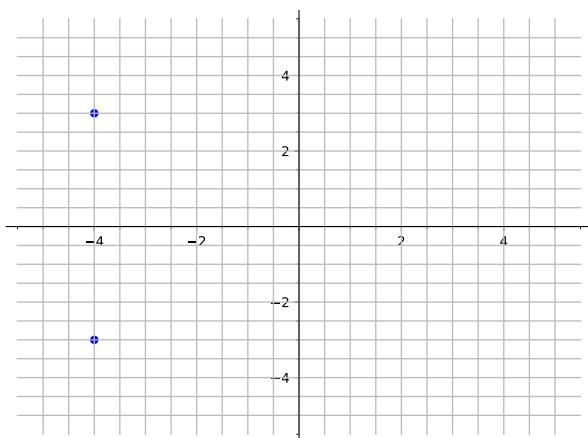
Al convertir esto a nuestra notación, tenemos que nuestras dos soluciones son _____ y _____.

4. Representaciones

4.1. Representación gráfica

Pensar en un número complejo como un par de números resulta un poco extraño, pero, si lo piensas, las fracciones funcionan de la misma manera. Son dos números, pero en lugar de ponerlos entre paréntesis, colocamos uno encima del otro. Escribir los números complejos como pares surgió debido a sus propiedades geométricas. ¿Qué tiene esto de geométrico? ¡Pues que es un par de números! ¿Y qué hacemos con un par de números? Podemos representarlo en una gráfica. Por ahora, puede que no tenga sentido por qué querríamos hacerlo, pero más adelante nos resultará útil.

Ejemplo 4.1 Veamos nuestro ejemplo anterior, en el que las raíces de $x^2 + 8x + 25 = 0$ eran $(-4, 3)$ y $(-4, -3)$. Podemos representarlo para obtener estos dos puntos:



Esto nos da la *representación gráfica* de un número complejo. Observa que, en este caso, el eje y se denomina *eje imaginario* y el eje x se llama *eje real*. Para diferenciar los puntos de una gráfica de los números complejos, usaremos (x, y) para denotar el número complejo y

$P(x, y)$ para denotar el punto. Para un número complejo (x, y) , su punto asociado $P(x, y)$ se denomina a veces *afijo* de z .

4.2. Representación binómica

Definición 4.2 Aunque todavía no le hemos puesto nombre, hay una segunda manera de hablar de los números complejos. Para un número complejo $z = (x, y)$, la *forma binómica* de z viene dada por $x + iy$. La forma binómica es la manera estándar de trabajar con números complejos, y normalmente usaremos esta notación.

Dado $z = x + iy$. Si $y = 0$, entonces $z = x \in \mathbb{R}$ y, por tanto, es un número real. Si $x = 0$, entonces $z = iy$ y se llama *número imaginario puro*. Observa que esta representación nos ayuda a distinguir mejor entre la parte real y la imaginaria que si utilizáramos coordenadas.

4.3. Representaciones polar, trigonométrica y exponencial

Usando la representación gráfica, podemos intentar utilizar coordenadas polares para obtener más representaciones de los números complejos. Como las coordenadas polares pueden resultar un poco extrañas, primero preparemos el terreno.

Recordemos primero que para las coordenadas polares necesitamos una longitud. El *módulo* $|z|$ de un número complejo $z = x + iy$ es la distancia al origen en la representación gráfica. Pero podemos calcularla fácilmente usando nuestra gráfica. Vemos que la longitud no es más que _____. En otras palabras, tenemos

$$|z| =$$

Como es una longitud, siempre será un número real.

Wikipedia: [argumento](#)

A continuación, necesitamos determinar el ángulo que forma el afijo con el eje real positivo. Este ángulo se conoce como el *argumento* de z y se denota por $\arg(z)$. Pero necesitamos saber cómo calcularlo.

Sea $z = x + iy$ un número complejo. Dado que sabemos los valores de x y de y , sabemos que _____. Despejando θ obtenemos $\theta =$ _____.

Pero aquí debemos tener cuidado, porque el argumento es el ángulo que forma el afijo con el eje real *positivo*. Esto significa que, dependiendo de la coordenada que elijamos, quizá tengamos que sumar algo a θ para obtener el ángulo adecuado.

En el cuadrante I no hay mucho problema: este θ coincide con el

argumento. En otras palabras, tenemos.

$$\arg(z) = \theta = \quad .$$

En los demás cuadrantes, como $\tan$ es periódica con período π , θ será correcta salvo por la suma de algún múltiplo de π .

Ejemplo 4.3 Consideremos primero $z = 1 + i$ y calculemos su módulo y su argumento.

Para el módulo tenemos:

$$|z| =$$

Para el argumento tenemos:

$$\theta =$$

Ahora debemos pensar en el punto asociado a z . Este punto es _____ y se encuentra en el cuadrante I. Esto nos facilita las cosas y no tenemos que cambiar nada. Así que tenemos $\arg(z) = \theta = \underline{\quad}$.

Ejemplo 4.4 Ahora consideremos $z = -1 - i$. Calcula su módulo y su argumento.

Para el módulo tenemos:

$$|z| =$$

Para el argumento tenemos:

$$\theta =$$

Ahora debemos pensar en el afijo de z . El afijo es el punto _____ y se encuentra en el cuadrante III. Esto significa que debemos modificar θ para obtener el argumento. En particular, solo tenemos que sumar π . Así que tenemos $\arg(z) = \theta + \pi = \underline{\quad}$.

Ejemplo 4.5 Usemos $z = -4 + 3i$ de nuestros ejemplos anteriores. Calcula su módulo y su argumento.

Primero tenemos:

$$|z| =$$

Para calcular el argumento tenemos:

$$\theta =$$

Ahora debemos pensar en el afijo de z . Este punto es _____

y se encuentra en el segundo cuadrante. Esto significa que debemos modificar θ para obtener el argumento. En particular, solo tenemos que sumar π . Así que tenemos $\arg(z) = \theta + \pi \approx \underline{\hspace{2cm}}$.

Ya tenemos lo suficiente para definir nuestras tres nuevas formas.

Definición 4.6 Sea $z = x + iy$ un número complejo. Sea $r = |z|$ su módulo y $\theta = \arg(z)$ su argumento.

Polar: La *forma polar* de z viene dada por $z = r\theta$.

Trigonométrica: La *forma trigonométrica* de z viene dada por $z = r(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta))$.

Exponencial: La *forma exponencial* de z viene dada por $z = re^{i\theta}$.

Observa que la forma trigonométrica nos proporciona una manera de pasar de r y θ a x e y . En particular,

$$x = \underline{\hspace{2cm}} \quad y = \underline{\hspace{2cm}}.$$

Ejemplo 4.7 En grupos pequeños, completad la siguiente tabla:

Cartesian	Binomial	Polar	Trigonometric	Exponential
$(1, -1)$				
	$\sqrt{3} - i$			
		$3\frac{\pi}{4}$		
			$2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$	
				$4e^{i\pi}$

5. Operaciones

Al igual que con los números reales, podemos hacer muchas operaciones diferentes con los números complejos.

5.1. Operaciones estándar

Las cuatro operaciones estándar (suma, resta, multiplicación y división) funcionan exactamente como esperaríamos. Lo único que hay que hacer es imaginar que i es una variable y, cada vez que aparezca i^2 , sustituirlo por -1 .

Para la suma y la resta, las cosas son muy sencillas:

$$\blacksquare z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$\blacksquare z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

Para la multiplicación, las cosas empiezan a complicarse un poco.

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) \\ &= x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + i^2y_1y_2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \end{aligned}$$

Como es de esperar, la división es bastante más complicada:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \\ &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} \\ &= \frac{(x_1x_2 - y_1(-y_2)) + i(x_1(-y_2) + y_1(x_2))}{(x_2x_2 - y_2(-y_2)) + i(x_2y_2 + x_2(-y_2))} \\ &= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_1 - y_2 + y_1x_2)}{x_2^2 + y_2^2} \end{aligned}$$

Ejemplo 5.1 Veamos un ejemplo. Sean $z_1 = 1 + i$ y $z_2 = 1 - 2i$. Calcula la siguiente:

$$\blacksquare z_1 + z_2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\blacksquare z_1 - z_2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\blacksquare z_1 \cdot z_2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\blacksquare \frac{z_1}{z_2} = \underline{\hspace{2cm}}$$

5.2. Conjugado

El *conjugado* de un número complejo $z = x + iy$ es el número $\bar{z} = x - iy$. Observa que lo único que hacemos es cambiar el signo de la parte imaginaria.

Wikipedia: [conjugado](#)

Proposición 5.2 Sean z , z_1 y z_2 dos números complejos. Entonces:

$$\blacksquare \overline{\bar{z}} = z$$

$$\blacksquare z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$$

$$\blacksquare |z| = |\bar{z}|$$

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

5.3. Potencias y raíces

También podemos considerar potencias de números complejos. Esto se ve inmediatamente al observar las potencias de i .

$$i^k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0, 4, 8, 12, \dots (k = 4n, n \in \mathbb{N}) \\ i & \text{si } k = 1, 5, 9, 13, \dots (k = 4n + 1, n \in \mathbb{N}) \\ -1 & \text{si } k = 2, 6, 10, 14, \dots (k = 4n + 2, n \in \mathbb{N}) \\ -i & \text{si } k = 3, 11, 15, \dots (k = 4n + 3, n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

¡Forman un ciclo!

También podemos obtener la potencia n -ésima de un número complejo arbitrario $z = re^{i\theta}$ usando su forma exponencial.

$$z^n = r^n e^{in\theta}.$$

También podemos usar la forma trigonométrica gracias a la fórmula de De Moivre.

Teorema 5.3 (Fórmula de De Moivre)

$$(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)$$

¿Y qué pasa con la forma polar? Para $z_1 = r_\alpha$ y $z_2 = s_\beta$ tenemos las siguientes operaciones:

- $r_\alpha \cdot s_\beta = (r \cdot s)_{\alpha+\beta}$
- $(r_\alpha)^n = r_{n\alpha}^n$
- $\frac{r_\alpha}{s_\beta} = \left(\frac{r}{s}\right)_{\alpha-\beta}$

Ejemplo 5.4 Para $z = 1 + i$, calcula z^{12} .

Ejemplo 5.5 Probemos con otro ejemplo. Calcula $i^{2019} + i^{2020} + i^{2021}$.

$$2019 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$2020 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$2021 = \underline{\hspace{2cm}}$$

Según nuestras fórmulas del principio de esta sección, esto significa:

$$i^{2019} = \underline{\hspace{1cm}} \quad i^{2020} = \underline{\hspace{1cm}} \quad i^{2021} = \underline{\hspace{1cm}}$$

Juntando todo esto, tenemos:

$$i^{2019} + i^{2020} + i^{2021} =$$

Por fin estamos preparados para trabajar con raíces. Supongamos que z y w son números complejos y que $n \in \mathbb{N}$. Supongamos además que tenemos $z = w^n$. En otras palabras, w es la raíz n -ésima de z . Podemos reescribir esto como $w = z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z}$.

Si $z = re^{i\theta} \neq 0$, sus raíces vienen dadas por:

$$w_k = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}, \quad \text{con } k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

¡Esto nos dice que hay n raíces! En particular, las n raíces son:

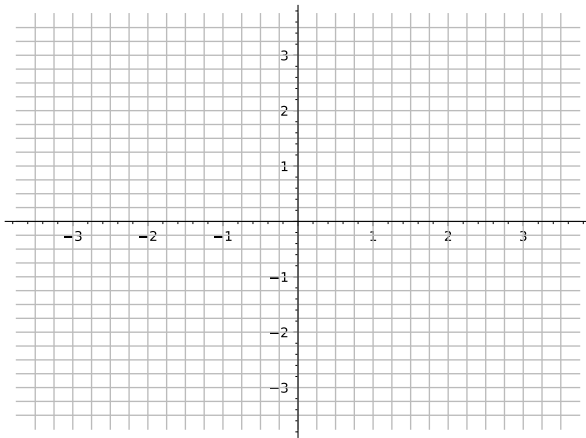
$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt[n]{r} e^{i\theta/n} \\ w_1 &= \sqrt[n]{r} e^{i\theta+2\pi/n} \\ w_2 &= \sqrt[n]{r} e^{i\theta+4\pi/n} \\ &\vdots \\ w_{n-1} &= \sqrt[n]{r} e^{i\theta+2(n-1)\pi/n} \end{aligned}$$

Las raíces n -ésimas de z forman un polígono regular con n vértices, todos a la misma distancia del origen, con radio $\sqrt[n]{r}$.

Ejemplo 5.6 Calcula las raíces cúbicas de $z = 3 + 3i$.

Ejemplo 5.7 Veamos el polígono mediante un ejemplo. Resuelve la ecuación $z^4 - 81 = 0$ para $z \in \mathbb{C}$.

Al representar estos puntos, obtenemos:



Capítulo 2

Matrices y Elementary transformations

6. Matrices - Resumen rápido

Antes de entrar en las transformaciones elementales, vamos a hacer un repaso muy rápido de los conceptos básicos de las matrices.

Definición 6.1 Una *matriz* de tamaño $m \times n$ es una cuadrícula rectangular con m filas y n columnas.

Wikipedia: [matriz](#)

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \quad 2 \times 3$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \quad m \times n$$

A continuación recordamos algunas definiciones que ya deberías haber visto.

- *Matriz nula*: es la matriz cuyos elementos son todos 0, denotada por $0_{m \times n}$.
- *Matriz cuadrada*: una matriz de tamaño $n \times n$.
- *Diagonal principal*: las entradas a_{ii} de una matriz cuadrada.
- *Matriz identidad*: una matriz cuadrada con 1 en la diagonal principal y 0 en todas las demás entradas, denotada por I_n .

6.1. Operaciones

Recordemos las siguientes operaciones con matrices. En particular, supongamos que A y B son matrices de tamaño $m \times n$ y que α es un número.

Suma: $A + B = C$ implica $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Producto por un escalar: $\alpha A = C$ implica $c_{ij} = \alpha * a_{ij}$.

Proposición 6.2 Sean A , B y C matrices de tamaño $m \times n$, y sean α y β algunos números. Entonces

- (1) $A + B = B + A$ (Conmutatividad de la suma)
- (2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (Asociatividad de la suma)
- (3) $A + 0_{m \times n} = 0_{m \times n} + A = A$ (Elemento neutro de la suma.)
- (4) $A + (-A) = 0_{m \times n}$ (Matriz opuesta)
- (5) $1A = A$ (Producto por el escalar unidad)
- (6) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ (Distributividad)
- (7) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ (Distributividad)
- (8) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$ (Asociatividad del producto por un escalar)

Wikipedia: [Multiplicación de matrices](#)

Recuerda que la multiplicación es bastante más difícil de definir.

Sea A una matriz de tamaño $m \times n$ y sea B una matriz de tamaño $n \times p$. Entonces

La multiplicación de matrices fue descrita por primera vez por el matemático francés Jacques Philippe Marie Binet en 1812, pero fue formalizada de la manera en que la aprendemos hoy por Arthur Cayley en 1857.

$$\begin{aligned}
 AB &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix} \\
 &= C
 \end{aligned}$$

donde $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$.

Ejemplo 6.3

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + (-5) \cdot 0 & 1 \cdot 3 + (-5) \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 & 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Proposición 6.4 Sea A una matriz de tamaño $m \times n$, sean B y B' dos matrices de tamaño $n \times p$ y sea C una matriz de tamaño $p \times q$. Además, sea α un escalar.

- (1) $(AB)C = A(BC)$ (Asociatividad de la multiplicación)
- (2) $AI_n = I_m A = A$ (Elemento neutro de la multiplicación)
- (3) $A0_{n \times r} = 0_{m \times r}$ y $0_{s \times m} A = 0_{s \times n}$ (Elemento absorbente)
- (4) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$ (Asociatividad del producto por un escalar)
- (5) $A(B+B') = AB+AB'$ y $(B+B')C = BC+B'C$ (Distributividad)

Recuerda también que las matrices cuadradas tienen determinantes (denotados por $|A|$) e inversas (denotadas por A^{-1}). Más adelante veremos cómo calcularlos.

7. Tipos de transformaciones

Hay ciertas operaciones que podemos realizar para modificar matrices.

7.1. Operaciones por filas

Intercambiar dos filas de una matriz Dada una matriz A , para intercambiar las filas i y j , podemos multiplicar por la izquierda por la siguiente matriz:

$$F_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 \\ & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 7.1 Intercambia las filas de la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Multiplicar una fila por un escalar λ Si queremos multiplicar una sola fila por un escalar λ , podemos multiplicar por la izquierda por la siguiente matriz:

$$F_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 7.2 Haz que la segunda fila sea 10 veces mayor

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Cambiar una fila por la suma de esa fila y un múltiplo escalar de otra Si queremos sumar un múltiplo escalar de la fila j a la fila i , multiplicamos por la izquierda por la siguiente matriz:

$$F_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

donde λ está en la fila i y la columna j .

Ejemplo 7.3 Suma 2 veces la segunda fila a la primera fila

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

7.2. Operaciones por columnas

Las operaciones por columnas son casi idénticas a las operaciones por filas, salvo que multiplicamos por la derecha en lugar de por la izquierda.

Intercambiar dos columnas de una matriz Dada una matriz A , para intercambiar las columnas i y j , podemos multiplicar por la derecha por la siguiente matriz:

$$C_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 \\ & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 7.4 Intercambia las columnas de la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Multiplicar una columna por λ Si queremos multiplicar una sola columna por un escalar λ , podemos multiplicar por la derecha por la

siguiente matriz:

$$C_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 7.5 Haz que la segunda columna sea 10 veces mayor

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Sustituir una columna por la suma de esa columna y un múltiplo escalar de otra Si queremos sumar un múltiplo escalar de la columna j a la columna i , multiplicamos por la derecha por la siguiente matriz:

$$C_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & \lambda & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

donde λ está en la fila j y la columna i .

Ejemplo 7.6 Suma 2 veces la segunda columna a la primera columna

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 7.7 Aquí algunos ejemplos de transformaciones más grande.

$$F_{23} = \qquad F_1(3) =$$

$$F_{13}(5) = \qquad F_{23}(-1) =$$

7.3. Propiedades de transformaciones

Tenemos las siguientes propiedades:

- $F_{ij} = F_{ji} = C_{ij} = C_{ji}$
- $F_i(\lambda) = C_i(\lambda)$
- $F_{ij}(\lambda) = C_{ji}(\lambda)$
- $|F_{ij}| = |C_{ij}| = -1$
- $|F_i(\lambda)| = |C_i(\lambda)| = \lambda$
- $|F_{ij}(\lambda)| = |C_{ij}(\lambda)| = 1$
- $F_{ij}^{-1} = F_{ji}$
- $C_{ij}^{-1} = C_{ji}$
- $(F_i(\lambda))^{-1} = F_i\left(\frac{1}{\lambda}\right)$
- $(C_i(\lambda))^{-1} = C_i\left(\frac{1}{\lambda}\right)$
- $(F_{ij}(\lambda))^{-1} = F_{ij}(-\lambda)$
- $(C_{ij}(\lambda))^{-1} = C_{ij}(-\lambda)$

8. Propiedades de matrices

Definición 8.1 Una matriz A de tamaño $m \times n$ se dice que está *reducida* si tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{m-r,r} & 0_{m-r,n-r} \end{pmatrix}$$

Para toda matriz A de tamaño $m \times n$ existen $r \in \mathbb{N}$, transformaciones por filas $F_1, \dots, F_k$ y transformaciones por columnas $C_1, \dots, C_\ell$ tales que

$$F_k \cdots F_1 \cdot A \cdot C_1 \cdots C_\ell = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{m-r,r} & 0_{m-r,n-r} \end{pmatrix}$$

La matriz reducida de la derecha se denomina *forma reducida* de la matriz A . El *rango* de la matriz A es r . Si A es una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$, entonces, si $r \neq n$, se tiene $|A| = 0$; en caso contrario, $r = n$ y tenemos

$$|A| = \frac{1}{|F_1| \cdots |F_k| \cdot |C_1| \cdots |C_\ell|}$$

Ejemplo 8.2 Encuentra la forma reducida y el determinante de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 8.3 Encuentra la forma reducida y calcula el determinante de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

8.1. Hallar la inversa

¡Podemos usar operaciones por filas y por columnas para hallar inversas! Para cualquier matriz cuadrada A cuyo determinante no sea 0 ($|A| \neq 0$), podemos reducir A a una matriz reducida usando *solo* transformaciones por filas, o bien podemos reducir A usando *solo* transformaciones por columnas. Esto es muy útil porque, haciéndolo de esta manera, podemos obtener fácilmente la inversa de A .

¿Cómo funciona esto? Si solo usamos transformaciones por filas, sabemos que

$$F_k \cdots F_1 \cdot A = I_n$$

Esto significa que $A^{-1} = F_k \cdots F_1$.

De manera similar, si solo usamos transformaciones por columnas, tenemos $A \cdot C_1 \cdots C_\ell = I_n$, por lo que $A^{-1} = C_1 \cdots C_\ell$.

Un truco sencillo para calcular la inversa consiste en añadir la matriz identidad al final y realizar las transformaciones como lo haríamos normalmente. Veamos el ejemplo anterior para comprobar cómo funciona.

Ejemplo 8.4 Empezamos añadiendo la matriz identidad al final de A . Ponemos una barra entre las dos matrices para indicar que estamos

trabajando con dos matrices distintas al mismo tiempo.

$$\begin{aligned}
 A &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 F_{31}(-1) \cdot A &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 F_{23}(-1) \cdot F_{13}(1) \cdot F_{31}(-1) \cdot A &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 F_2\left(\frac{1}{2}\right) \cdot F_{23}(-1) \cdot F_{13}(1) \cdot F_{31}(-1) \cdot A &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Esto significa que la matriz de la derecha es nuestra matriz inversa. En otras palabras,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para comprobarlo, basta con multiplicar A por A^{-1} y verificar que obtenemos I_3 .

Si no queremos hacer todo esto y ya conocemos nuestras transformaciones por filas o por columnas, podemos simplemente multiplicar las matrices asociadas que dimos en [Sección 7](#).

Ejemplo 8.5 Hagamos el mismo ejemplo de antes para verlo en acción. Ya sabemos que $F_2\left(\frac{1}{2}\right) \cdot F_{23}(-1) \cdot F_{13}(1) \cdot F_{31}(-1) \cdot A = I_3$ y entonces la inversa es $F_2\left(\frac{1}{2}\right) \cdot F_{23}(-1) \cdot F_{13}(1) \cdot F_{31}(-1)$. Veámoslo.

$$\begin{aligned}
 &F_2\left(\frac{1}{2}\right) \cdot F_{23}(-1) \cdot F_{13}(1) \cdot F_{31}(-1) \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Todo lo que acabamos de hacer tiene un nombre y es una forma muy habitual de encontrar la forma reducida de una matriz.

Definición 8.6 Sea A una matriz. El *método de Gauss* consiste en encontrar transformaciones por filas (o por columnas) tales que

$$F_n \cdots F_1 \cdot A = U \quad A \cdot C_1 \cdots C_\ell = L$$

donde U y L son, respectivamente, matrices triangulares superiores e inferiores.

La *eliminación de Gauss-Jordan* consiste en encontrar la forma reducida de A mediante transformaciones elementales por filas (o por columnas).

Wikipedia: [eliminación de Gauss-Jordan](#)

9. Sistemas de ecuaciones lineales

Podemos usar matrices para ayudarnos a resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Definición 9.1 Un *sistema de ecuaciones lineales* es un conjunto de ecuaciones con n variables. Normalmente denotamos las variables desde x_1 hasta x_n . Como es lineal, ninguna variable se multiplica por otra variable (por lo que nunca aparece $x_i x_j$). Un sistema de ecuaciones lineales normalmente tiene la forma:

Wikipedia: [sistema de ecuaciones lineales](#)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \vdots &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}$$

¡Fíjate en que los coeficientes tienen exactamente la forma de las matrices con las que hemos estado trabajando! De hecho, podemos representar este sistema de ecuaciones mediante matrices. Para ello, consideramos las siguientes tres matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Para recuperar nuestro sistema de ecuaciones lineales, simplemente multiplicamos todo:

$$A \cdot X = B$$

Fíjate en que cada fila corresponde a una de las ecuaciones anteriores.

Nuestro objetivo principal es encontrar simultáneamente los valores de nuestras variables. Para ello, podemos usar nuestras matrices. Al igual

Wikipedia: [matriz ampliada](#)

que hicimos para calcular inversas, unimos dos de nuestras matrices para formar lo que se conoce como una [matriz ampliada](#) (denotada por A^*). En particular, definimos

$$A^* = (A \mid B) = \left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} & b_i \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Wikipedia: [Teorema de Rouché-Frobenius](#)

Teorema 9.2 (Teorema de Rouché-Frobenius) *Dado un sistema de ecuaciones lineales $A \cdot X = B$ con m ecuaciones y n incógnitas. Sea A^* su matriz ampliada. Entonces:*

- Si $n = \text{rk}(A) = \text{rk}(A^*)$, entonces existe una solución única. (El sistema es [compatible determinado](#))
- Si $n > \text{rk}(A) = \text{rk}(A^*)$, entonces existen infinitas soluciones. (El sistema es [compatible indeterminado](#))
- Si $\text{rk}(A) \neq \text{rk}(A^*)$, entonces no existen soluciones. (El sistema es [incompatible](#))

Observa que si $B = 0_{m \times 1}$ (es decir, todas las ecuaciones son iguales a 0), siempre tenemos al menos una solución, ya que $X = 0_{n \times 1}$ (es decir, si hacemos que todas nuestras variables sean iguales a 0) es una solución (la solución trivial). Este tipo de sistema se conoce como [sistema homogéneo](#).

Recuerda que, al principio de [Sección 8](#), vimos que el rango de A es igual a n si y solo si $|A| \neq 0$. Esto nos da el siguiente corolario.

Corolario 9.3 *Sea A una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$ y sean X y B las matrices anteriores. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

- $\text{rk}(A) = n$
- $A \cdot X = B$ tiene una única solución.
- $|A| \neq 0$

Veamos un ejemplo de cada caso.

Ejemplo 9.4

$$[A|B] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 11 \\ 0 & 1 & 6 & 13 \\ -2 & -1 & -11 & -16 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Esto nos dice que $\text{rk}(A) = 3$ y $\text{rk}(A^*) = 4$ y, por tanto, no existe ninguna solución.

Ejemplo 9.5

$$[A|B] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 11 \\ 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Como los rangos son iguales y además son iguales a $n = 3$, tenemos una única solución. Esta viene dada por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

por lo que

$$x_1 = 2 \quad x_2 = -2 \quad x_3 = 3 \quad 0 = 0$$

es nuestra única solución.

Ejemplo 9.6

$$[A|B] = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 3 & -11 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & 5 & -13 & 10 \\ 1 & 4 & 0 & -9 & 14 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Como nuestro rango es 3, pero $n = 4$, tenemos infinitas soluciones. Esto se ve al usar nuestras matrices.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En otras palabras,

$$x_1 - x_4 = 2 \quad x_2 - 2x_4 = 3 \quad x_3 = -2 \quad 0 = 0$$

De aquí obtenemos:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 + 2 \\ 2x_4 + 3 \\ -2 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Capítulo 3

Espacios vectoriales

10. Espacios vectoriales

Definición 10.1 Un *espacio vectorial* es una terna $(V, +, \cdot, \mathbb{K})$ donde

- V es un conjunto (llamamos *vectores* a los objetos del conjunto).
- $+$ es una operación llamada *suma de vectores* tal que, para todos $x, y \in V$, se cumple $x + y \in V$.
- $\cdot$ es una operación llamada *producto por escalares* tal que, para todo $x \in V$ y todo $\lambda \in \mathbb{K}$, se cumple $\lambda \cdot x \in V$.
- $\mathbb{K}$ es un *cuerpo* (podemos suponer que es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$).

Wikipedia: [espacio vectorial](#)

Wikipedia: [vectores](#)

Wikipedia: [producto por escalares](#)

Wikipedia: [Cuerpo](#)

tal que se cumplen las siguientes propiedades:

- para todos $x, y \in V$ se cumple $x + y = y + x$ (Conmutatividad de la suma de vectores)
- para todos $x, y, z \in V$ se cumple $x + (y + z) = (x + y) + z$ (Asociatividad de la suma de vectores)
- Existe un elemento $e \in V$ (llamado *vector cero*) tal que, para todo $x \in V$, $x + e = e + x = x$. Normalmente denotamos e por 0 (Elemento identidad de la suma de vectores)
- Para todo $x \in V$ existe $-x \in V$ tal que $x + (-x) = (-x) + x = 0$. (Elementos inversos de la suma de vectores)
- Para todo $x \in V$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ se cumple $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \cdot \mu) \cdot x$. (Asociatividad del producto por escalares)
- Existe un elemento $a \in \mathbb{K}$ tal que, para todo $x \in V$, se cumple $a \cdot x = x$. Normalmente denotamos a por 1 (Elemento identidad de la multiplicación por escalares)

- Para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x, y \in V$ se cumple $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$.
(Distributividad respecto de la suma de vectores)
- Para todos $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ y $x \in V$ se cumple $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$.
(Distributividad respecto de la multiplicación por escalares)

Ejemplo 10.2 Como ejemplo, podemos tomar matrices columna y usar la suma de matrices y la multiplicación por escalares de [Capítulo 2](#). Lo denotaríamos como _____.

Entonces, ¿cómo son la suma y la multiplicación? Dados los siguientes dos vectores:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$x + y = \quad \quad \quad \lambda \cdot x =$$

11. Combinaciones lineales

Si pensamos en el espacio que nos rodea, ¿cómo calculamos el número de dimensiones? Normalmente “añadimos” una dimensión de alguna manera, pero, matemáticamente, ¿cómo funciona eso? Lo hacemos mediante las ideas de combinación lineal e independencia lineal.

Definición 11.1 Dado un conjunto de vectores $\{x_1, \dots, x_n\} \in \mathbb{R}^n$, decimos que x es una [combinación lineal](#) de $\{x_1, \dots, x_n\}$ si existen números reales $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i.$$

Ejemplo 11.2 Usemos nuestro espacio vectorial de matrices columna de antes y tomemos $n = 3$. Consideremos lo siguiente:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Escribe el siguiente vector como combinación lineal de $\{x_1, x_2\}$:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Wikipedia: [combinación lineal](#)

Definición 11.3 Decimos que un conjunto de vectores $\{x_1, \dots, x_n\} \in \mathbb{R}^n$ es *linealmente dependiente* si existen coeficientes $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ (no todos iguales a 0) tales que

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$$

Si la única combinación lineal que da 0 es la trivial, decimos que los vectores son *linealmente independientes*. Otra forma de decirlo es que un conjunto de vectores es linealmente independiente si

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0, \forall i$$

Si consideramos que nuestro espacio vectorial está formado por matrices columna, al recordar [Sección 9](#), ¡esta ecuación no es más que nuestro sistema homogéneo de ecuaciones lineales! Resulta que, si nuestro conjunto de vectores nos da una solución *única*, ¡entonces nuestros vectores son linealmente independientes! ¿Por qué? _____

Si, por el contrario, nuestros vectores nos dan *infinitas* soluciones, entonces los vectores son linealmente dependientes. ¿Recuerdas por qué no puede darse el caso de que no exista ninguna solución? _____

Veámoslo en acción.

Ejemplo 11.4 Supongamos que tenemos el siguiente conjunto de vectores. Demuestra que son linealmente independientes.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Ejemplo 11.5 Probemos otro ejemplo usando un método diferente. Supongamos que tenemos los siguientes tres vectores; encuentra λ_i para demostrar que son linealmente dependientes.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

12. Bases

Solo nos faltan un par de definiciones antes de poder definir matemáticamente la dimensión.

12.1. Sistemas generadores y bases

Definición 12.1 En $\mathbb{R}^n$, un conjunto de vectores $\{x_1, \dots, x_m\}$ es un *sistema generador* si, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, existen coeficientes $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tales que

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$$

Si, además, el conjunto de vectores es linealmente independiente, decimos que forma una *base* de $\mathbb{R}^n$.

La dimensión de un espacio vectorial no es más que el número de vectores de su base.

Definición 12.2 Si $B = \{x_1, \dots, x_n\}$ es una base de un espacio vectorial V , decimos que V tiene *dimensión* n .

$$\dim(V) = \#(B).$$

Wikipedia: [sistema generador](#)

Wikipedia: [base](#)

Ejemplo 12.3 Demuestra que el siguiente conjunto de vectores no es un sistema generador de $\mathbb{R}^2$.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$

Ejemplo 12.4 Demuestra que el siguiente conjunto es un sistema generador (y una base) de $\mathbb{R}^2$.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Ejemplo 12.5 El siguiente es un sistema generador de $\mathbb{R}^3$ que no es una base.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

Ejemplo 12.6 La siguiente es una base de $\mathbb{R}^3$.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Este método, que consiste simplemente en eliminar los vectores que no necesitamos, es una buena forma de encontrar bases. Nos ayuda a reducir un conjunto de vectores linealmente dependientes a un conjunto linealmente independiente mínimo.



Que sea linealmente independiente mínimo *no* significa que sea una base. Solo es una base si es linealmente independiente *y*, además, es un sistema generador de nuestro espacio vectorial.

Extracción de conjuntos linealmente independientes mínimos

Dado un conjunto de vectores $\{x_1, \dots, x_n\}$ que pueden ser linealmente dependientes. Seguimos los siguientes pasos.

Empezamos con $B = \emptyset$, que es el conjunto vacío. Hacemos el siguiente en un bucle desde $i = 1$ hasta $i = n$. (Empezando en $i = 1$ y aumentando i en uno cada vez que hacemos el bucle)

- Sea $b_{i-1} = \text{rk}(B)$.
- Calcula el rango $b_i = \text{rk}(B \cup \{x_i\})$
- Si $b_i > b_{i-1}$, añade x_i a B y repite el bucle.
- Si $b_i = b_{i-1}$, entonces se trata de un conjunto linealmente independiente, así que *no* cambiamos B . Repetimos el bucle sin cambiar nada.

Probemos esto con un ejemplo.

Ejemplo 12.7 Supongamos que tenemos el siguiente sistema generador que no es una base de $\mathbb{R}^3$.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

Encuentra una base usando el método de extracción anterior.

12.2. Canonical basis

Hay una base estándar que solemos usar más que las demás. Se llama base canónica y, por lo general, es la más fácil de manejar.

Wikipedia: [base canónica](#)

Definición 12.8 La *base canónica* de $\mathbb{R}^n$ es la base dada por

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

No es difícil ver que esta es una base de $\mathbb{R}^n$. Usamos esta base como punto de partida y, en la siguiente sección, veremos cómo pasar de una base de un espacio vectorial a otra.

13. Cambio de base

Supongamos que tenemos dos bases distintas de un espacio vectorial V . Sea $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ la primera y $B' = \{u'_1, \dots, u'_n\}$ la segunda. Además, sea $x \in \mathbb{R}^n$. Por definición de que B es una base, existen

$\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, no todos nulos, tales que

$$\begin{aligned}
 x &= \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n \\
 &= (u_1 \cdot u_n) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1j} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2j} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ u_{i1} & u_{i2} & \cdots & u_{ij} & \cdots & u_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nj} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \\
 &= P \cdot x_B
 \end{aligned}$$

¿Qué acabamos de hacer? Bueno, la primera fila no es más que la definición de base: todo elemento de $\mathbb{R}^n$ puede escribirse como combinación lineal de los elementos de la base. Después convertimos esto en dos matrices (una horizontal y otra vertical). Observa que efectuar la multiplicación nos da la combinación lineal. Después observamos que cada u_i es, a su vez, un vector columna. Así que desarrollamos cada u_i como su propio vector, de modo que nuestra matriz horizontal se convirtió en una matriz cuadrada. Por último, les dimos nombres a estas dos matrices.

Llamamos a P la *matriz asociada a la base B* . Y llamamos a x_B las *coordenadas de x respecto de la base B* .

Podemos hacer lo mismo con nuestra otra base B' . En otras palabras, existen $\lambda'_1, \dots, \lambda'_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{aligned}
 x &= \lambda'_1 u'_1 + \dots + \lambda'_n u'_n \\
 &= (u'_1 \cdot u'_n) \cdot \begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \vdots \\ \lambda'_n \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} u'_{11} & u'_{12} & \cdots & u'_{1j} & \cdots & u'_{1n} \\ u'_{21} & u'_{22} & \cdots & u'_{2j} & \cdots & u'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ u'_{i1} & u'_{i2} & \cdots & u'_{ij} & \cdots & u'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ u'_{n1} & u'_{n2} & \cdots & u'_{nj} & \cdots & u'_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \vdots \\ \lambda'_n \end{pmatrix} \\
 &= Q \cdot x_{B'}
 \end{aligned}$$

Pero ahora observa que, como x es igual a ambas expresiones, tene-

mos

$$P \cdot x_B = x = Q \cdot x_{B'}.$$

¡Pero esto nos permite pasar de las coordenadas respecto de una base a las coordenadas respecto de otra!

Definición 13.1 El *cambio de base* de una base B a una base B' para un elemento x viene dado por:

$$x_{B'} = Q^{-1} \cdot P \cdot x_B$$

Ejemplo 13.2 Veamos un ejemplo. Supongamos que trabajamos en $\mathbb{R}^3$ y tenemos las siguientes dos bases:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad B' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Esto nos da las siguientes matrices P y Q :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos las inversas. (Si no recuerdas cómo hacerlo, este es un buen momento para repasarlo.)

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Esto significa que nuestro cambio de base de B a B' viene dado por:

$$x_{B'} =$$

El cambio de base de B' a B viene dado entonces por:

$$x_B =$$

Ahora veamos qué ocurre realmente con un elemento de $\mathbb{R}^3$ cuando

usamos el cambio de base. Sea $x \in \mathbb{R}^3$ el siguiente elemento

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos x_B y $x_{B'}$.

Ahora podemos usar esta información para resolver para $x_{B'}$.

Probemos con otro ejemplo. Supongamos que tenemos $y_{B'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Encuentra y_B e y .

Observa que tanto x como y son matrices columna por sí mismos.
¿Qué base estamos usando cuando los escribimos? _____

14. Variedades lineales

14.1. Variedad lineal

Wikipedia: [variedad lineal](#)

Definición 14.1 Sea $\mathbb{R}^n$ nuestro espacio vectorial. Una *variedad lineal* L es un subconjunto de vectores $L \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que se cumplen las dos propiedades siguientes:

- $\forall x, y \in L, x + y \in L$
- $\forall x \in L, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \cdot x \in L$.

Si L es una variedad lineal de un espacio vectorial V , entonces L mismo es un espacio vectorial. No es difícil verlo, ya que la conmutatividad, la asociatividad, el elemento identidad de la multiplicación por escalares y la distributividad se heredan de V . El elemento identidad de la suma de vectores se obtiene de $0 \cdot x = e$ (donde $0 \in \mathbb{R}$ y $e \in V$ es el elemento identidad de la suma de vectores). Por último, para hallar el elemento inverso de la suma de vectores, recordamos que $-1 \in \mathbb{R}$, y por tanto $x + (-1)x = x - x = e$ nos da nuestro inverso.

Ejemplo 14.2 Demuestra que el siguiente conjunto es una variedad lineal.

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x \right\}$$

Ejemplo 14.3 Demuestra que el siguiente conjunto *no* es una variedad lineal.

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x - 1 \right\}$$

Como una variedad lineal debe ser cerrada bajo la suma de vectores y la multiplicación por escalares, podemos generar una variedad lineal a partir de algún subconjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$.

Definición 14.4 Dado un subconjunto $I = \{a_1, \dots, a_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ (suponemos que $k < n$), denotamos por $\langle I \rangle$ el *variedad lineal generada por I* , donde $\langle I \rangle$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de I . Observa que a veces se usa $\mathcal{L} \langle I \rangle$ para denotar esta variedad lineal.

$$\langle I \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Dado una variedad lineal $L = \langle I \rangle$ generada por algún subconjunto $I \subseteq \mathbb{R}^n$, como L es un espacio vectorial, queremos encontrar una base de L . Para ello, introducimos algunas definiciones.

Definición 14.5 Dada $B = \{a_1, \dots, a_k\}$, una base de una variedad lineal $L \subseteq \mathbb{R}^n$. Tenemos las siguientes tres definiciones:

■ **Ecuación vectorial**

$$x = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k$$

■ **Ecuaciones paramétricas**

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_k \begin{pmatrix} a_{k1} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{pmatrix}$$

Lo que nos da el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x_1 &= \lambda_1 a_{11} + \dots + \lambda_k a_{k1} \\ \vdots & \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ x_n &= \lambda_1 a_{1n} + \dots + \lambda_k a_{kn} \end{cases}$$

■ **Ecuaciones implícitas** Para $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in L$, imponemos:

$$\text{rk} \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{k1} & x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{kn} & x_n \end{array} \right) = k$$

Ejemplo 14.6 Veamos cada una de ellas en acción calculando la base, las ecuaciones y la dimensión. Empezamos con una variedad lineal generado por un conjunto.

$$L = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Base y dimensión:

Ecuaciones:

A partir de nuestras ecuaciones implícitas, obtenemos el siguiente teorema.

Proposición 14.7 *Sea $L \subseteq \mathbb{R}^n$ una variedad lineal. Entonces*

$$\dim(L) = n - \#\{\text{ecuaciones implícitas linealmente independientes}\}$$

Operaciones

Ahora definimos algunas operaciones con variedades lineales.

Definición 14.8 Dados dos variedades lineales L_1 y L_2 de $\mathbb{R}^n$, definimos dos variedades lineales:

- $L_1 + L_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = x_1 + x_2, x_1 \in L_1, x_2 \in L_2\}$
- $L_1 \cap L_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \in L_1, x \in L_2\}$

Llamamos a la primera variedad lineal la *suma* de variedades lineales y a la segunda la *intersección* de variedades lineales.

Podemos usar estas dos operaciones para definir la complementaria de una variedad lineal.

Definición 14.9 La *complementaria* de una variedad lineal es la variedad lineal L^* tal que:

$$L + L^* = \mathbb{R}^n \quad \text{and} \quad L \cap L^* = \{0\}$$

Como podemos representar esto de distintas maneras, definimos una nueva operación para indicar cuándo ocurre lo anterior.

Definición 14.10 Decimos que dos variedades lineales L_1 y L_2 forman una *suma directa* (se denota $L_1 \oplus L_2$) si:

$$L_1 + L_2 = \mathbb{R}^n \quad \text{and} \quad L_1 \cap L_2 = \{0\}$$

Observa que una variedad lineal y su complementaria siempre forman una suma directa.

Proposición 14.11 *Dados dos variedades lineales $L_1, L_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ cuyas bases vienen dadas, respectivamente, por $B_{L_1} = \{a_1, \dots, a_i\}$ y $B_{L_2} = \{b_1, \dots, b_j\}$. Además, supongamos que tenemos el siguiente sistema de ecuaciones implícitas para L_1 y L_2 , respectivamente:*

$$L_1 : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rn}x_n = 0 \end{cases} \quad L_2 : \begin{cases} b_{11}x_1 + \dots + b_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ b_{s1}x_1 + \dots + b_{sn}x_n = 0 \end{cases}$$

Entonces, $B = B_{L_1} \cup B_{L_2} = \{a_1, \dots, a_i, b_1, \dots, b_j\}$ es un sistema generador de $L_1 + L_2$. Además, las ecuaciones implícitas de $L_1 \cap L_2$ vienen dadas por:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rn}x_n = 0 \\ b_{11}x_1 + \dots + b_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ b_{s1}x_1 + \dots + b_{sn}x_n = 0 \end{cases}$$

Para encontrar $B_{L_1^*}$, completamos B_{L_1} hasta obtener una base de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 14.12 Veamos un ejemplo más grande en $\mathbb{R}^4$. Considera las siguientes dos variedades lineales, definidas de maneras distintas.

$$F : \begin{cases} x - t &= 0 \\ y + z &= 0 \end{cases} \quad G = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Encuentra la base, la dimensión y las ecuaciones de:

$$F, G, F + G, F \cap G, F^*, G^*$$

F :

G :

$$F + G:$$

$$F \cap G:$$

F^* : G^* :

Capítulo 4

Aplicaciones lineales

15. Matriz asociada

En el capítulo anterior empezamos a trabajar con espacios vectoriales, pero ¿qué pasa si queremos definir una aplicación de un espacio vectorial a otro? Como estamos trabajando con espacios vectoriales, queremos que estas aplicaciones sean compatibles con la suma de vectores y la multiplicación por escalares. Esto nos lleva a lo que se conoce como una aplicación lineal.

Definición 15.1 Una *aplicación lineal* es una aplicación $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que

Wikipedia: [aplicación lineal](#)

$$(1) f(u + v) = f(u) + f(v), \text{ para todo } u, v \in \mathbb{R}^n.$$

$$(2) f(\lambda u) = \lambda f(u), \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{R} \text{ y } u \in \mathbb{R}^n.$$

Veamos un par de ejemplos.

Ejemplo 15.2 Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la siguiente aplicación:

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix}$$

Demuestra que es lineal.

Ejemplo 15.3 Demuestra que la siguiente aplicación $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ *no* es lineal.

$$f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x + y + z^2 \\ x - z \end{pmatrix}$$

Como las aplicaciones lineales nos permiten pasar de un espacio vectorial a otro, podemos definir una especie de cambio de base: una matriz asociada a la aplicación lineal que nos permite pasar de un espacio vectorial a otro.

Definición 15.4 Dada una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ cuyos espacios vectoriales tienen, respectivamente, las bases $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ y $C = \{c_1, \dots, c_m\}$. Dado un elemento $x \in \mathbb{R}^n$, existen $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$

tales que $x = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n$. Decimos que $x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ son las *coordenadas de x respecto de B* .

Al aplicar f obtenemos:

$$f(x) = f(x_1 b_1 + \dots + x_n b_n) = x_1 f(b_1) + \dots + x_n f(b_n)$$

donde cada $f(b_i) \in \mathbb{R}^m$. Además, para cada $f(b_i)$ existen $\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{im} \in \mathbb{R}$ tales que $f(b_i) = \alpha_{i1} c_1 + \dots + \alpha_{im} c_m$ para todo $i = 1, \dots, n$. Las coordenadas de $f(b_i)$ respecto de la base C son entonces $(f(b_i))_C =$

$\begin{pmatrix} \alpha_{i1} \\ \vdots \\ \alpha_{im} \end{pmatrix}$. Esto nos da la siguiente:

$$(f(x))_C = ((f(b_1))_C \cdots (f(b_n))_C) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \cdot x_B$$

La matriz A se conoce como la *matriz de f respecto de B y C* .

Veamos cómo funciona esto en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 15.5 Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal dada por la

siguiente expresión respecto de las bases canónicas:

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x - y \\ -x \\ -x + y \end{pmatrix}$$

Considera las siguientes bases adicionales:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$
$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad C' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

(1) Calcula la matriz de f respecto de las bases canónicas.

(2) Da la expresión matricial de f respecto de B y C .

- (3) Con un compañero, da la expresión matricial de f respecto de B' y C' .

(4) Calcula $(f(x_{B'}))_{C'}$ cuando $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(5) Calcula $(f(x_{B'}))_C$ cuando $x_{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

16. Expresión matricial y cambio de base

¿Qué pasa si necesitamos pasar de un espacio vectorial a otro varias veces? Al igual que con las funciones, podemos componer aplicaciones lineales.

Dadas dos aplicaciones lineales $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ cuyas matrices asociadas son, respectivamente, A y B . La *composición* de g con f , $g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, dada por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, tiene como matriz asociada $C = B \cdot A$.

Esto hace que pasar entre espacios vectoriales mediante aplicaciones lineales sea muy sencillo. De hecho, esta multiplicación se extiende a los cambios de base, ya que un cambio de base no es más que una aplicación lineal de un espacio vectorial en sí mismo.

Dada una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, dos bases B y B' de $\mathbb{R}^n$ y dos bases C y C' de $\mathbb{R}^m$. Sea A la matriz asociada a la aplicación lineal f respecto de B y C :

$$(f(X_B))_C = A \cdot X_B$$

¿Hay alguna forma sencilla de calcular la matriz M asociada a f respecto de B' y C' ?

$$(f(X_{B'}))_{C'} = M \cdot X_{B'}$$

Tenemos las siguientes aplicaciones que nos ayudarán:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^n, B) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}^m, C) \\ x_B \mapsto & A & \rightarrow x_C \\ \uparrow & & \downarrow \\ (\mathbb{R}^n, B') & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}^m, C') \\ x_{B'} \mapsto & M & \rightarrow x_{C'} \end{array}$$

Veamos cómo hacerlo. Sean P , Q , R y S las matrices asociadas a B , B' , C y C' , respectivamente. De antes tenemos el siguiente cambio de base:

$$P \cdot X_B = Q \cdot X_{B'} \quad R \cdot (f(X_B))_C = S \cdot (f(X_{B'}))_{C'}$$

Por tanto,

$$X_B = P^{-1} \cdot Q \cdot X_{B'} \quad S^{-1} \cdot R \cdot (f(X_B))_C = (f(X_{B'}))_{C'}$$

Y como $(f(X_B))_C = A \cdot X_B$, obtenemos:

$$(f(X_{B'}))_{C'} = S^{-1} \cdot R \cdot A \cdot X_B = S^{-1} \cdot R \cdot A \cdot P^{-1} \cdot Q \cdot X_{B'}$$

Esto nos da el valor de M que queríamos encontrar:

$$M = S^{-1} \cdot R \cdot A \cdot P^{-1} \cdot Q$$

16.1. Base canónica

Pero ¿qué pasa si consideramos que nuestras bases originales son las bases canónicas?

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal con matriz asociada A respecto de las bases canónicas. Sean B y C otras dos bases de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, respectivamente. Además, sean P y Q las matrices asociadas a B y C , respectivamente. Tenemos

$$I_n \cdot X = P \cdot X_B \quad I_m \cdot f(X) = Q \cdot (f(X_B))_C \quad f(X) = A \cdot X$$

Por tanto,

$$X = P \cdot X_B \quad \text{y} \quad (f(X_B))_C = Q^{-1} \cdot f(X).$$

Por tanto,

$$(f(X_B))_C = Q^{-1} \cdot A \cdot X = Q^{-1} \cdot A \cdot P \cdot X_B.$$

En otras palabras, en este caso tenemos $M = Q^{-1} \cdot A \cdot P$.

Ejemplo 16.1 Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal dada por:

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

respecto de las bases canónicas. Calcula la expresión matricial de f respecto de las bases:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{y} \quad C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

A continuación damos algunas definiciones sobre aplicaciones lineales y matrices que usaremos más adelante.

Definición 16.2 A las aplicaciones lineales también se les llama *homomorfismos* de espacios vectoriales. Cuando el homomorfismo va de un espacio vectorial en sí mismo, se llama *endomorfismo* : $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Wikipedia: [homomorfismos](#)

Wikipedia: [endomorfismo](#)

Definición 16.3 Dadas dos matrices A y B , decimos que son *semejantes* si existe una matriz invertible P tal que

Wikipedia: [semejantes](#)

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P.$$

Las matrices semejantes aparecen siempre que trabajamos con endomorfismos. De hecho, las matrices asociadas a un endomorfismo al cambiar de base son semejantes: $M = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

Las matrices semejantes son útiles porque nos proporcionan directamente las dos propiedades siguientes. Supongamos que A y B son matrices semejantes.

- $\text{rk}(A) = \text{rk}(B)$
- $|A| = |B|$ si A y B son matrices cuadradas.

17. Imagen y núcleo

Definición 17.1 Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal. La *imagen* de f es el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^m$ que se pueden obtener mediante f :

Wikipedia: [imagen](#)

$$\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y = f(x), x \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

El *núcleo* de f es el conjunto de elementos que se envían a 0:

Wikipedia: [núcleo](#)

$$\text{Ker}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0 \in \mathbb{R}^m\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

Estos dos objetos están relacionados de una manera muy natural, como veremos en la siguiente proposición y teorema.

Proposición 17.2 Si $L = \{a_1, \dots, a_k\}$ es un sistema generador de $\mathbb{R}^n$, entonces $\{f(a_1), \dots, f(a_k)\}$ es un sistema generador de $\text{Im}(f)$. En otras palabras, si $f(X) = M \cdot X$, entonces las columnas de M forman un sistema generador de $\text{Im}(f)$.

Teorema 17.3 Dada una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Entonces

$$\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = n$$

Ejemplo 17.4 Veamos un ejemplo. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal tal que

$$f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Calcula las bases, la dimensión y las ecuaciones matriciales de $\text{Ker}(f)$ y $\text{Im}(f)$.

18. Imagen y preimagen de una variedad lineal

Definición 18.1 Dada una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y variedades lineales $L \subseteq \mathbb{R}^n$, $M \subseteq \mathbb{R}^m$, definimos los siguientes:

- la *imagen de L respecto de f* como el conjunto:

$$f(L) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y = f(x), x \in L\}$$

- la *preimagen de M respecto de f* (o la *imagen inverse de M*) como el conjunto:

$$f^{-1}(M) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \in M\}$$

Observa que si $L = \langle a_1, \dots, a_k \rangle$, entonces $f(L) = \langle f(a_1), \dots, f(a_k) \rangle$. Si $B_L = \{a_1, \dots, a_\ell\}$ con $\ell \leq k$, entonces $\{f(a_1), \dots, f(a_\ell)\}$ es un *sistema generador* de $f(L)$. Si $M : \{Q \cdot X = 0\}$, entonces $f^{-1}(M) : \{Q \cdot A \cdot X = 0\}$,

Ejemplo 18.2 Dada una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que:

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Dados las siguientes variedades lineales:

$$L : \left\{ \begin{matrix} x - y = 0 \end{matrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2 \quad \text{y} \quad M = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Calcula la base, la dimensión y las ecuaciones de $f(L)$ y $f^{-1}(M)$.

19. Polinomio característico, autovalores y autovectores

Supongamos que tenemos un endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde B es una base de $\mathbb{R}^n$ y A es la matriz cuadrada de orden n asociada a f respecto de B . Lo que queremos hacer es encontrar una base C de $\mathbb{R}^n$ tal que la matriz asociada a f respecto de C sea una matriz diagonal. ¿Por qué? Porque las matrices diagonales son muy convenientes: calcular el determinante es muy fácil y nos simplifican mucho el trabajo.

Veamos tres ecuaciones diferentes que están todas relacionadas entre sí:

$$f(X) = (\lambda I_n) \cdot X \quad A \cdot X = (\lambda I_n) \cdot X \quad (A - \lambda I_n) \cdot X = 0$$

Queremos encontrar soluciones (no triviales) de la ecuación anterior. En particular, queremos determinar cuándo $A - \lambda I$ tiene determinante 0. Hay una forma sencilla de que esto ocurra:

$$\text{rk}(A - \lambda I_n) < n \Rightarrow |A - \lambda I_n| = 0$$

Para trabajar con estas ecuaciones, definimos varios conceptos.

Wikipedia: [polinomio característico](#)

Definición 19.1 ■ El *polinomio característico* de A es el polinomio $p(\lambda) = |A - \lambda I_n|$.

■ La *ecuación característica* de A viene dada por $p(\lambda) = 0$.

Wikipedia: [autovalores](#)

■ Los *autovalores* de A son las raíces del polinomio característico, *i.e.*, las soluciones de la ecuación característica. Normalmente los denotamos por: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

■ Los *autovectores* asociados a un autovalor λ_i son las soluciones del sistema $(A - \lambda_i I_n) \cdot X = 0$.

Wikipedia: [subespacio invariante](#)

■ El *subespacio invariante* V_λ asociado a un autovalor λ es el conjunto de autovectores asociados a λ .

Como muchas cosas dependen de estos autovectores, queremos una forma más sencilla de calcularlos. La siguiente proposición nos proporciona uno de estos métodos.

Proposición 19.2 *Un vector v es un autovector asociado a un autovalor λ si y solo si*

$$f(v) = \lambda v \quad \text{en otras palabras:} \quad Av = \lambda v$$

Ejemplo 19.3 Calcula el polinomio característico, los autovalores y los autovectores de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

Detengámonos un poco en el polinomio característico e intentemos determinar sus coeficientes.

$$|A - \lambda I_n| = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0$$

Lo hacemos mediante un ejemplo.

Ejemplo 19.4 Calcula el polinomio característico, los autovalores y los autovectores de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -3 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Empezamos con el polinomio característico y observamos sus coeficientes.

A continuación calculamos los autovectores.

20. Diagonalization

Como podemos ver, la diagonal principal nos proporciona mucha información al determinar los autovalores y los autovectores. Pero hay una forma todavía más sencilla de calcularlos cuando podemos convertir A en una matriz diagonal.

Wikipedia: [diagonalizable](#)

Definición 20.1 Decimos que una matriz es *diagonal* si las únicas entradas distintas de cero están en la diagonal principal. Decimos que una matriz A es *diagonalizable* si es semejante a una matriz diagonal. En otras palabras, existen una matriz invertible P y una matriz diagonal M tales que $P^{-1}AP = D$.

Resulta que un endomorfismo f de $\mathbb{R}^n$ es diagonalizable si su matriz asociada es diagonalizable. Pero ¿cuándo es diagonalizable una matriz? Antes de responder, necesitamos dos definiciones.

Definición 20.2 Sea A una matriz cuyo polinomio característico viene dado por

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1} (\lambda - \lambda_2)^{\alpha_2} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{\alpha_m}$$

- La *multiplicidad algebraica* de un autovalor λ_i es el exponente α_i .
- La *multiplicidad geométrica* de un autovalor λ_i es $\dim(V_{\lambda_i})$.

Teorema 20.3 Una matriz A es diagonalizable si, para cada autovalor, sus multiplicidades algebraica y geométrica coinciden.

De acuerdo, pero ¿por qué nos importa esto? Porque nuestras matrices P y D nos proporcionan, en realidad, toda la información que podríamos querer sobre los autovalores y los autovectores. Si A es diagonalizable, con $D = P^{-1}AP$, con autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ y autovectores $v_1, \dots, v_n$, entonces:

$$P = (v_1 \cdots v_n) \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

¡Esto nos dice muchísimo! Tenemos las siguientes propiedades.

Proposición 20.4 Sea A una matriz cuadrada de orden n .

- Si A tiene n autovalores distintos, entonces A es diagonalizable.
- $\text{tr}(A) = \sum_i \lambda_i$.
- $|A| = \prod_i \lambda_i$.



La recíproca del primer punto *no* es cierta. En particular, si A es diagonalizable, no necesariamente tiene n autovalores distintos. Lo vemos en el siguiente ejemplo.

Veamos [Ejemplo 19.4](#) desde este punto de vista.

Ejemplo 20.5 Recordemos que estamos trabajando con la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -3 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 20.6 Hagamos un ejemplo más. Analiza la siguiente matriz y determina si es diagonalizable. Si lo es, encuentra P y D .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Capítulo 5

Espacio euclídeo

21. Producto escalar y espacio euclídeo

Al trabajar con vectores, hemos usado principalmente dos operaciones: la suma de vectores y la multiplicación por escalares. Resulta que hay otra operación que podemos definir sobre vectores, llamada producto escalar. Es una forma de multiplicar dos vectores entre sí. Para no confundirnos al usar $\cdot$ (que se usa principalmente para la multiplicación de matrices), utilizaremos una notación diferente para el producto escalar.

Definición 21.1 En $\mathbb{R}^n$, el *producto escalar* es una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ such that:

Wikipedia: [producto escalar](#)

- $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle, \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$
- $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle, \langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle, \forall x, y \in \mathbb{R}^n \forall \lambda \in \mathbb{R}.$
- $\langle x, x \rangle \geq 0, \langle x, x \rangle = 0$ si y solo si $x = 0; \forall x \in \mathbb{R}^n.$
- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$

Un espacio vectorial real $\mathbb{R}^n$ que tiene un producto escalar se conoce como *espacio vectorial euclídeo*.

Wikipedia: [espacio vectorial euclídeo](#)

Al trabajar con el espacio vectorial euclídeo, es habitual definir un producto escalar particular llamado *producto punto*. El producto punto es el producto escalar definido por:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

Ejemplo 21.2 Como ejemplo rápido en $\mathbb{R}^4$, calculemos el producto

punto de los siguientes dos vectores:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

22. Norms, angles, distance and orthogonality

Al pensar en el espacio euclídeo, también solemos pensar en la distancia entre dos puntos o en el ángulo entre dos rectas. ¡Podemos definir todos estos conceptos en espacios vectoriales euclídeos! Vamos a construirlos paso a paso. Primero definimos la norma, que nos permite determinar la longitud de un vector.

Wikipedia: [norma](#)

Definición 22.1 La *norma* (o *módulo*) de un vector $x \in \mathbb{R}^n$ se define como:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

La norma tiene las siguientes propiedades:

- $\|x\| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$.
- $\|x\| = 0$ si y solo si $x = 0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
- $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$.

Aunque pueda resultar un poco extraño, podemos usar el coseno para definir ángulos.

Definición 22.2 El *ángulo* entre dos vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$ es el único $\alpha \in [0, \pi]$ tal que $\cos(\alpha) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}$. Decimos que dos vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$ son *ortogonales* (o *perpendiculares*), y escribimos $x \perp y$ si $\langle x, y \rangle = 0$. Un vector x se llama vector *unitario* (o vector *normalizado*) si $\|x\| = 1$.

Podemos normalizar cualquier vector dividiéndolo por su longitud, de modo que su longitud sea 1. En otras palabras, $y = \frac{x}{\|x\|}$ es siempre un vector unitario (si $\|x\| \neq 0$).

Definición 22.3 Una base $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ se dice *ortogonal* si $\langle u_i, u_j \rangle = 0$ para todo $1 \leq i < j \leq n$. Decimos que B es *ortonormal* si, además, cada vector de la base es unitario, i.e., $\|u_k\| = 1$ para todo $1 \leq k \leq n$.

23. Gram-Schmidt process

Resulta que toda base puede utilizarse para construir una base ortonormal. Este proceso se llama el *proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt*

Wikipedia: proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt

proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt: Sea $B = \{x_1, \dots, x_n\}$ una base. Obtenemos una base ortogonal $B' = \{y_1, \dots, y_n\}$ y una base ortonormal $B'' = \{z_1, \dots, z_n\}$ de la siguiente manera:

(1) Tomamos $y_1 = x_1$ y $z_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|}$.

(2) Sea $y_2 = x_2 + \lambda y_1$ de modo que y_2 sea ortogonal a y_1 .

$$\begin{aligned} 0 &= \langle y_2, y_1 \rangle \\ &= \langle x_2 + \lambda y_1, y_1 \rangle \\ &= \langle x_2, y_1 \rangle + \lambda \langle y_1, y_1 \rangle \end{aligned}$$

Por lo tanto, tomamos $\lambda = -\frac{\langle x_2, y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle}$, de donde:

$$y_2 = x_2 - \frac{\langle x_2, y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} y_1 \quad z_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|}$$

(3) Sea $y_3 = x_3 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ y, como queremos una base ortogonal,

hacemos que y_3 sea ortogonal a y_2 y a y_1 .

$$\begin{aligned}
 0 &= \langle y_3, y_1 \rangle \\
 &= \langle x_3 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2, y_1 \rangle \\
 &= \langle x_3, y_1 \rangle + \lambda_1 \langle y_1, y_1 \rangle + \lambda_2 \langle y_2, y_1 \rangle \\
 &= \langle x_3, y_1 \rangle + \lambda_1 \langle y_1, y_1 \rangle \\
 &\Rightarrow \lambda_1 = -\frac{\langle x_3, y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} \\
 0 &= \langle y_3, y_2 \rangle \\
 &= \langle x_3 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2, y_2 \rangle \\
 &= \langle x_3, y_2 \rangle + \lambda_1 \langle y_1, y_2 \rangle + \lambda_2 \langle y_2, y_2 \rangle \\
 &= \langle x_3, y_2 \rangle + \lambda_2 \langle y_2, y_2 \rangle \\
 &\Rightarrow \lambda_2 = -\frac{\langle x_3, y_2 \rangle}{\langle y_2, y_2 \rangle}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, tomamos

$$y_3 = x_3 - \frac{\langle x_3, y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} y_1 - \frac{\langle x_3, y_2 \rangle}{\langle y_2, y_2 \rangle} y_2 \quad z_3 = \frac{y_3}{\|y_3\|}$$

(4) En general, tenemos:

$$y_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle x_k, y_i \rangle}{\langle y_i, y_i \rangle} y_i \quad z_k = \frac{y_k}{\|y_k\|}$$

Veamos un ejemplo.

Ejemplo 23.1 Supongamos que tenemos la siguiente base. Usando el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt, obtain an orthonormal basis.

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Empezamos con z_1 .

Ahora trabajamos con z_2 . Primero calculemos y_2 .

Finalmente obtenemos z_3 .

24. variedad lineal ortogonal

Dado una variedad lineal L de $\mathbb{R}^n$, podemos construir una variedad lineal cuyos vectores de una base sean todos ortogonales a los vectores de una base de L .

Definición 24.1 Sea L una variedad lineal de $\mathbb{R}^n$. La *variedad lineal ortogonal* de L es la variedad lineal $L^\perp$ tal que

$$L^\perp = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y \rangle = 0, \forall x \in L\}$$

Si $\{a_1, \dots, a_n\}$ es una base de L , entonces, por definición, $\langle x, a_i \rangle = 0$ para todo vector $x \in L^\perp$. Por lo tanto, las ecuaciones implícitas de $L^\perp$ son:

$$\begin{cases} \langle x, a_1 \rangle &= 0 \\ \langle x, a_2 \rangle &= 0 \\ \vdots & \\ \langle x, a_n \rangle &= 0 \end{cases}$$

Ejemplo 24.2 Calcula la variedad lineal ortogonal de la variedad lineal L dada la siguiente base de L :

$$B_L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Wikipedia: [variedad lineal ortogonal](#)

Índice alfabético

- afijo, 8
- aplicación lineal, 51
 - matriz, 53
- argumento, 8
- autovalor, 64
 - multiplicidad algebraica, 68
 - multiplicidad geométrica, 68
- autovector, 64
- base, 35
 - coordenadas del elemento, 39
 - matriz asociada, 39
 - ortogonal, 73
 - ortonormal, 73
- base canónica, 38
- cambio de base, 40
- combinación lineal, 32
- compatible determinado, 28
- compatible indeterminado, 28
- composición, 57
- conjugado, 11
- coordinates, 53
- cuerpo, 31
- diagonal principal, 17
- dimensión, 35
- ecuación característica, 64
- eje imaginario, 7
- eje real, 7
- eliminación de Gauss-Jordan, 27
- endomorfismo, 59
- espacio vectorial, 31
 - euclídeo, 71
- espacio vectorial euclídeo, 71
- forma reducida, 24
- homomorfismos, 59
- image, 62
- imagen, 59
- imagen inverse, 62
- incompatible, 28
- irracionales, 4
- linealmente dependiente, 33
- linealmente independientes, 33
- matriz, 17
 - cuadrada, 17
 - diagonal, 68
 - diagonalizable, 68
 - identidad, 17
 - nula, 17
- matriz ampliada, 28
- método de Gauss, 27
- módulo, 8, 72
- norma, 72
- núcleo, 59
- número complejo, 6
 - afijo, 8
 - forma binómica, 8

- forma exponencial, 10
- forma polar, 10
- forma trigonométrica, 10
- número imaginario, 6
- número imaginario puro, 8
- número real, 4
- números enteros, 3
- números naturales, 3
- números racionales, 4
- ortogonal, 72, 73
- ortonormal, 73
- parte imaginaria, 6
- parte real, 6
- perpendicular, 72
- polinomio característico, 64
- preimage, 62
- proceso de ortogonalización de
 - Gram-Schmidt, 73
- producto escalar, 71
- producto por escalares, 31
- producto punto, 71
- rango, 24
- reducida, 23
- representación gráfica, 7
- semejantes, 59
- sistema de ecuaciones lineales,
 - 27
- sistema generador, 35
- sistema homogéneo, 28
- subespacio invariante, 64
- suma de vectores, 31
- unidad imaginaria, 6
- variedad lineal, 42
 - complementaria, 46
 - generada, 43
 - intersección, 46
 - suma, 46
 - suma directa, 46
- variedad lineal ortogonal, 77
- vector
 - módulo, 72
 - norma, 72
 - normalizado, 72
 - ortogonal, 72
 - perpendicular, 72
 - unitario, 72
 - ángulo, 72
- vector cero, 31
- vectores, 31
- ángulo, 72

Bibliografía

Estos apuntes son basados de los siguientes.

- [1] Manuel Ceballos Gonzalez. *Matemáticas I*. 2025.