

# Cálculo I

Apuntes de Clase - Versión Estudiante

Universidad de Loyola

Grado en Matemática Aplicada

Departamento de Métodos Cuantitativos

por Dr. Aram Dermenjian





# Índice general

|                                                           |           |
|-----------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Bienvenida</b>                                         | <b>1</b>  |
| <b>1. Funciones elementales</b>                           | <b>3</b>  |
| 1. Funciones . . . . .                                    | 3         |
| 2. Funciones simples . . . . .                            | 4         |
| 2.1. Función lineal . . . . .                             | 4         |
| 2.2. Funciones polinómicas . . . . .                      | 5         |
| 2.3. Funciones racionales . . . . .                       | 5         |
| 2.4. Funciones definidas a trozos . . . . .               | 6         |
| 2.5. Funciones piso y techo . . . . .                     | 7         |
| 3. Propiedades . . . . .                                  | 7         |
| 3.1. Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas . . | 7         |
| 3.2. Funciones pares e impares . . . . .                  | 9         |
| 3.3. Funciones monótonas . . . . .                        | 10        |
| 3.4. Operaciones . . . . .                                | 10        |
| 3.5. Inversa . . . . .                                    | 11        |
| 4. Funciones más complejas . . . . .                      | 12        |
| 4.1. Funciones exponenciales y logarítmicas . . . . .     | 12        |
| 4.2. Funciones trigonométricas . . . . .                  | 14        |
| <b>2. Sucesiones y series</b>                             | <b>19</b> |
| 5. Sucesiones . . . . .                                   | 19        |
| 5.1. Sucesiones recurrentes . . . . .                     | 20        |
| 5.2. Representación gráfica . . . . .                     | 20        |
| 5.3. Cotas . . . . .                                      | 21        |
| 5.4. Ínfimo y Supremo . . . . .                           | 25        |
| 5.5. Sucesiones monótonas . . . . .                       | 26        |
| 5.6. Límites de sucesiones . . . . .                      | 28        |
| 6. Series . . . . .                                       | 35        |
| 6.1. Definiciones . . . . .                               | 35        |
| 6.2. Convergencia . . . . .                               | 36        |
| 6.3. Propiedades . . . . .                                | 38        |
| 6.4. Series geométricas . . . . .                         | 39        |
| 6.5. Series armónicas . . . . .                           | 40        |

|           |                                                           |           |
|-----------|-----------------------------------------------------------|-----------|
| 6.6.      | $p$ -series . . . . .                                     | 40        |
| 6.7.      | Series telescópicas . . . . .                             | 41        |
| 6.8.      | Series aritmético-geométricas . . . . .                   | 42        |
| 7.        | Convergencia . . . . .                                    | 44        |
| 7.1.      | Cambio de índice . . . . .                                | 44        |
| 7.2.      | Convergencia absoluta . . . . .                           | 45        |
| 7.3.      | Criterio de comparación . . . . .                         | 45        |
| 7.4.      | Criterio de comparación de límites . . . . .              | 45        |
| 7.5.      | Criterio del cociente . . . . .                           | 46        |
| 7.6.      | Criterio de la raíz . . . . .                             | 47        |
| 7.7.      | Criterio de Leibnitz para series alternadas . . . . .     | 47        |
| 7.8.      | Más ejemplos . . . . .                                    | 49        |
| <b>3.</b> | <b>Límites y continuidad</b>                              | <b>53</b> |
| 8.        | Funciones acotadas . . . . .                              | 53        |
| 9.        | Límites . . . . .                                         | 54        |
| 9.1.      | Un problema tangencial . . . . .                          | 54        |
| 9.2.      | Límites . . . . .                                         | 55        |
| 9.3.      | Definición precisa de límite . . . . .                    | 60        |
| 9.4.      | Propiedades de límites . . . . .                          | 68        |
| 9.5.      | Al infinito y adelante . . . . .                          | 70        |
| 10.       | Continuidad . . . . .                                     | 75        |
| <b>4.</b> | <b>Derivadas de una variable</b>                          | <b>81</b> |
| 11.       | Derivadas . . . . .                                       | 81        |
| 11.1.     | La derivada . . . . .                                     | 84        |
| 11.2.     | Derivadas de orden superior . . . . .                     | 86        |
| 12.       | Derivadas de varias funciones . . . . .                   | 87        |
| 12.1.     | Derivadas de polinomios . . . . .                         | 87        |
| 12.2.     | Funciones exponenciales . . . . .                         | 89        |
| 12.3.     | Derivadas de funciones trigonométricas . . . . .          | 91        |
| 13.       | Maneras de calcular derivadas más complejas . . . . .     | 93        |
| 13.1.     | Reglas del producto y del cociente . . . . .              | 93        |
| 13.2.     | La regla de la cadena . . . . .                           | 98        |
| 13.3.     | Derivación implícita . . . . .                            | 99        |
| 14.       | Más derivadas . . . . .                                   | 101       |
| 14.1.     | Derivadas de funciones trigonométricas inversas . . . . . | 101       |
| 14.2.     | Derivadas de funciones logarítmicas . . . . .             | 102       |
| 15.       | Usos de la derivada . . . . .                             | 105       |
| 15.1.     | Valores máximos y mínimos . . . . .                       | 105       |
| 15.2.     | El teorema del valor medio . . . . .                      | 109       |
| 16.       | Regla de L'Hôpital . . . . .                              | 112       |
| 16.1.     | La forma $\infty - \infty$ . . . . .                      | 115       |
| 16.2.     | La forma $0 \cdot \pm\infty$ . . . . .                    | 115       |

|           |                                                                              |            |
|-----------|------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 16.3.     | Las formas $0^0$ , $\infty^0$ y $1^{\pm\infty}$                              | 116        |
| <b>5.</b> | <b>Integración</b>                                                           | <b>119</b> |
| 17.       | Antiderivadas                                                                | 119        |
| 18.       | Áreas y distancias                                                           | 122        |
| 19.       | Integral definida                                                            | 124        |
| 19.1.     | Propiedades de las integrales definidas                                      | 128        |
| 19.2.     | El teorema fundamental del cálculo                                           | 128        |
| 20.       | Integrales indefinidas                                                       | 130        |
| 21.       | Cómo resolver integrales                                                     | 132        |
| 21.1.     | Sustitución                                                                  | 132        |
| 21.2.     | Funciones pares e impares                                                    | 136        |
| 21.3.     | Completar el cuadrado                                                        | 137        |
| 21.4.     | El área de una región plana                                                  | 139        |
| 21.5.     | Integración por partes                                                       | 143        |
| 21.6.     | ¡Secantes, cosecantes, tangentes y cotangentes!                              | 149        |
| 21.7.     | Integración por sustitución trigonométrica                                   | 151        |
| 21.8.     | Integración de expresiones que contienen funciones cuadráticas               | 154        |
| 21.9.     | Integración de funciones racionales por descomposición en fracciones simples | 155        |
| <b>6.</b> | <b>Sucesiones y series de funciones</b>                                      | <b>157</b> |
| 22.       | Sucesiones de funciones                                                      | 157        |
| 22.1.     | Definiciones                                                                 | 157        |
| 22.2.     | Cotas                                                                        | 157        |
| 22.3.     | Convergencia y límites                                                       | 158        |
| 23.       | Series de funciones                                                          | 160        |
| 23.1.     | Convergencia                                                                 | 160        |
| 23.2.     | Series de potencias                                                          | 163        |
| 23.3.     | Series de Taylor y Maclaurin                                                 | 165        |
| <b>A.</b> | <b>Conjuntos numéricos</b>                                                   | <b>167</b> |
| 1.        | Conjuntos                                                                    | 167        |
| 1.1.      | Definición                                                                   | 167        |
| 1.2.      | Notación                                                                     | 167        |
| 2.        | Conjuntos notables                                                           | 168        |
| 3.        | Representación gráfica                                                       | 168        |
| 4.        | Subconjuntos                                                                 | 170        |
| 5.        | Operaciones                                                                  | 170        |
| 5.1.      | Intersección                                                                 | 170        |
| 5.2.      | Unión                                                                        | 171        |
| 5.3.      | Diferencia                                                                   | 171        |
| 5.4.      | Diferencia simétrica                                                         | 171        |

|           |                                             |            |
|-----------|---------------------------------------------|------------|
| 5.5.      | Complementario . . . . .                    | 172        |
| 6.        | Propiedades . . . . .                       | 172        |
| 7.        | Cardinal . . . . .                          | 173        |
| 8.        | Conjunto potencia . . . . .                 | 174        |
| 9.        | Producto cartesiano . . . . .               | 174        |
| 9.1.      | Definición . . . . .                        | 174        |
| 9.2.      | Propiedades . . . . .                       | 174        |
| <b>B.</b> | <b>Descomposición en fracciones simples</b> | <b>177</b> |
| 10.       | Factorizar . . . . .                        | 177        |
| 11.       | Decompose . . . . .                         | 178        |
|           | <b>Bibliografía</b>                         | <b>187</b> |

# Bienvenida

¡Bienvenidos a Cálculo II!

Este semestre vamos a trabajar con un montón de temas diferentes con el fin de que estén mejor preparados y cuenten con las herramientas necesarias para el cálculo. Estas notas están diseñadas para ayudarles a aprender mejor el material y guiarlos a lo largo del curso.

**Cómo usar estas notas:** Estas notas son diferentes de la mayoría de las notas de clase de matemáticas. Tienen huecos; ¡les falta información! Estas son las notas que utilizaré (literalmente) durante las clases, así que deberían ayudarles a seguir el ritmo. El propósito de estas notas es que no tengan que escribirlo todo; solo necesitan completar los huecos, lo que les dará más tiempo para escuchar las explicaciones y comprender mejor el material. Si necesitan añadir notas adicionales, hay muchísimo espacio en los márgenes. ¡Úsenlo! Estas son SUS notas. También he añadido enlaces a Wikipedia por si quieren otra referencia para los términos y las definiciones que veremos. Si sienten que usar estas notas dificulta su aprendizaje, entonces, por favor, utilicen otro sistema. El objetivo es aprender; así que usen lo que mejor les funcione.

Antes de comenzar una clase, les recomiendo echar un vistazo rápido a las notas (5-10 minutos) para hacerse una idea general de lo que veremos en clase. Recuerden repasar estas notas periódicamente para no olvidar los términos y ejemplos.

¡Buena suerte, creo en ustedes!

-Aram

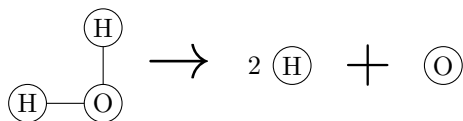


# Capítulo 1

## Funciones elementales

### 1. Funciones

Una función no es más que una regla en la que introduces algo y obtienes otra cosa. Por ejemplo:



**Definición 1.1** Más explícitamente, una *función*  $f$  es una regla que asigna a cada  $x$  de un conjunto  $D$  *exactamente* un elemento \_\_\_\_\_ de un conjunto  $E$ . Normalmente se denota \_\_\_\_\_, donde  $D$  se llama *dominio* y  $E$  se llama *codominio*. Para  $x \in D$ ,  $f(x) \in E$  se llama la *imagen* de  $x$ , y  $x$  se llama una *preimagen* de  $f(x)$ . El *rango* de  $f$  es el conjunto de todos los valores posibles de  $f(x)$  para cada  $x$  en  $D$ .

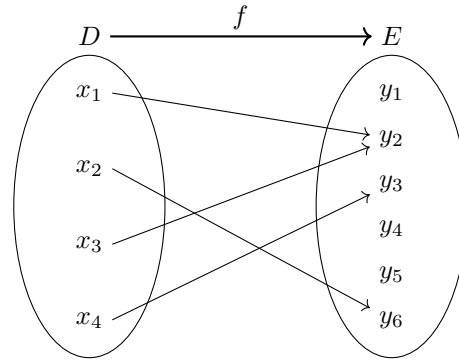
**Problema 1.2** ¡Crea tu propia función que no use números ni átomos! Cuando termines, compárala con la persona que tengas al lado.

Wikipedia: [función](#)

Wikipedia: [dominio](#)

Wikipedia: [imagen](#)

**Ejemplo 1.3** Sean  $D = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  y  $E = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6\}$ . Podemos representar la función de la siguiente manera:



- Dominio: \_\_\_\_
- Codominio: \_\_\_\_
- Rango: \_\_\_\_\_
- Imagen: ¿Cuál es la imagen de  $x_2$ ? \_\_\_\_;
- Preimage: ¿Cuál es la preimagen de  $y_2$ ? \_\_\_\_\_.

## 2. Funciones simples

Veamos algunos ejemplos.

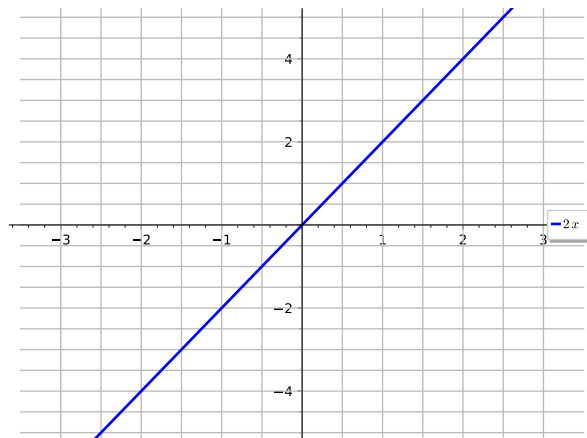
### 2.1. Función lineal

Wikipedia: [función lineal](#)

**Definición 2.1** Una *función lineal* es una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  cuya gráfica es una recta (e.g. funciones de la forma  $f(x) = mx + b$  donde  $m, b \in \mathbb{R}$ ).

**Ejemplo 2.2** Sea  $f$  la función lineal  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = 2x$ .

Dominio: \_\_\_\_ Codominio: \_\_\_\_ Rango: \_\_\_\_



## 2.2. Funciones polinómicas

**Definición 2.3** Un *polinomio* es una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$

donde  $a_0, \dots, a_n$  se denominan *coeficientes* y, si  $a_n \neq 0$ , se dice que  $f$  tiene *grado  $n$* .

Algunos polinomios tienen nombres especiales según el grado  $n$ :

- Si  $n = 1$ , entonces es una función lineal.
- Si  $n = 2$ , entonces es una *función cuadrática*.
- Si  $n = 3$ , entonces es una *función cúbica*.

Wikipedia: [coeficientes](#)

Wikipedia: [grado  \$n\$](#)

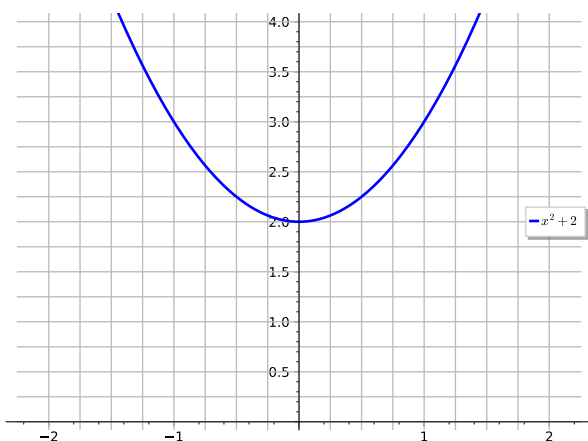
Wikipedia: [función cuadrática](#)

Wikipedia: [función cúbica](#)

Hay más (cuártica, quíntica, séxtica, séptica, etc.), pero nos paramos aquí.

**Ejemplo 2.4** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  el polinomio de grado 2 dado por  $f(x) = x^2 + 2$ .

Dominio: \_\_\_\_ Codominio: \_\_\_\_ Rango: \_\_\_\_



## 2.3. Funciones racionales

**Definición 2.5** Una *función racional*  $f$  es el cociente de dos polinomios  $P(x)$  y  $Q(x)$ :

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

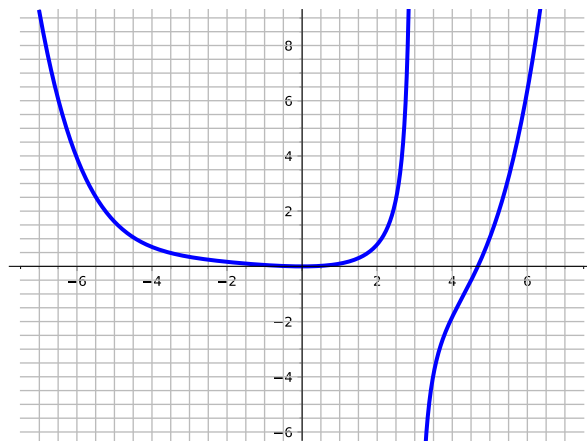
Wikipedia: [función racional](#)

**Ejemplo 2.6** Sea  $f$  la función racional

$$f(x) = \frac{x^7 - x^5 - 7x^4 + x^3 - 2000x^2 + 67}{10000(x - 3)}$$

Dominio: \_\_\_\_ Codominio: \_\_\_\_

¿Por qué no estoy preguntando por el codominio? \_\_\_\_\_



**Ejemplo 2.7** ¿Son las funciones  $f(x) = x$  y  $g(x) = \frac{x^2}{x}$  la misma función? \_\_\_\_\_

## 2.4. Funciones definidas a trozos

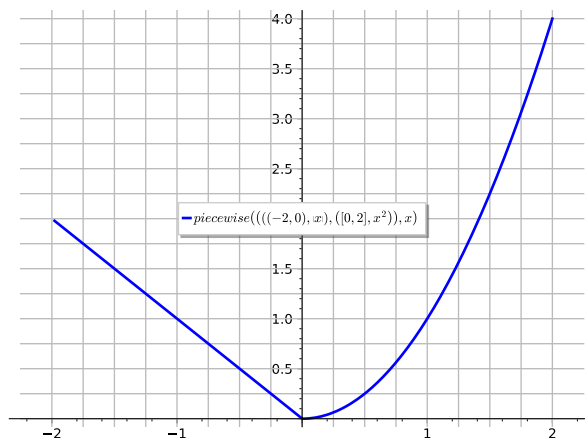
Wikipedia: [función definida a trozos](#)

**Definición 2.8** Una *función definida a trozos* es una función que tiene distintas fórmulas en distintas partes de su dominio. Esto se entiende mejor con un ejemplo.

**Ejemplo 2.9** Sea  $f$  la función definida a trozos  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \underline{\hspace{10em}}$$

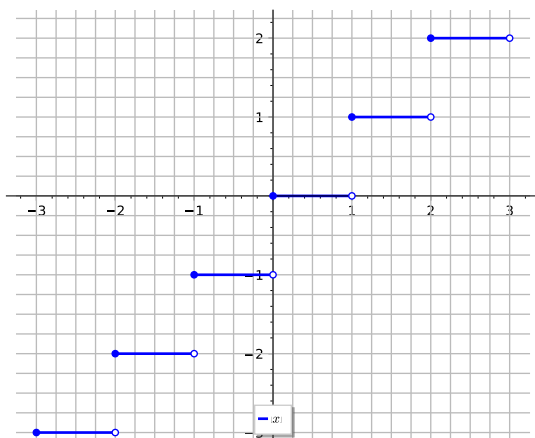
Dominio: \_\_\_\_ Codominio: \_\_\_\_ Rango: \_\_\_\_



## 2.5. Funciones piso y techo

**Definición 2.10** Sea  $f$  la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = \lfloor x \rfloor$ . Aquí  $\lfloor x \rfloor$  significa que redondeamos hacia abajo al entero más cercano. Por ejemplo,  $\lfloor \pi \rfloor = 3$ ,  $\lfloor 2,4 \rfloor = 2$ ,  $\lfloor 1 \rfloor = 1$  y  $\lfloor -2,2 \rfloor = -3$ . Esta función se conoce como la *función piso*. Hay una función similar  $g(x) = \lceil x \rceil$  que redondea hacia arriba, llamada *función techo*.

Dominio: \_\_\_\_ Codominio: \_\_\_\_ Rango: \_\_\_\_



## 3. Propiedades

### 3.1. Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas

**Definición 3.1** Sea  $f : D \rightarrow E$  una función.

Decimos que  $f$  es *inyectiva* si cada elemento de la imagen tiene una única preimagen. En otras palabras, si  $x_1 \neq x_2$ , entonces  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .

Decimos que  $f$  es *sobreyectiva* si el rango coincide con todo el codominio.

Finalmente, decimos que  $f$  es *biyectiva* si es tanto inyectiva como sobreyectiva.

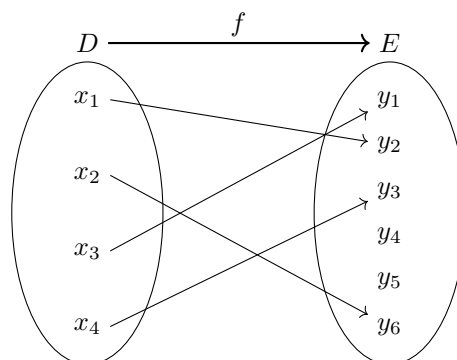
Wikipedia: [inyectiva](#)

Wikipedia: [sobreyectiva](#)

Wikipedia: [biyectiva](#)

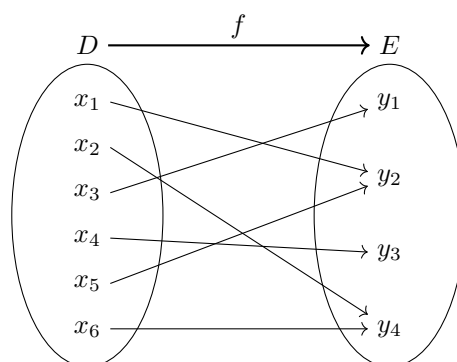
Veamos algunos ejemplos:

### Ejemplo 3.2



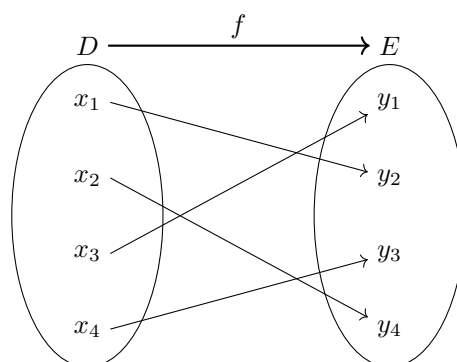
Inyectiva: \_\_\_\_ Sobreyectiva: \_\_\_\_ Biyectiva: \_\_\_\_

### Ejemplo 3.3

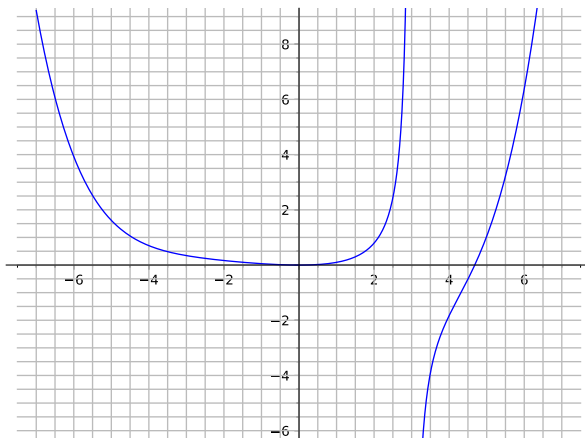


Inyectiva: \_\_\_\_ Sobreyectiva: \_\_\_\_ Biyectiva: \_\_\_\_

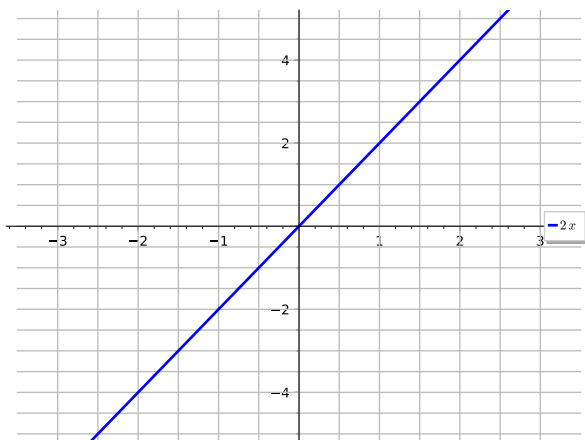
### Ejemplo 3.4



Inyectiva: \_\_\_\_ Sobreyectiva: \_\_\_\_ Biyectiva: \_\_\_\_

**Ejemplo 3.5**

Inyectiva: \_\_\_\_\_ Sobreyectiva: \_\_\_\_\_ Biyectiva: \_\_\_\_\_

**Ejemplo 3.6**

Inyectiva: \_\_\_\_\_ Sobreyectiva: \_\_\_\_\_ Biyectiva: \_\_\_\_\_

**Proposición 3.7** Una función es inyectiva si y solo si \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

**3.2. Funciones pares e impares**

**Definición 3.8** Una función *par* es una función  $f$  que satisface  $f(-x) = f(x)$ . Una función *impar* es una función  $f$  que satisface  $f(-x) = -f(x)$ .

Wikipedia: [par](#)

**Ejemplo 3.9** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función  $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ . ¿Es par o impar? \_\_\_\_\_

**Ejemplo 3.10** Sean  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función  $f(x) = \sin(x)$  y  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función  $g(x) = \cos(x)$ . ¿Cuál es par y cuál es impar?

Par: \_\_\_\_\_ Impar: \_\_\_\_\_

**Problema 3.11** Con la persona que tengas al lado: Da un ejemplo de una función que no sea ni par ni impar:

**Problema 3.12** Con la persona que tengas al lado: Da un ejemplo de una función que sea par e impar a la vez:

### 3.3. Funciones monótonas

Wikipedia: [intervalo cerrado](#)

Antes de empezar, recuerda que  $[a, b]$  es un *intervalo cerrado* de  $\mathbb{R}$  y  $(a, b)$  es un *intervalo abierto* de  $\mathbb{R}$ .

**Definición 3.13** Una función  $f : D \rightarrow E$  se llama *creciente* en un intervalo  $I$  si:

$$f(x) \leq f(y) \text{ para todo } x \leq y \text{ en } I.$$

Una función  $f : D \rightarrow E$  se llama *decreciente* en un intervalo  $I$  si:

$$f(x) \geq f(y) \text{ para todo } x \leq y \text{ en } I.$$

Wikipedia: [monótona](#)

Una función  $f : D \rightarrow E$  es *monótona* si es creciente o decreciente.

### 3.4. Operaciones

**Definición 3.14** Sean  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones. Entonces,

- $f + g : D \cap E \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- $f - g : D \cap E \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
- $fg : D \cap E \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- $\frac{f}{g} : (D \cap E - \{x \in E \mid g(x) = 0\}) \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

**Ejemplo 3.15** Sean  $f(x) = x^2$  y  $g(x) = x - 1$ .

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= \underline{\hspace{2cm}} & (f - g)(x) &= \underline{\hspace{2cm}} \\ (fg)(x) &= \underline{\hspace{2cm}} & \frac{f}{g}(x) &= \underline{\hspace{2cm}} \end{aligned}$$

Wikipedia: [composición](#)

**Definición 3.16** La *composición* de dos funciones  $f : A \rightarrow B$  y  $g : B \rightarrow C$  es la función  $g \circ f : A \rightarrow C$  dada por

$$g \circ f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$



¡El orden importa en la composición, igual que en la resta y la división!

**Ejemplo 3.17** Sean  $f(x) = x^2$  y  $g(x) = x - 1$ .

$$(f \circ g)(x) = \quad (g \circ f)(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

**Problema 3.18** Con la persona que tengas al lado: Sean  $f(x) = x + 3$  y  $g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ .

$$(f \circ g)(x) = \underline{\hspace{2cm}} \qquad (g \circ f)(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

### 3.5. Inversa

Una función nos permite asociar un número  $a$  con un número  $b$  mediante una fórmula, pero ¿qué pasa si queremos ir en sentido contrario? ¿Cómo encontramos una función que nos permita pasar de  $b$  a  $a$ ? ¿Es siquiera posible?

**Ejemplo 3.19** Probemos con un ejemplo sencillo. Sea  $f$  la función  $f(x) = x + 1$ . Para ir en sentido contrario tendríamos que usar la fórmula

¡Pero esto no siempre funciona!

**Ejemplo 3.20** Sea  $f$  la función  $f(x) = x^2$ . Si sé que  $f(x) = 4$ , ¿cuál es  $x$ ?

¿Qué regla necesitamos para asegurarnos de que esto *sí* funcione siempre? La función tiene que ser  $\frac{1}{2}$ .

**Definición 3.21** Sea  $f : A \rightarrow B$  una función \_\_\_\_\_. Entonces su *función inversa* es la función \_\_\_\_\_  $f^{-1} : B \rightarrow A$ , definida mediante

Wikipedia: [función inversa](#)

**Ejemplo 3.22** Tomando el ejemplo anterior, con  $f(x) = x^2$ . Si en lugar de definir  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la definimos como  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ , entonces sí tiene inversa. Su función inversa es  $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ .

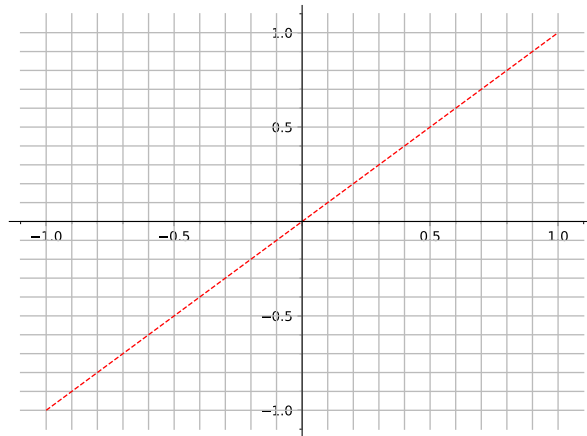
¿Cómo encontramos la inversa de una función?

- (1) \_\_\_\_\_
- (2) \_\_\_\_\_
- (3) \_\_\_\_\_

**Ejemplo 3.23** Si  $f(x) = x^2$ , entonces

- (1) \_\_\_\_\_.
- (2) \_\_\_\_\_.
- (3) \_\_\_\_\_.

Gráficamente, podemos pensar en esto como una reflexión respecto de la recta  $y = x$ .



¡La inversa y la recíproca no siempre son lo mismo!

$$f^{-1}(x) \neq (f(x))^{-1}$$

**Problema 3.24** Con la persona que tengas al lado: Sea  $f(x) = x^3 + 1$ .  
¿Cuál es su función inversa?

$$f^{-1}(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

¿Cuál es su función recíproca?

$$(f(x))^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$$

## 4. Funciones más complejas

### 4.1. Funciones exponenciales y logarítmicas

#### Exponencial

Wikipedia: [función exponencial](#)

**Definición 4.1** Una *función exponencial* es una función de la forma

$$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

donde  $b$  es una constante positiva (*i.e.*,  $b \in \mathbb{R}^+$ ).

¿Cómo calculamos  $b^x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ ?

| $x$                                              | $b^x$                     | Ejemplo |
|--------------------------------------------------|---------------------------|---------|
| Entero ( $\mathbb{Z}$ )                          | $b^x$                     |         |
| Racional ( $\mathbb{Q}$ )                        | $b^{p/q} = \sqrt[q]{b^p}$ |         |
| Irracional ( $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ) | Estimar usando la gráfica |         |

**Ejemplo 4.2** Sean  $f(x) = 2^x$  y  $g(x) = x^2$ .

$$(f \circ g)(x) = \underline{\hspace{2cm}} \quad (g \circ f)(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

¿Son estas la misma función? (i.e., ¿se cumple  $f \circ g = g \circ f$ ?)  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

### Logaritmo

Para una función exponencial, llamamos *logaritmo* a su inversa. Más precisamente, tenemos la siguiente definición.

**Definición 4.3** Para  $f(x) = b^x$  (donde  $b > 0$  y  $b \neq 1$ ), la función exponencial pasa la prueba de la recta horizontal. La función *logaritmo* de base  $b$ , denotada  $\underline{\hspace{2cm}}$ , es la inversa de  $f(x)$ ; i.e.,  $f(x) = b^x$  implica que  $f^{-1}(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

Wikipedia: [logaritmo](#)

**Ejemplo 4.4** Sea  $f(x) = 10^x$ .

Algunas propiedades útiles de los logaritmos:

- $\log_b(xy) = \underline{\hspace{2cm}}$
- $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$
- $\log_b(x^y) = \underline{\hspace{2cm}}$

Cuando  $b = \underline{\hspace{1cm}}$ , el logaritmo se llama *logaritmo natural* y se denota  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

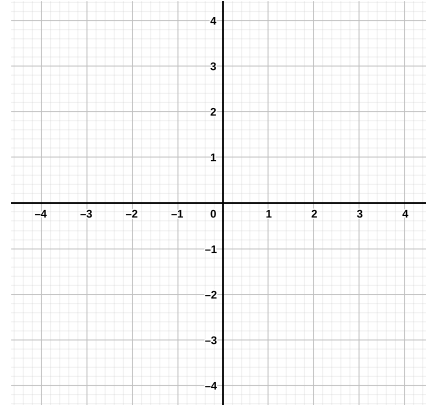


En algunos libros se escribe  $\log(x)$  (sin subíndice) para referirse a  $\log_{10}(x)$  o a  $\log_e(x) = \ln(x)$ . Comprueba siempre en el libro cuál de las dos convenciones se está usando.

## 4.2. Funciones trigonométricas

### Funciones trigonométricas

La forma favorita de Aram de visualizar las funciones trigonométricas:



Esto también nos permite calcular las demás funciones trigonométricas:

$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\operatorname{cos}(\theta)}, \operatorname{csc}(\theta) = \frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)}, \operatorname{sec}(\theta) = \frac{1}{\operatorname{cos}(\theta)}, \operatorname{cot}(\theta) = \frac{\operatorname{cos}(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)}$$

Aunque hemos tomado el radio igual a 1, ¡podemos cambiar el radio! Entonces necesitamos un nuevo método para calcular nuestras funciones trigonométricas. Esto nos da las siguientes formas de calcular las funciones trigonométricas.

Hay algunas funciones trigonométricas cuyos valores conviene saber calcular rápidamente.

|                         | 0 | $\frac{\pi}{6}$      | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\pi}{2}$ |
|-------------------------|---|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|
| $\operatorname{sen}(x)$ | 0 | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1               |
| $\operatorname{cos}(x)$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0               |
| $\operatorname{tg}(x)$  | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           | --              |

Estas son algunas identidades trigonométricas que conviene conocer:

$$(1) \operatorname{sen}^2(x) + \operatorname{cos}^2(x) = 1$$

$$(2) \operatorname{tg}^2(x) + 1 = \operatorname{sec}^2(x)$$

$$(3) 1 + \operatorname{cot}^2(x) = \operatorname{csc}^2(x)$$

$$(4) \sin(x \pm y) = \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y)$$

$$(5) \cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y)$$

$$(6) \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$$(7) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

$$(8) \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

$$(9) \sin(x) \pm \sin(y) = 2 \sin\left(\frac{x \pm y}{2}\right) \cos\left(\frac{x \mp y}{2}\right)$$

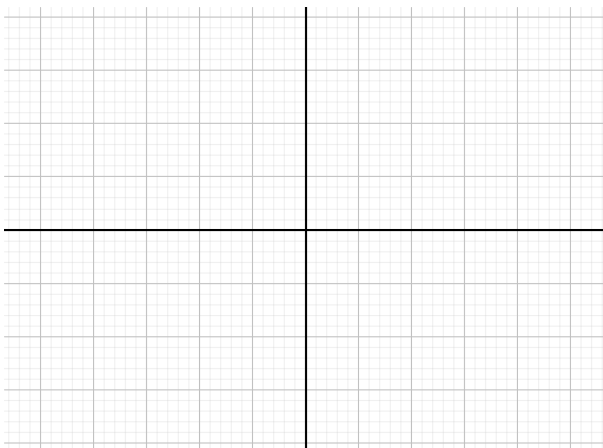
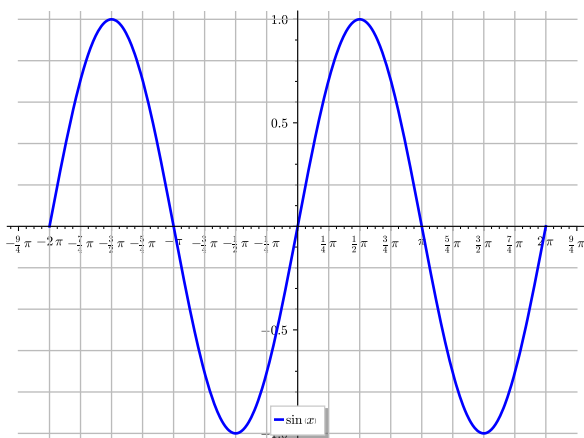
$$(10) \cos(x) + \cos(y) = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$(11) \cos(x) - \cos(y) = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

### Funciones trigonométricas inversas

Empecemos con  $\sin(x)$ . ¿Cómo encontramos su inversa? Recuerda que basta con reflejar respecto de la recta \_\_\_\_\_ para encontrar la inversa. Así que hagámoslo.

**Problema 4.5** Refleja  $f(x) = \sin(x)$  respecto de la recta \_\_\_\_\_.



Compara tu dibujo con el de la persona que tengas al lado. ¿Esta reflexión nos da una función inversa? \_\_\_\_\_. ¿Cómo obtenemos una función inversa? \_\_\_\_\_

La función inversa del seno se conoce como función *arcoseno* y es la función:

**Ejemplo 4.6** ¿Cuál es  $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ? \_\_\_\_\_

¡Podemos hacer lo mismo con el coseno! La función inversa del coseno se conoce como función *arcocoseno*.

**Ejemplo 4.7** ¿Cuál es  $\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$ ? \_\_\_\_\_

**Problema 4.8** Resuelve lo siguiente con un compañero:

(1)  $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) =$  \_\_\_\_\_

(2)  $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$  \_\_\_\_\_

(3)  $\arcsin(1) =$  \_\_\_\_

(4)  $\arccos(1) =$  \_\_

La función inversa de la tangente se conoce como función *arcotangente*.

Hay otras 3 funciones trigonométricas:

$$\csc = \frac{1}{\operatorname{sen}} \quad \sec = \frac{1}{\cos} \quad \cotan = \frac{1}{\operatorname{tg}}$$

Pongamos todo esto en una tabla:

| Función                    | Dominio      | Rango                                          |
|----------------------------|--------------|------------------------------------------------|
| $\arcsin(x)$               | $[-1, 1]$    | $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$              |
| $\arccos(x)$               | $[-1, 1]$    | $[0, \pi]$                                     |
| $\arctan(x)$               | $\mathbb{R}$ | $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$              |
| $\operatorname{arccsc}(x)$ | $ x  \geq 1$ | $(-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$  |
| $\operatorname{arcsec}(x)$ | $ x  \geq 1$ | $[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$ |
| $\operatorname{arccot}(x)$ | $\mathbb{R}$ | $(0, \pi)$                                     |

**Problema 4.9** Resuelve lo siguiente con un compañero:

(1)  $\arctan(1) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(2)  $\arctan(0) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(3)  $\operatorname{arccsc}(\sqrt{2}) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

### Hiperbólicas

No usaremos mucho estas funciones en este curso, pero ten en cuenta que existen funciones trigonométricas conocidas como *funciones trigonométricas hiperbólicas*. Las incluimos aquí para utilizarlas más adelante:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$



## Capítulo 2

# Sucesiones y series

### 5. Sucesiones

Frecuentemente en matemáticas trabajamos con muchos números. Normalmente estos números están ordenados. Por ejemplo

$$\begin{aligned}1, 2, 3, 4, \dots \\ 1, 1, 1, 1, \dots \\ 1, -4, 9, -16, \dots\end{aligned}$$

Podemos usar las matemáticas para definir mejor esas sucesiones de números.

**Definición 5.1** Una *sucesión de números reales*  $a$  es una aplicación que asigna a cada  $n \in \mathbb{N}$  un número real:

Wikipedia: [sucesión de números reales](#)

$$a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}.$$

La sucesión  $a$  se notará por  $a_n = \underline{a(n)}$  y escribimos la sucesión por  $a_1, a_2, \dots$ . También, se suele usar la notación  $\{a_n\}$  para indicar la sucesión, *e.g.* \_\_\_\_\_. El número  $n$  de la notación  $a_n$  es el *índice* de  $a_n$ .

**Ejemplo 5.2** (1)  $1, 1, 1, 1, 1, \dots = \{1\}$

(2)  $1, 2, 3, 4, 5, \dots = \{n\}$

(3)  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots =$  \_\_\_\_\_

(4)  $1, 2, 6, 24, 120, \dots =$  \_\_\_\_\_

(5)  $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots = \left\{ \frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}} \right\}$  donde  $\varphi = 1,61803398874989 \dots$

(6)  $1, 1, 2, 5, 14, 42, \dots = \left\{ \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \right\}$

(7) Haz tu propio ejemplo: \_\_\_\_\_

### Ejemplo 5.3 La sucesión

$$\{a_n\} = 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$$

tiene elementos:

Wikipedia: Sucesión de Fibonacci

Esta sucesión se llama la sucesión de Fibonacci y es mejor definirla de manera recursiva.

### 5.1. Sucesiones recurrentes

Los ejemplos anteriores definen una sucesión a través de una regla basada en los índices de los elementos (*e.g.*  $n$ ,  $\frac{1}{n}$ , etc.) o directamente definiendo la sucesión de números.

Otra forma de definir una sucesión utiliza elementos anteriores de la misma sucesión para definir las siguientes. Este tipo de sucesión se llama *sucesión recurrente*.

Wikipedia: sucesión recurrente

**Ejemplo 5.4** (1)  $1, 1, 1, 1, 1, \dots$ :  $a_1 = 1$  y  $a_n = a_{n-1}$ .

(2)  $1, 2, 3, 4, 5, \dots: a_1 = 1$  y  $a_n = a_{n-1} + 1$ .

$$(3) \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots: a_1 = \frac{1}{2} \text{ y } a_n = \frac{n-1}{n}a_{n-1}.$$

(4)  $1, 2, 6, 24, 120, \dots$ :  $a_1 = \underline{\hspace{1cm}}$  y  $a_n = \underline{\hspace{1cm}}$ .

(5)  $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$ :  $a_1 = \underline{\hspace{1cm}}$  y  $a_n = \underline{\hspace{1cm}}$ .

(6)  $1, 1, 2, 5, 14, 42, \dots$ :  $a_1 = 1$  y  $a_n = \frac{2(2n-1)}{n+1}a_{n-1}$ .

(7) Haz tu propio ejemplo:

## 5.2. Representación gráfica

La representación gráfica de una sucesión puede ayudar en el análisis de su comportamiento, cuando consideramos valores de  $n$  llegando a un cierto valor o hasta infinito.

**Ejemplo 5.5** La aplicación  $c_n = \frac{1}{n}$  da la sucesión:

$$\{c_n\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$$

que se puede representar por la gráfica:

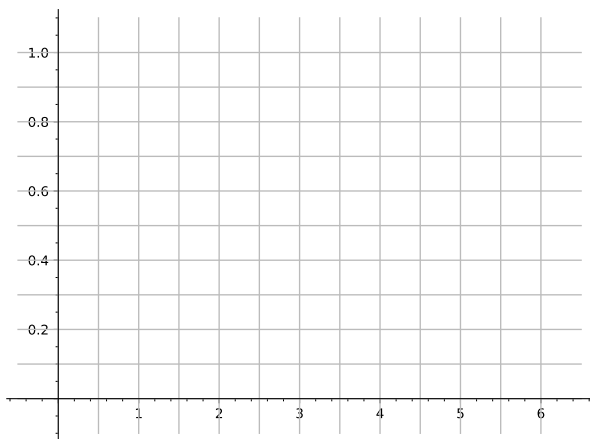


Figura 2.1: Sucesión - gráfica

o también por una línea recta:

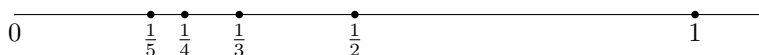


Figura 2.2: Sucesión - línea recta

Normalmente, usamos la gráfica porque nos ayuda ver como la sucesión cambia.

### 5.3. Cotas

**Definición 5.6** Una sucesión  $\{a_n\}$  está *acotada superiormente* si existe  $M \in \mathbb{R}$  tal que  $a_n \leq M$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . En tal caso, se dirá que  $M$  es una *cota superior* de  $\{a_n\}$ .

Wikipedia: [cota superior](#)

**Ejemplo 5.7** La sucesión

$$\{b_n\} = -1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$$

tiene cota superior, o está acotada superiormente por los números \_\_, \_\_, \_\_, \_\_, ...

**Definición 5.8** Una sucesión  $\{a_n\}$  está *acotada inferiormente* si existe  $m \in \mathbb{R}$  tal que  $a_n \geq m$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . En tal caso, se dirá que  $m$  es una *cota inferior* de  $\{a_n\}$ .

**Ejemplo 5.9** La sucesión

$$\{a_n\} = \left\{ \frac{n+1}{n} \right\} = 2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots$$

tiene cota inferior, o está acotada inferiormente por los números \_\_\_\_, \_\_\_\_, \_\_, \_\_, ...

**Definición 5.10** Una sucesión  $\{a_n\}$  está *acotada* si existe  $m, M \in \mathbb{R}$

tal que  $m \leq a_n \leq M$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Es decir, una sucesión está acotada si está acotada superiormente e inferiormente.

**Ejemplo 5.11** La sucesión

$$\{a_n\} = \left\{ \frac{4-3n}{n^2} \right\}$$

con la representación gráfica siguiente

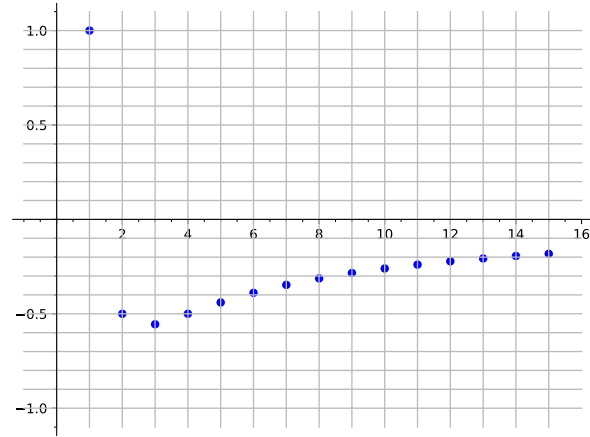


Figura 2.3: Sucesión acotada

tiene cota inferior  $-1$  y cota superior  $1$ , entonces es una sucesión acotada.

Para demostrar (matemáticamente) que una sucesión está acotada, hay que verificar que  $m, M \in \mathbb{R}$  sean tales que  $m \leq a_n \leq M$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Consideramos tres métodos:

- Álgebra
- Cotas conocidas
- Inducción

### Álgebra

Usando la ecuación que define la sucesión, y definiciones de álgebra conocidas, es posible demostrar la existencia de cotas de una sucesión.

**Ejemplo 5.12** Demostrar que la sucesión  $\{a_n\} = \left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$  tiene cota superior.

En este caso, empezamos comparando el numerador y denominador del cociente. Podemos afirmar que  $n < n+1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces, si dividimos los dos lados por  $n+1$  tenemos  $\frac{n}{n+1} < 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .



**Ejemplo 5.16** Demostrar que para todo  $n \in \mathbb{N}$ , la sucesión (recurrente)  $\{a_n\}$  definida por  $a_1 = 0$  y  $a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}$  está acotada superiormente por  $\frac{1}{2}$ .

Comprobamos este enunciado usando inducción:

**Base:** Cuando  $n = 1$ ,  $a_1 = 0$ . Entonces es cierto que  $a_1 < \frac{1}{2}$  y la proposición es verdad para  $n = 1$ .

**Hipótesis:** Supongamos que la proposición es verdad para  $n = k$ . Es decir  $a_k \leq \frac{1}{2}$  para  $k \in \mathbb{N}$ .

**Paso inductivo:** Demostramos que la proposición es verdadera para  $n = k+1$ , es decir que  $a_{k+1} \leq \frac{1}{2}$ . Recordamos que  $a_{k+1} = a_k^2 + \frac{1}{4}$ . Además, ya que  $a_k \leq \frac{1}{2}$  sabemos que  $a_k^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ . Agrupando estos dos juntos, tenemos:

$$a_{k+1} = a_k^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

**Ejemplo 5.17** Demuestra que la sucesión definida por  $\{a_n\} = \left\{\frac{4-3n}{n^2}\right\}$  está acotada superiormente por 1.

Como antes, demostramos esta proposición por inducción.

**Base:** Cuando \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

**Hipótesis:** Supongamos que la proposición es verdadera para \_\_\_\_\_.  
 Es decir, \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

**Paso inductivo:** Debemos demostrar que la proposición es verdadera para \_\_\_\_\_. Por definición, sabemos que  $a_{k+1} =$  \_\_\_\_\_. Tenemos:  
 \_\_\_\_\_

**Ejercicio 5.18** Demostrar que la sucesión  $\{x_n\}$  definida por  $x_1 = 1$  y  $x_{n+1} = \sqrt{1 + 2x_n}$  está acotada superiormente por 4 para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

## 5.4. Ínfimo y Supremo

El *ínfimo* de una sucesión es la mayor de las cotas inferiores, o en otras palabras, es el máximo del conjunto de las cotas inferiores. Una cota inferior  $m$  es el ínfimo de una sucesión  $\{a_n\}$  si:

$$m_0 \geq m \quad \text{para toda cota inferior de la sucesión } \{a_n\}.$$

Denotamos el ínfimo por  $m_0$  o por  $\inf(a_n)$ .

El *supremo* de una sucesión es la menor de las cotas superiores, o en otras palabras, es el mínimo del conjunto de las cotas superiores. Una cota superior  $M_0$  es el supremo de una sucesión  $\{a_n\}$  si:

$$M_0 \leq M \quad \text{para toda cota superior de la sucesión } \{a_n\}.$$

Denotamos el supremo por  $M_0$  o por  $\sup(a_n)$ .

**Teorema 5.19** (Unicidad del supremo) *Si una sucesión tiene supremo, es único.*

*Demostración.* Sea  $\{a_n\}$  una sucesión de números reales. Suponemos que la sucesión tiene dos supremos  $b$  y  $c$ .

Por un lado, si  $c$  es un supremo, es una cota superior de  $\{a_n\}$ . Si  $b$  es un supremo, es el menor de las cotas superiores de  $\{a_n\}$ , entonces  $b \leq c$ . Por otro lado, de manera similar, si  $b$  es un supremo, es una cota superior de  $\{a_n\}$ . Si  $c$  es un supremo, es el menor de las cotas superiores, entonces  $c \leq b$ .

Si  $b \leq c$  y  $c \leq b$ , entonces  $b = c$ . Entonces, si el supremo existe, es único.  $\square$

## 5.5. Sucesiones monótonas

**Definición 5.20** Una sucesión  $\{a_n\}$  es *creciente* si  $a_n \leq a_{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $a_n < a_{n+1}$ , entonces  $\{a_n\}$  es *estrictamente creciente*.

**Ejemplo 5.21** La sucesión

$$\{a_n\} =$$

Tiene elementos que siguen

entonces  $\{a_n\}$  es una sucesión \_\_\_\_\_ creciente.

**Definición 5.22** Una sucesión  $\{a_n\}$  es *decreciente* si  $a_n \geq a_{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $a_n > a_{n+1}$ , entonces  $\{a_n\}$  es *estrictamente decreciente*.

**Ejemplo 5.23** La sucesión

$$\{a_n\} =$$

Tiene elementos que siguen

entonces  $\{a_n\}$  es una sucesión \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_.

**Definición 5.24** Una sucesión  $\{a_n\}$  es *monótona* si es \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_.

Hay tres maneras principales para demostrar si una sucesión es monótona.

- Diferencia
- Lógica
- Cociente

### Diferencia

Considerar la diferencia  $a_{n+1} - a_n$ . Si la diferencia es positiva para todo  $n$ , la sucesión es creciente. Si la diferencia es negativa para todo  $n$ , la sucesión es decreciente.

**Ejemplo 5.25** Sea la sucesión  $\{a_n\} = \{n^2\}$ .

Tenemos para  $n \in \mathbb{N}$

Entonces  $\{a_n\}$  es una sucesión \_\_\_\_\_.

### Lógica

Usar la lógica. Para mostrar que una sucesión es creciente, demostramos que  $a_{n+1} \geq a_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , o bien que  $m \geq n$  implica que  $a_m \geq a_n$ . Asimismo, para mostrar que una sucesión es decreciente, demostramos que  $a_{n+1} \leq a_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , o bien que  $m \geq n$  implica que  $a_m \leq a_n$ .

**Ejemplo 5.26** Dado la sucesión  $\{a_n\} = \{r^n\}$  donde,  $r > 1$ . Tenemos,

dado que  $r > 1$ . Por lo tanto,  $\{a_n\}$  es una sucesión \_\_\_\_\_.

### Cociente

Considerar el ratio  $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ . Si es mayor que 1 para todo  $n \in \mathbb{N}$  y  $a_n$  es positivo, entonces  $\{a_n\}$  es una sucesión creciente. También, si es menor que 1 para todo  $n \in \mathbb{N}$  y  $a_n$  es positivo, entonces  $\{a_n\}$  es una sucesión decreciente.

**Ejemplo 5.27** Sea la sucesión  $\{a_n\} = \{\frac{n}{n+1}\}$ . Tenemos  $a_n > 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y

Entonces  $\{a_n\}$  es una sucesión \_\_\_\_\_.

**Problema 5.28** Dado la sucesión  $\{b_n\} = \{n^2\}$ . Con un compañero, muestra que es creciente.

**Ejercicio 5.29** Sea la sucesión  $\{c_n\} = \{n!\}$ . Demostrar que es creciente.

Entonces  $\{c_n\}$  es una sucesión creciente.

## 5.6. Límites de sucesiones

A veces, a medida que avanzamos cada vez más en una sucesión, parece que sus términos se acercan a un número. Por ejemplo, si consideramos la sucesión:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$$

Veamos cómo se parece como gráfica

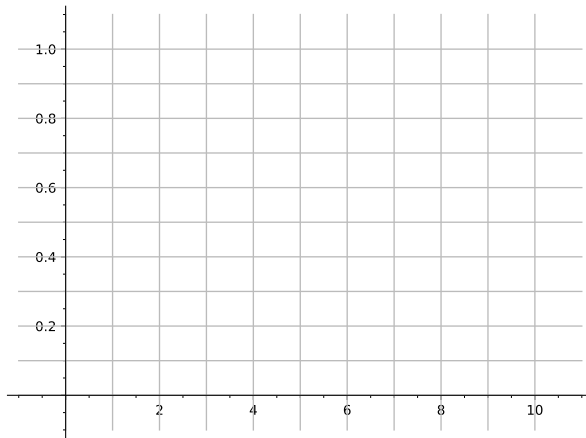


Figura 2.4: Límite de una sucesión

Parece que esta sucesión se acerca a:     .

Para hacer más precisa esta idea, en las Matemáticas tenemos el concepto de «convergencia». Es un poco técnico, pero solo quiere decir que significa precisamente que una sucesión se acerca a un número.

**Definición 5.30** Una sucesión  $\{a_n\}$  es [sucesión!convergente]convergente si existe  $L \in \mathbb{R}$  tal que para cada  $\epsilon \in \mathbb{R}$  con  $\epsilon > 0$  se puede encontrar un

número natural  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $|a_n - L| < \epsilon$ . También escrito:

$L$  se llama el *límite* de la sucesión, y escribimos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

La definición del límite es clave para demostrar muchos teoremas y también nos sirve para encontrar o comprobar límites.

La definición de un límite puede ser un poco difícil de entender, así que vamos a usar el siguiente esquema general para ver cómo funciona la demostración.

**Análisis:** (1) \_\_\_\_\_

(2) \_\_\_\_\_

**Demostración:** (1) \_\_\_\_\_

(2) \_\_\_\_\_

(3) \_\_\_\_\_

**Terminar** Terminar la demostración.

Veamos un ejemplo de esa demostración. Demostramos el límite en 3 pasos.

**Ejemplo 5.31** Demostrar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 + \frac{2}{n^2}\right) = 4$ .

**Análisis:** Comenzamos con lo que queremos demostrar:

Así, esta  $\sqrt{\frac{2}{\epsilon}}$  es el  $N$  que queremos usar en la parte siguiente.

**Demostración:** Ahora usamos nuestro análisis para construir una demostración.

Sea  $\varepsilon > 0$  y  $N = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$ . Entonces para un  $n > N$  tenemos:

**Terminar** Entonces nuestra serie es convergente con límite  $L = 4$ .

**Definición 5.32** Si una sucesión  $\{a_n\}$  *no* tiene límite o es infinito, se llama sucesión *divergente*.

**Definición 5.33** Si una sucesión es divergente y sus términos alternan indefinidamente de mayor a menor (o viceversa), se llama *sucesión oscilante*.

**Ejemplo 5.34** Tomamos como ejemplo la sucesión oscilante siguiente:

$$\{a_n\} = 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$$

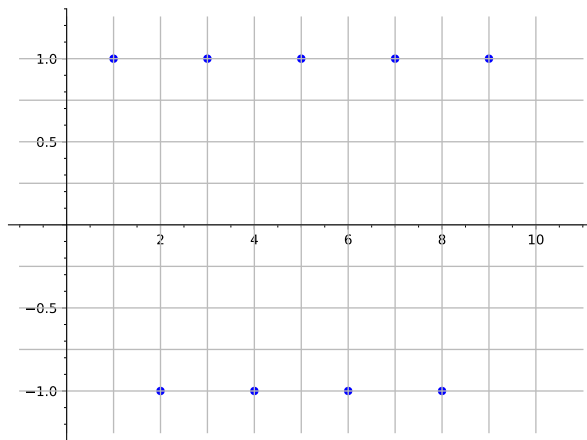


Figura 2.5: Sucesión oscilante

**Ejercicio 5.35** ¿Puedes demostrar que la sucesión anterior es divergente?

Si no sabemos el límite y tenemos que demostrar si es convergente o divergente, podemos romper las reglas de las Matemáticas para ayudarnos. La regla que rompemos es la que dice que  $\infty$  no es un número y sustituimos  $\infty$ . Después, recordamos las propiedades siguientes para

ayudarnos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \underline{\hspace{2cm}}$$

**Ejemplo 5.36** Determinar si la sucesión siguiente converge, diverge y/u oscila

$$\{a_n\} = \left\{ \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + 1 \right\}$$

Comenzamos por romper las reglas de las matemáticas:

Entonces postulamos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + 1 = 1$$

**Ejemplo 5.37** Determinar si la sucesión siguiente converge, diverge y/u oscila

$$b_n = n^{10} - n^8 - n^6$$

Comenzamos por romper las reglas de las matemáticas:

Entonces, apostamos a que nuestra serie diverge.



Fíjate en que esto *no* nos da el límite y *no* es una demostración. Es solamente para ayudarnos a apostar el límite.

**Problema 5.38** Apuesta el límite de la sucesión siguiente.

$$\{c_n\} = \left\{ \frac{5n+3}{n+4} + \frac{3n^2-7}{n^2+8} \right\}$$

Apuesta:    .

**Problema 5.39** Elige: ¿La sucesión siguiente es convergente, divergente o oscilante?

$$\{d_n\} = \{\cos(n)\}.$$

**Problema 5.40** Apuesta el límite de la sucesión siguiente.

$$\{e_n\} = \{e^n\}$$

Apuesta:                     .

**Teorema 5.41** (Unicidad del límite) Sea  $\{a_n\}$  una sucesión convergente, y sean  $b, c \in \mathbb{R}$  tales que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$ , entonces \_\_\_\_\_.

*Demostración.* Supone que hay  $b, c \in \mathbb{R}$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$$

pero que  $b \neq c$ . Además, sea  $\varepsilon = \frac{1}{2}|b - c|$ .

Desde la definición del límite tenemos:

$$|a_n - b| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_b$$

$$|a_n - c| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_c$$

Para asegurar las dos desigualdades, elegimos  $n' > \max\{N_b, N_c\}$ . Es decir,

$$|a_{n'} - b| < \varepsilon \text{ y } |a_{n'} - c| < \varepsilon.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} |b - c| &= |b - a_{n'} + a_{n'} - c| \\ &\leq |b - a_{n'}| + |a_{n'} - c| \quad (\text{por la desigualdad triangular}) \\ &< \varepsilon + \varepsilon \\ &= 2\varepsilon \\ &= |b - c| \end{aligned}$$

Esto es una contradicción, entonces  $b = c$ . □

**Teorema 5.42** (Teorema de convergencia monótona) Si la sucesión  $\{a_n\}$  es monótona y acotada entonces es \_\_\_\_\_.

*Demostración.* Consideremos una sucesión  $\{a_n\}$ , la cual supondremos creciente y acotada superiormente (el caso para una sucesión decreciente resulta ser análogo). El supremo de la sucesión,  $S$ , tiene dos propiedades:

- $a_n \leq S \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .
- Para  $\varepsilon > 0$ ,  $S - \varepsilon$  no es cota superior (porque es más pequeño que  $S$ ), entonces  $\exists N \in \mathbb{N}$  tal que  $S - \varepsilon \leq a_N$ .

La sucesión es creciente, entonces por todo  $n \geq N$ :

$$S - \varepsilon \leq a_N \leq a_n.$$

Usando la primera propiedad del supremo:

$$S - \varepsilon \leq a_n \leq S < S + \varepsilon$$

Entonces,

$$|a_n - S| < \epsilon.$$

Lo cual es la definición del límite de la sucesión, con  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = S$ .  $\square$



No todas las series convergentes son monótonas y acotadas.

**Ejercicio 5.43** En casa, encuentra un ejemplo de una serie que converge pero no es monótona y acotada.

**Corolario 5.44** Sea  $\{a_n\}$  una sucesión monótona y acotada.

- Si es creciente, entonces:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\hspace{2cm}}$ .
- Si es decreciente, entonces:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\hspace{2cm}}$ .

**Ejemplo 5.45** Sea la sucesión creciente acotada (superiormente) siguiente, encuentra su límite:

$$a_1 = 0, a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}.$$

La proposición y el teorema siguientes son muy útiles cuando queremos hallar el límite de una sucesión.

**Proposición 5.46** Sean dos sucesiones convergentes  $\{s_n\}$  y  $\{t_n\}$  y un número  $c \in \mathbb{R}$ , entonces

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} s_n + t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n + \lim_{n \rightarrow \infty} t_n.$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} cs_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} s_n.$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \cdot t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} t_n.$$

**Teorema 5.47** (Teorema del emparedado) Sean tres sucesiones  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$ , y  $\{c_n\}$  tal que

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

y si existe  $L$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$$

entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L.$$

**Ejemplo 5.48** Usa el teorema del emparedado para mostrar que la sucesión  $\{\frac{1}{n+5}\}$  converge a 0.

**Ejemplo 5.49** Reveamos el [Problema 5.38](#) con la sucesión:

$$\{c_n\} = \left\{ \frac{5n+3}{n+4} + \frac{3n^2-7}{n^2+8} \right\}$$

**Ejercicio 5.50** En casa, muestra las dos cosas que no hemos hecho arriba:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-17}{n+4} = 0 \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-31}{n^2+8} = 0$$

**Problema 5.51** Con un compañero, calcula el límite de la sucesión siguiente usando el teorema del emparedado.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n)}{n}$$

## Órdenes de infinitud

El siguiente nos ayuda a usar el teorema del emparedado.

- $n^n$  crece más rápido que  $n!$ .
- $n!$  crece más rápido que  $a^n$  con  $a > 1$ .
- $a^n$  crece más rápido que  $n^k$  donde  $k \in \mathbb{N}$ .
- Un polinomio crece según su orden más alto. ( $n < n^2 < n^3 < \dots$ )

Juntos tenemos:

$$\log(n) < n < a^n < n! < n^n$$

## 6. Series

### 6.1. Definiciones

Recuerda que una sucesión  $a = a_n$  es una aplicación que asigna a cada  $n \in \mathbb{N}$  un número real, y que  $a_n$  es una forma abreviada de escribir  $a(n)$ .

**Definición 6.1** Una *serie infinita* es la suma de \_\_\_\_\_ los términos de una sucesión.

Wikipedia: [serie infinita](#)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$$

#### Ejemplo 6.2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} =$$

**Definición 6.3** Sea una serie infinita, a la suma de los primeros  $N$  términos la llamamos *suma parcial* y la notamos  $S_N$ .

$$S_N = \sum_{n=1}^N a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_N$$

**Ejemplo 6.4** Sea la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots$$

Las primeras cuatro sumas parciales son:

$$S_1 = \underline{\hspace{1cm}}$$

$$S_2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$S_3 = \underline{\hspace{2.5cm}}$$

$$S_4 = \underline{\hspace{3cm}}$$

## 6.2. Convergencia

Wikipedia: [convergente](#)

**Definición 6.5** Si la sucesión de las sumas parciales converge a  $S$ , digamos que la serie es *convergente*, y su suma es  $S$ . Es decir, si existe  $S$  tal que  $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = S$  entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

**Ejemplo 6.6** Encontramos la suma de la serie siguiente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

Las sumas parciales son:

$$S_1 = \underline{\hspace{1cm}}$$

$$S_2 = \underline{\hspace{1.5cm}}$$

$$S_3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$S_N = \underline{\hspace{2.5cm}}$$

Podemos escribir el  $N$ -ésimo elemento de la sucesión de sumas parciales en la manera siguiente:

$$1 - \frac{1}{2^N}.$$

El límite de esta sucesión es:

Entonces, la suma de la serie infinita es 1.

**Definición 6.7** Si la sucesión de las sumas parciales es divergente u oscilante, se dice que la serie es *divergente* u *oscilante*.

**Ejemplo 6.8** Consideremos la serie infinita:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

con sucesión de sumas parciales:

$$\{S_N\} = -1, 0, -1, 0, -1, \dots$$

Entonces, ¿a qué es la suma infinita igual?

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = ?$$

---



---

\_\_\_\_\_ Es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \text{ _____}$$

**Proposición 6.9** (Condición necesaria de convergencia) Si  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge, entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\hspace{1cm}}$ .

Si el límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  no existe, o tiene un valor diferente que  $\underline{\hspace{1cm}}$ , la serie diverge.

*Demostración.* Suponemos que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge. Entonces,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = L \text{ y } \lim_{N \rightarrow \infty} S_{N-1} = L$$

Además,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (S_N - S_{N-1}) = L - L = 0.$$

Las sumas parciales son:

$$\begin{aligned} S_N &= a_1 + a_2 + \dots + a_N \\ S_{N-1} &= a_1 + a_2 + \dots + a_{N-1} \end{aligned}$$

Entonces,

$$S_N - S_{N-1} = (a_1 + a_2 + \dots + a_N) - (a_1 + a_2 + \dots + a_{N-1}) = a_N$$

Es decir,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (S_N - S_{N-1}) = \lim_{N \rightarrow \infty} a_N = 0$$

como queríamos. □



Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , **no** podemos decir si la serie converge o no.

**Ejemplo 6.10** Consideremos la serie infinita siguiente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}.$$

Entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{N+1} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

Entonces,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$$

es  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

**Definición 6.11** Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , a la sucesión  $\{a_n\}$  la llamamos una sucesión *nula*.

### 6.3. Propiedades

**Proposición 6.12** Sean dos series infinitas  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  con sumas  $A$  y  $B$  respectivamente, y sea  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Entonces,

$$(1) \sum_{i=1}^{\infty} \lambda a_i = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(2) \sum_{i=1}^{\infty} (a_i + b_i) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

*Demostración.* Demostramos la suma por la propiedad de multiplicar por una constante  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Las sumas parciales de la serie infinita  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$  son:

$$S'_1 = \lambda a_1$$

$$S'_2 = \lambda a_1 + \lambda a_2$$

$$S'_3 = \lambda a_1 + \lambda a_2 + \lambda a_3$$

$$S'_N = \lambda a_1 + \lambda a_2 + \lambda a_3 + \dots + \lambda a_N$$

Entonces,

$$S'_N = \lambda(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_N) = \lambda S_N$$

y entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S'_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \lambda S_N.$$

Por definición,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = A$$

Si  $\lambda \in \mathbb{R}$ , entonces  $\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda S_N = \lambda \lim_{N \rightarrow \infty} S_N$ .

Finalmente,  $\lim_{N \rightarrow \infty} S'_N = \lambda A$  y la suma  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda A$ .  $\square$

## 6.4. Series geométricas

**Definición 6.13** Una *serie geométrica* es una serie que tiene la forma general:

Wikipedia: [serie geométrica](#)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \quad (2.1)$$

donde  $a, r \in \mathbb{R}$ .

**Proposición 6.14** Sea una serie geométrica, la  $N$ -ésima suma parcial viene dada por la ecuación:

$$S_N = \quad .$$

Entonces la suma de la serie es

$$\sum_{n=1}^{\infty} = \lim_{N \rightarrow \infty} \quad (2.2)$$

de modo que converge cuando \_\_\_\_\_ y diverge cuando \_\_\_\_\_.

Si la serie es convergente, su suma es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \quad (2.3)$$

*Demostración.* La  $N$ -ésima suma parcial de una serie geométrica es:

$$S_N = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{N-1}$$

Multiplicamos por  $r$ :

$$rS_N = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^N$$

Restando la segunda ecuación de la primera, obtenemos:

$$\begin{aligned}
 S_N - rS_N &= a - ar^N \\
 (1-r)S_N &= a - ar^N \\
 S_N &= \frac{a - ar^N}{1-r}
 \end{aligned}$$

Una serie es convergente si  $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N$  existe. Entonces si  $|r| < 1$ , el límite es convergente.  $\square$

**Ejemplo 6.15** Sea la serie definida por las sumas parciales:

$$S_N = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^N}$$

Esta serie es geométrica, con  $a = \underline{\quad}$  y  $r = \underline{\quad}$ .

Tenemos  $r < 1$ , entonces la serie es convergente, con suma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a}{1-r} = \frac{1/2}{1-1/2} = 1.$$

## 6.5. Series armónicas

Wikipedia: [serie armónica](#)

**Definición 6.16** La *serie armónica* es la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Recuerda que si el límite de una sucesión es 0, esto no implica que la serie converja. La serie armónica es nuestro contraejemplo. Ella diverge aunque  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ . Demostramos por qué diverge:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots \\
 &\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \dots \\
 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \\
 &= \infty
 \end{aligned}$$

## 6.6. $p$ -series

Para que la serie armónica converja, podemos aumentar la potencia del denominador.

**Definición 6.17** Una *p-serie* es una serie con forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty}$$

donde  $p \in \mathbb{R}$ . Converge cuando \_\_\_\_\_ y diverge cuando \_\_\_\_\_.

## 6.7. Series telescópicas

**Definición 6.18** Una serie es *telescópica* si tiene la forma:

Wikipedia: [telescópica](#)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}$$

**Proposición 6.19** La  $N$ -ésima suma parcial de la serie está dada por:

$$S_N = \quad .$$

Entonces la suma de la serie es:

$$S = \lim_{N \rightarrow \infty} b_{N+1} - b_1.$$

*Demostración.* Sea una serie infinita que puede ser escrita en la forma

$$a_n = b_{n+1} - b_n.$$

La  $N$ -ésima suma parcial es:

$$S_N = a_1 + a_2 + \cdots + a_N = b_2 - b_1 + b_3 - b_2 + \cdots + b_{N+1} - b_N = b_{N+1} - b_1.$$

El límite del  $n$ -ésimo término de la sucesión de sumas parciales es:

$$S = \lim_{N \rightarrow \infty} b_{N+1} - b_1$$

□

**Ejemplo 6.20** Encontramos la suma de la serie infinita:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

Podemos separar el cociente en dos partes:

Ponemos  $n = \frac{1}{2}$  implica que  $A = \frac{1}{2}$  y ponemos  $n = -\frac{1}{2}$  nos da  $b = -\frac{1}{2}$ .

Es decir:

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1/2}{2n-1} - \frac{1/2}{2n+1}.$$

Esto es telescópico porque sustituyendo  $n+1$  por el primer término nos da:

$$\frac{1/2}{2(n+1)-1} = \frac{1/2}{2n+1}$$

implicando:

$$b_n = \frac{1/2}{2n-1}$$

que nos da una suma telescópica

Entonces,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1/2}{2n-1} - \frac{1/2}{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}$$

El límite de la  $N$ -ésima suma parcial es

$$\begin{aligned} S &= - \lim_{N \rightarrow \infty} b_{N+1} - b_1 \\ &= - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1/2}{2N+1} - \frac{1/2}{2(1)-1} \\ &= - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1/2}{2N+1} - \frac{1}{2} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \end{aligned}$$

Entonces la suma de la serie infinita es \_\_\_\_.

## 6.8. Series aritmético-geométricas

Wikipedia: [serie aritmético-geométrica](#)

**Definición 6.21** Una *serie aritmético-geométrica* tiene la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty}$$

donde  $c, d, r \in \mathbb{R}$ .

**Proposición 6.22** La  $N$ -ésima suma parcial de una serie aritmético-geométrica es:

$$S_N = d + (c+d)r + (2c+d)r^2 + \cdots + (cN+d)r^N$$

La suma de la serie viene dada por:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (cn+d)r^n =$$

y converge cuando \_\_\_\_\_ y diverge cuando \_\_\_\_\_.

En el caso de que  $c = 0$ , la serie es geométrica.

*Demostración.* Una serie aritmético-geométrica tiene la forma general

$$\sum_{n=0}^{\infty} (cn + d)r^n$$

La  $N$ -ésima suma parcial de este tipo de serie es:

$$S_N = d + (c + d)r + (2c + d)r^2 + \cdots + (cN + d)r^N$$

Juntamos términos, multiplicando por  $r$  y restando uno del otro:

$$\begin{aligned} S_N &= d + dr + dr^2 + \cdots + dr^N + cr + 2cr^2 + \cdots + Ncr^N \\ rS_N &= dr + dr^2 + dr^3 + \cdots + dr^{N+1} + cr^2 + 2cr^3 + \cdots + Ncr^{N+1} \\ S_N - rS_N &= d - dr^{N+1} + cr + cr^2 + \cdots + cr^N - Ncr^{N+1} \end{aligned}$$

Definimos  $t_N = cr + cr^2 + \cdots + cr^N$  nos da

$$\begin{aligned} t_N - rt_N &= cr - cr^{N+1} \\ t_N &= \frac{cr - cr^{N+1}}{1 - r} \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} S_N - rS_N &= d - dr^{N+1} + \frac{cr - cr^{N+1}}{1 - r} - Ncr^{N+1} \\ S_N &= \frac{d - dr^{N+1}}{1 - r} + \frac{cr - cr^{N+1}}{(1 - r)^2} - \frac{Ncr^{N+1}}{1 - r} \end{aligned}$$

Tomando el límite cuando  $N$  tiende a infinito, obtenemos:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{d - dr^{N+1}}{1 - r} + \frac{cr - cr^{N+1}}{(1 - r)^2} - \frac{Ncr^{N+1}}{1 - r} \right)$$

Este límite solo converge cuando  $|r| < 1$ , con solución:

$$S = \frac{d}{1 - r} + \frac{cr}{(1 - r)^2}.$$

Entonces,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (cn + d)r^n = \frac{d}{1 - r} + \frac{cr}{(1 - r)^2}$$

cuando  $|r| < 1$ . □

**Ejemplo 6.23** Encontramos la suma de la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n} =$$

Serie aritmético-geométrica con  $c = \_\_\_$ ,  $d = \_\_\_$ , y  $r = \_\_\_$ . Y  $|r| < 1$

implica que es convergente y converge a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{1/3}{(1 - 1/3)^2} =$$

## 7. Convergencia

Hay muchas maneras de probar si una serie converge o no.

### 7.1. Cambio de índice

A veces es necesario cambiar el primer índice de una serie (por ejemplo para usar una definición conocida).

Aquí consideramos dos métodos:

**Método 1** Podemos incluir el elemento nuevo (o perdido), y tenerlo en cuenta cuando calculamos la suma.

**Ejemplo 7.1** Encontrar la suma de la serie infinita:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2n+5) \frac{1}{3^n} = \frac{7}{3} + 1 + \frac{11}{27} + \dots$$

una serie aritmético-geométrica, cuya definición requiere que el índice empiece por  $n = 0$ .

Cambiamos el índice y miramos a sus términos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+5) \frac{1}{3^n} = 5 + \frac{7}{3} + 1 + \frac{11}{27} + \dots$$

Entonces,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2n+5) \frac{1}{3^n} = -5 + \sum_{n=0}^{\infty} (2n+5) \frac{1}{3^n}$$

Resolvemos la nueva serie con la definición conocida, y restamos el elemento nuevo para conseguir la suma original.

**Método 2** Sustituimos  $n$  con  $n + 1$  en la definición de la serie.

**Ejemplo 7.2**

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2n+5) \frac{1}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (2(n+1)+5) \frac{1}{3^{n+1}}$$

para cambiar  $n = 0$  al original  $n = 1$ , hay que añadir 1. Entonces reemplazamos  $n$  por  $n + 1$ .

Ahora simplificamos la nueva serie

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} (2n+5) \frac{1}{3^n} &= \sum_{n=0}^{\infty} (2n+7) \frac{1}{3} \frac{1}{3^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+7}{3} \frac{1}{3^n} \\ &= \frac{7}{3} + 1 + \frac{11}{27} + \dots\end{aligned}$$

## 7.2. Convergencia absoluta

**Definición 7.3** La serie infinita  $\sum a_n$  es *convergente absolutamente* si \_\_\_\_\_ es convergente. La serie infinita  $\sum a_n$  es convergente tal que  $\sum |a_n|$  es divergente se llama *convergente condicionalmente*.

**Teorema 7.4** (Criterio de convergencia absoluta) Si  $\sum a_n$  es una serie convergente absolutamente, entonces  $\sum a_n$  es convergente.

## 7.3. Criterio de comparación

**Proposición 7.5** (Criterio de comparación) Sean dos sucesiones  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$ . Si existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n > m$  tenemos  $0 \leq a_n \leq b_n$ , entonces:

Wikipedia: *Criterio de comparación*

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ convergente} &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ _____} \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergente} &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ _____}\end{aligned}$$

**Ejemplo 7.6** Demuestra si la siguiente serie converge o diverge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$$

Sabemos que

$$\frac{1}{2^n + 1} < \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

## 7.4. Criterio de comparación de límites

**Proposición 7.7** (Criterio de comparación de límites) Sean  $\sum a_n$  y  $\sum b_n$  dos series infinitas con términos positivos y ponemos \_\_\_\_\_. Si  $L > 0$  y finito, ambas series convergen o ambas series divergen. Si

Wikipedia: *Criterio de comparación de límites*

$L = 0$  y  $\sum b_n$  converge, entonces  $\sum a_n$  converge. Si  $L = \infty$  y  $\sum b_n$  diverge, entonces  $\sum a_n$  diverge.

**Ejemplo 7.8** Demostrar si la siguiente serie es convergente o divergente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + 3\sqrt[4]{n} + 1}$$

Comparamos con la serie siguiente.

Entonces tenemos:

La serie  $\sum b_n$  es una  $p$ -serie con  $p = \frac{1}{2}$ .  $p \leq 1$ , entonces es divergente. Por lo tanto,  $\sum a_n$  también es divergente por el criterio de la comparación de límites.

## 7.5. Criterio del cociente

**Proposición 7.9** (Criterio del cociente) Sea  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , una serie infinita, notamos

*Wikipedia: Criterio del cociente*

Entonces,

- Si  $\lambda < 1$  entonces  $\sum a_n$  \_\_\_\_\_.
- Si  $\lambda > 1$  entonces  $\sum a_n$  \_\_\_\_\_.
- Si  $\lambda = 1$  o el límite no existe, entonces el criterio no dice nada.

**Ejemplo 7.10** Demostrar si la siguiente serie es convergente o divergente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$$

Entonces,

Por el criterio del cociente  $\lambda < 1$ , entonces la serie converge.

## 7.6. Criterio de la raíz

**Proposición 7.11** (Criterio de la raíz) Si  $\sum a_n$  es una serie infinita con términos positivos, y

Wikipedia: [Criterio de la raíz](#)

Entonces,

- Si  $\lambda < 1$  entonces  $\sum a_n$  \_\_\_\_\_.
- Si  $\lambda > 1$  entonces  $\sum a_n$  \_\_\_\_\_.
- Si  $\lambda = 1$  o el límite no existe, entonces el criterio no dice nada.

**Ejemplo 7.12** Demuestra si la siguiente serie converge o diverge:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log(n))^n}$$

Usamos el criterio de la raíz:

Entonces, por el criterio de la raíz, ya que  $\lambda < 1$ , entonces  $\sum a_n$  converge.

## 7.7. Criterio de Leibnitz para series alternadas

**Definición 7.13** Una serie es *alternada* si tiene la forma:

Wikipedia: [alternada](#)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

**Proposición 7.14** (Criterio de Leibnitz para series alternadas) Sea  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  una serie alternada, si la sucesión  $\{a_n\}$  es decreciente y cumple:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

entonces, la serie alternada  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  converge.

**Ejemplo 7.15** Determinar si la serie alternada siguiente converge o diverge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{n^3 + 1}$$

Para aplicar el criterio de \_\_\_\_\_, podemos ver el límite de los términos.

Queda por demostrar si  $|a_n|$  es decreciente o no, *i.e.*, si  $|a_{n+1}| < |a_n|$  para todo  $n$ .

Entonces  $|a_n|$  es decreciente y por el criterio de Leibnitz,  $\sum (-1)^n a_n$  es convergente.

## 7.8. Más ejemplos

**Ejemplo 7.16** Demostrar si la siguiente serie es convergente o divergente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \right)^2.$$

**Ejemplo 7.17** Demostrar si la siguiente serie es convergente o divergente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^{1+2n}}.$$

**Ejemplo 7.18** Demostrar si la siguiente serie es convergente o divergente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - \sin(n))(1 + \sin(n))}{n^2 + 8n + 1}.$$

**Ejemplo 7.19** Demostrar si la siguiente serie es convergente o divergente. Si ella converge, determinar si converge absolutamente o condicionalmente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)}.$$

**Problema 7.20** Con un compañero, determina si las series convergen o divergen.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^{3+5n}}{n^{1+n^2}}$$

**Ejercicio 7.21** Demostrar si la siguiente serie es convergente o divergente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$$

## Capítulo 3

# Límites y continuidad

### 8. Funciones acotadas

**Definición 8.1** Si  $A \subset \mathbb{R}$  y  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una función de una variable real. Decimos que  $f$  es una función *acotada* si existe  $m, M \in \mathbb{R}$  tal que  $m \leq f(x) \leq M$  para todo  $x \in A$ .

**Ejemplo 8.2** La función  $f(x) = \sin(x)$  está acotada entre \_\_\_\_\_ y \_\_\_\_.

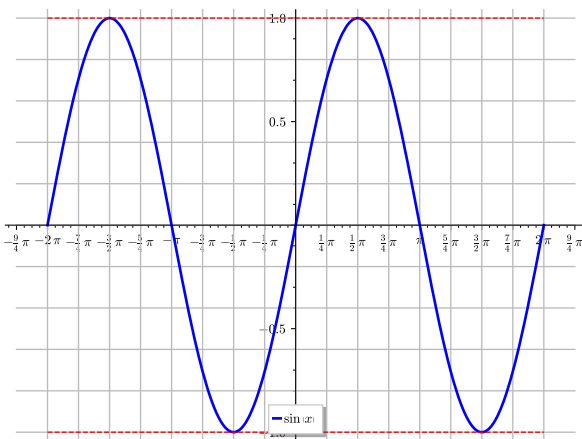


Figura 3.1: Cotas de  $f(x) = \sin(x)$

**Definición 8.3** El *supremo* de una función  $f(x)$  es el mínimo del conjunto de cotas superiores.

$$\sup_{x \in A} f(x) = \sup \{f(x) \mid x \in A\}$$

**Definición 8.4** El *ínfimo* de una función  $f(x)$  es el máximo del conjunto de cotas inferiores.

$$\inf_{x \in A} f(x) = \inf \{f(x) \mid x \in A\}$$

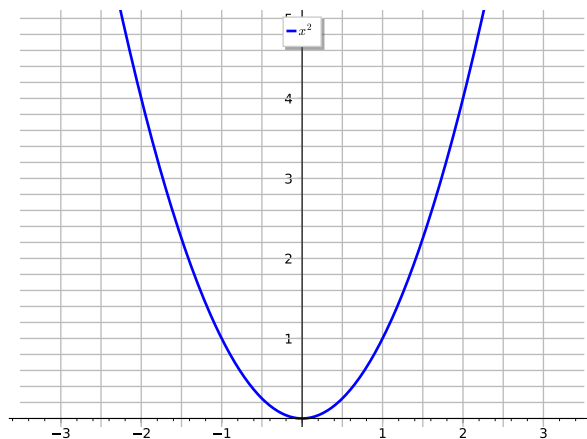
**Ejemplo 8.5** Encuentre las cotas de la función  $f(x) = \sin(4x) - 1$ .

El ínfimo de  $f(x)$  es \_\_\_\_\_, y el supremo es \_\_\_\_.

## 9. Límites

### 9.1. Un problema tangencial

**Problema 9.1** Suponemos que tenemos la función  $f(x) = x^2$ . ¿Cómo encontramos la pendiente de una recta tangente en el punto  $x = 1$ ?



Con una pareja, determina la pendiente de la recta tangente en el punto

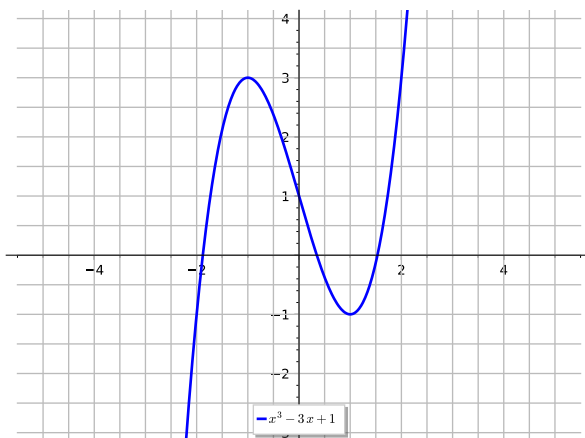
- $x = 0$
- $x = 2$
- $x = -1$

Con una pareja, ¿puedes encontrar una fórmula para el pendiente de la recta tangente para un punto  $x$ ?

## 9.2. Límites

Lo que hemos hecho puede ser formalizado a algo que se llama «límites». Queremos encontrar el valor de una función en un punto sin saber el valor en el punto.

**Ejemplo 9.2** Comenzamos con un ejemplo para aclarar. Tomamos  $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

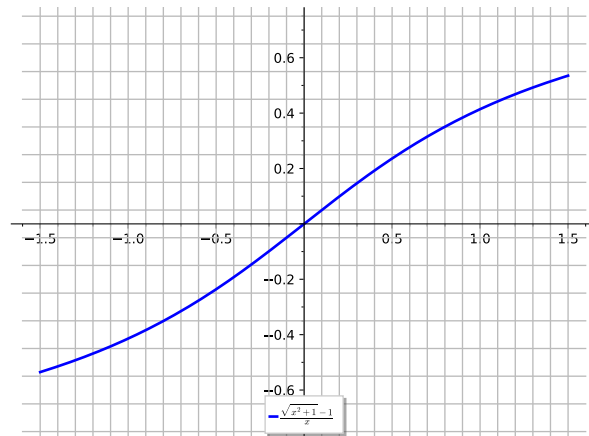


Calcula  $f(\frac{3}{2})$  sin sustituir ningún número.

| x       | f(x)  | x       | f(x)  |
|---------|-------|---------|-------|
| 1       | _____ | 2       | _____ |
| 1.4     | _____ | 1.6     | _____ |
| 1.49    | _____ | 1.51    | _____ |
| 1.499   | _____ | 1.501   | _____ |
| 1.4999  | _____ | 1.5001  | _____ |
| 1.49999 | _____ | 1.50001 | _____ |

Parece que el valor se acerca a \_\_\_\_\_. Escribimos esto como:

**Problema 9.3** Con un compañero, encuentra el límite de la función  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$  cuando  $x$  se aproxima a \_\_\_\_\_. (¡Usa una calculadora!) Aquí está la gráfica:



| x       | f(x)  | x      | f(x)  |
|---------|-------|--------|-------|
| -1      | _____ | 1      | _____ |
| -0.5    | _____ | 0.5    | _____ |
| -0.1    | _____ | 0.1    | _____ |
| -0.01   | _____ | 0.01   | _____ |
| -0.001  | _____ | 0.001  | _____ |
| -0.0001 | _____ | 0.0001 | _____ |

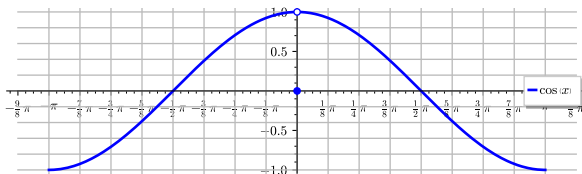
¿Qué pensáis que es el límite?

**Ejercicio 9.4** En casa: buscar el límite de  $f(x) = \frac{2x-2}{x^3-1}$  en  $x = 1$ .

**Ejemplo 9.5** Supongamos que tenemos la siguiente función definida por partes

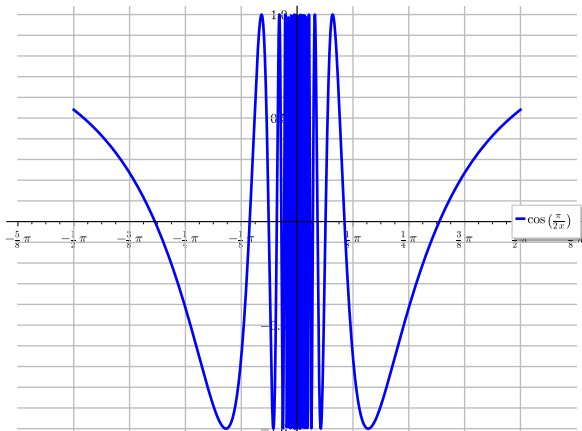
$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

y queremos saber el límite en el punto  $x = 0$ . Usando la gráfica de la función, ¿Cuál piensas que es el límite?



$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \underline{\hspace{1cm}}$$

**Ejemplo 9.6** Hacemos algo un poco más complejo. Tomamos la función  $f(x) = \cos(\frac{\pi}{2x})$  que tiene la gráfica siguiente:



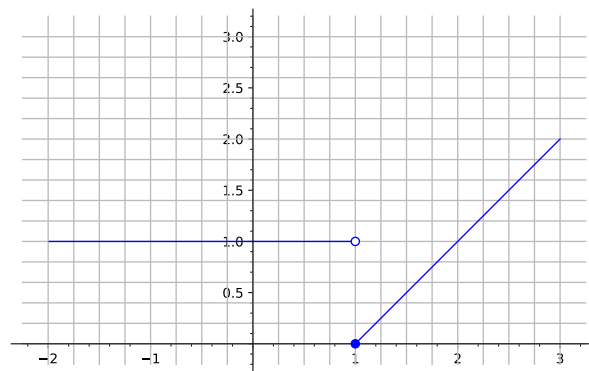
¿Qué es el límite en el punto  $x = 0$ ?

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

¿Qué sucede si nuestra función tiene dos partes? Sea

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

que tiene como gráfica:

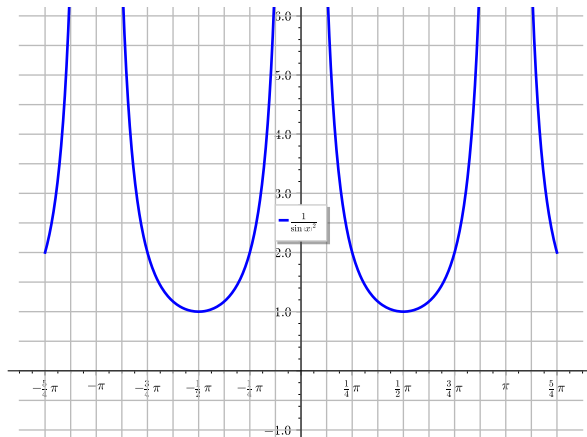


¿Cómo calculamos el límite en el punto  $x = 1$ ? Podemos analizar el límite acercando desde una dirección en lugar de las dos direcciones a la vez, como estábamos haciendo. Si nos acercamos por la derecha (entonces usando valores mayores), parece que el límite es igual a  $\underline{\hspace{1cm}}$ . Si nos acercamos por la izquierda (entonces usando valores menores), parece que el límite es igual a  $\underline{\hspace{1cm}}$ . Denotamos esos por:

Comparando esos límites con la definición original del límite, podemos ver que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ si y solamente si } \underline{\hspace{10cm}}.$$

Hacemos otro ejemplo. Suponemos  $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$  con la gráfica siguiente:



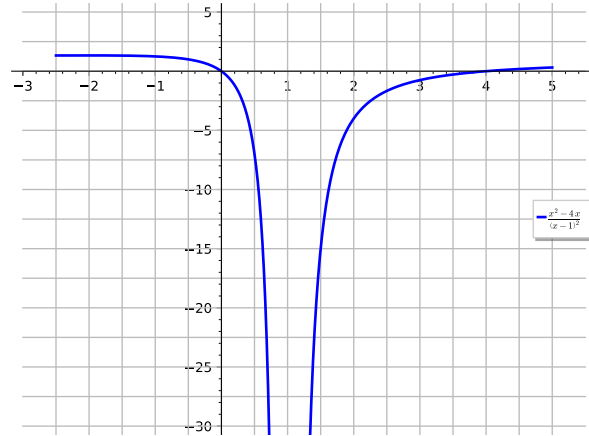
¿Cuál es el límite cuando  $x$  se tiende a 0? Cuanto más se acerca  $x$  a 0 (desde cualquier dirección),  $\sin(x)$  se acerca más a 0 y por lo tanto  $\frac{1}{\sin^2(x)}$  se hace cada vez más grande. De hecho, el límite no se aproxima a ningún número en particular, sino que sigue creciendo. Para representar esto, decimos que el límite tiende a infinito:



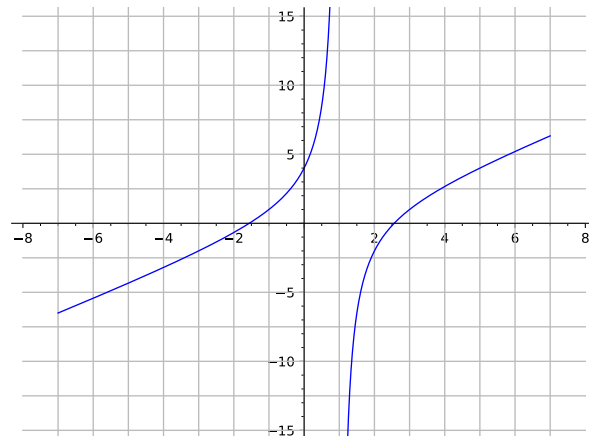
¡Esto NO implique que  $\infty$  sea un número! Ni decimos que el límite existe. La única cosa que estamos diciendo es que cuando se acerca a  $x = 0$ , nuestra función se hace más y más grande, sin fin.

De manera similar, si la función  $f(x)$  se hace cada vez (mucho) más pequeña a medida que nos acercamos a un punto  $a$ , entonces podemos decir que el límite es menos infinito.

**Ejemplo 9.7** Tomamos  $f(x) = \frac{x^2-4x}{(1-x)^2}$ . Entonces, mientras  $x \rightarrow 1$  el límite tiende a \_\_\_\_\_.



**Ejercicio 9.8** Con una pareja. Sea  $f(x) = \frac{x^2-x-4}{x-1}$  que tiene gráfica:



¿Cuáles son los límites de las siguientes?:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \underline{\hspace{2cm}} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \underline{\hspace{2cm}} \quad \lim_{x \rightarrow 1} = \underline{\hspace{2cm}}$$

### 9.3. Definición precisa de límite

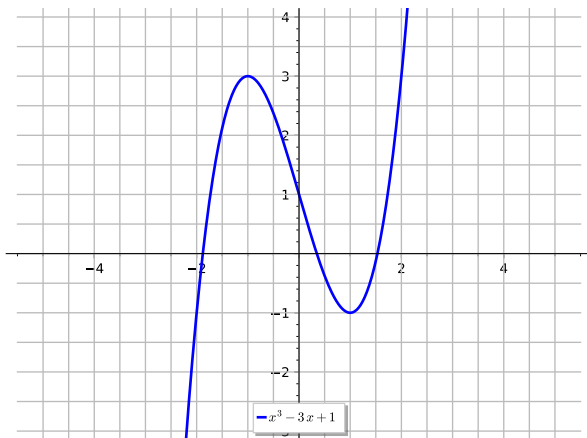
Es mejor que precisamos qué queremos decir con la palabra «límite».

**Definición 9.9** (Definición precisa de un límite) Sea  $f$  una función definida en un intervalo que contiene  $a$ , pero posiblemente no está definido en el punto  $a$ . Entonces el *límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a  $c$  es  $L$* , escrito

si para todo  $\varepsilon > 0$  hay un número  $\delta > 0$  tal que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta \text{ entonces } |f(x) - L| < \varepsilon$$

¿Qué significa eso?



Podemos usar esta definición como una forma de mostrar si la solución intuitiva a un problema de límites es correcta o no. Para demostrar que nuestra intuición es correcta, usamos lo que se conoce como una *demostración épsilon-delta*. A continuación se presenta un esquema general de cómo funciona una demostración épsilon-delta:

### La técnica épsilon-delta

**Análisis** (1) \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

(2) \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

**Demostración** (1) \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

(2) \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

(3) \_\_\_\_\_

**Terminar** Terminar la demostración.

**Ejemplo 9.10** (La técnica épsilon-delta) Queremos demostrar que  $\lim_{x \rightarrow 2}(3x + 2) = 8$ .

**Análisis** (1) Comenzamos con  $|f(x) - L| < \varepsilon$ . En nuestro caso,  $L = \underline{\hspace{1cm}}$  y  $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ . Entonces

(2) Queremos terminar con algo como  $\underline{\hspace{3cm}}$ .

**Demostración** (1) Suponemos  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

(2) Sea  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

(3) Si  $\underline{\hspace{3cm}}$ , entonces

**Terminar** Entonces, por la definición del límite

**Problema 9.11** Con un compañero, demuestra que  $\lim_{x \rightarrow 1} (5x - 2) = 3$ .

**Ejemplo 9.12** Hacemos un ejemplo mucho más difícil. Demuestra que  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 + x - 2 = 4$ .

**Análisis** (1)

(2)

**Demostración** (1)

(2)

(3)

**Terminar**

**Definición 9.13** (Límites por la izquierda y por la derecha) Decimos

Usamos el mismo formato para demostrar enunciados en este caso.

**Ejemplo 9.14** Demuestra que  $\lim_{x \rightarrow 8^+} \sqrt[3]{x} = 2$ .

**Análisis** (1)

(2)

**Demostración** (1) \_\_\_\_\_

(2) \_\_\_\_\_

(3)

**Terminar**

One last precise limit definition!

**Definición 9.15** (Límites infinitos) Sea  $f$  una función definida en un intervalo abierto que contiene el número  $a$ , excepto posiblemente no definido en el punto  $a$ .

**Ejemplo 9.16** Demostrar  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2} = \infty$ .

**Análisis** (1)

(2)

**Demostración** (1) \_\_\_\_\_.

(2) \_\_\_\_\_.

(3)

**Terminar** Entonces, por la definición del límite infinito:

## 9.4. Propiedades de límites

En muchos casos, la mejor manera de hallar el límite es sustituir el número.

**Teorema 9.17** Si  $f$  es un polinomio o una función racional y  $a$  es en el dominio de  $f$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

Si sabemos los límites de algunas funciones en un punto, entonces podemos usar esa información para encontrar el límite de sus combinaciones.

**Teorema 9.18** Supongamos que  $c$  es una constante y supongamos que existen los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ y } \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Entonces

(1)

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \underline{\hspace{4cm}}$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow a} (cf(x)) = \underline{\hspace{4cm}}$$

(3)

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \underline{\hspace{4cm}}$$

Otra propiedad importante nos ayuda cuando una función es muy similar a una otra.

**Teorema 9.19** Si  $f(x) = g(x)$  cuando  $x \neq a$  y si existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , entonces

Hemos visto un ejemplo de esto en [Ejemplo 9.5](#).

Dos más propiedades útiles de límites son las siguientes.

**Teorema 9.20** Si  $f(x) \leq g(x)$  cuando  $x$  es cerca al punto  $a$  (excepto posiblemente cuando  $x = a$ ), y los límites de  $f$  y  $g$  existen cuando  $x$  tiende hacia  $a$ , entonces

**Teorema 9.21** (El teorema del emparedado) Si  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  cuando  $x$  es cerca a (excepto posiblemente cuando es  $a$ ) y

Wikipedia: [Teorema del emparedado](#)

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$$

El teorema del emparedado es un teorema que es muy difícil de usar, pero a veces es el método más sencillo para encontrar el límite.

**Ejemplo 9.22** Sea

$$f(x) = x^3 \cos\left(\frac{\pi}{2x}\right).$$

Demuestra que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ . Sería estupendo si pudiéramos simplemente usar una de nuestras propiedades de límites, pero descubrimos en [Ejemplo 9.6](#) que  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{\pi}{2x}\right)$  no existe. Así que, en vez de eso, vamos a tener que usar el teorema del emparedado.

Observa que  $\cos$  siempre oscila entre  $-1$  y  $1$ . Es decir:

$$-1 \leq \cos\left(\frac{\pi}{2x}\right) \leq 1$$

Multiplicando por  $x^3$  y tenemos

Ahora tenemos algo que se parece al teorema del emparedado. Ya que  $x^3$  y  $-x^3$  son polinomios y  $0$  está en el dominio de ambos, tenemos:

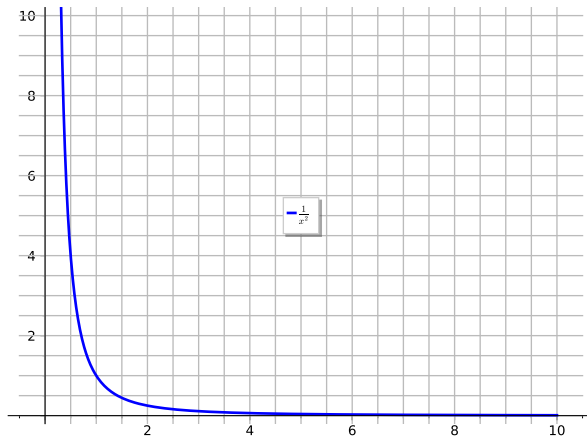
Y, por el teorema del emparedado sabemos que

**Ejercicio 9.23** Con un compañero, usa el teorema del emparedado para demostrar que

## 9.5. Al infinito y adelante

Aunque la infinidad no es un número, podemos analizar los límites cuando la función sigue creciendo, *i.e.*, cuando la función va hacia infinidad.

**Ejemplo 9.24** Sea la función  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  y fíjate en que esta función siempre tiene valores positivos. Aquí una gráfica de la función:



Lo que esto significa es que cuanto más alto sea el valor de  $x$ , más cerca vamos a estar de  $0$ . Intuitivamente decimos que el límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a infinito es  $0$ . Escribimos esto como:

Podemos hacer esto con cualquier función. Si  $f$  es una función definida en el intervalo  $(0, \infty)$ , entonces

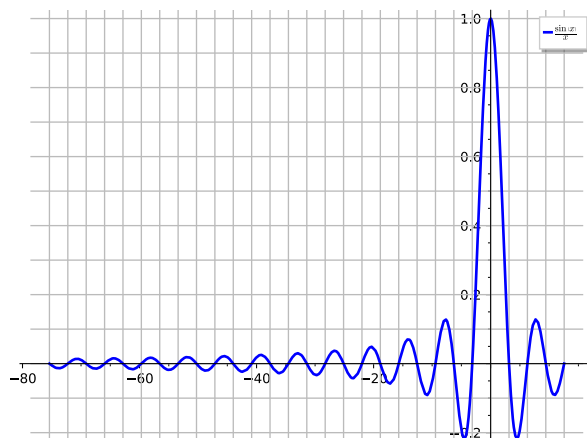
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

significa que el valor de  $f(x)$  tiende a  $L$  cuando  $x$  crece.

De manera similar, puedes hacer lo mismo con menos infinito.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

**Ejemplo 9.25** Tomamos  $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$  que tiene la gráfica:



¿Cuál es la solución de la siguiente?

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \_\_\_\_\_\_$$

Wikipedia: [asíntota horizontal](#)

La recta  $y = L$  se llama *asíntota horizontal* de la curva  $f(x)$  si uno de los siguientes:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \text{ o } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$



Hay una guerra entre los matemáticos sobre la definición de asíntotas horizontales. La mayoría dan la definición dada arriba, pero hay autores que también exigen que la recta  $f(x)$  no cruce la asíntota.

**Problema 9.26** Sea una función  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Con una pareja, busca

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \_\_\_\_\_\_ \text{ y } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \_\_\_\_\_\_$$

¿Qué piensas que debería decir el teorema siguiente?

**Teorema 9.27** Si  $r > 0$  es un número racional tal que  $x^r$  está definida para todo  $x$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^r} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^r} = \_\_\_\_\_\_$$

¡Este teorema es muy fuerte! Hacemos un ejemplo.

**Ejemplo 9.28** Sea  $f(x) = \frac{4x^5 + 3x^2 + x - 77}{7x^5 - 6x^3 + 22x^2 - 943}$ . Qué es

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \_\_\_\_\_\_ ?$$

**Ejemplo 9.29** Evaluar

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2x - \sqrt{4x^2 + 1}.$$

**Ejemplo 9.30** Evaluar

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \cos(x)$$

**Ejemplo 9.31** Evaluar

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x$$

**Ejemplo 9.32** Evaluar

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 - x^2$$

**Problema 9.33** Con un compañero, evalúa

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x}{2x - 5}$$

**Definición 9.34** (Definición precisa de límite, cuya variable tiende a infinito) Sea  $f$  una función definida en el intervalo  $(a, \infty)$  para un número  $a$ . Entonces,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

significa que para todo  $\varepsilon > 0$  hay un número  $N$  tal que

Sea  $f$  una función definida en el intervalo  $(-\infty, a)$  para un número  $a$ . Entonces,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

significa que para todo  $\varepsilon > 0$  hay un número  $N$  tal que

Sea  $f$  una función definida en el intervalo  $(a, \infty)$  para un número  $a$ .  
Entonces,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

significa que para cada número positivo  $M$  hay un número positivo  $N$  tal que

## 10. Continuidad

Los límites son súper fáciles cuando simplemente podemos sustituir un número para obtener la respuesta. Cuando podemos simplemente sustituir un número  $a$  en una función  $f(x)$  para obtener el límite, decimos que la función es continua en  $a$ .

**Definición 10.1** Una función  $f$  es *continua en  $a$*  si

Para que esta ecuación sea cierta, hay tres cosas que necesitamos verificar:

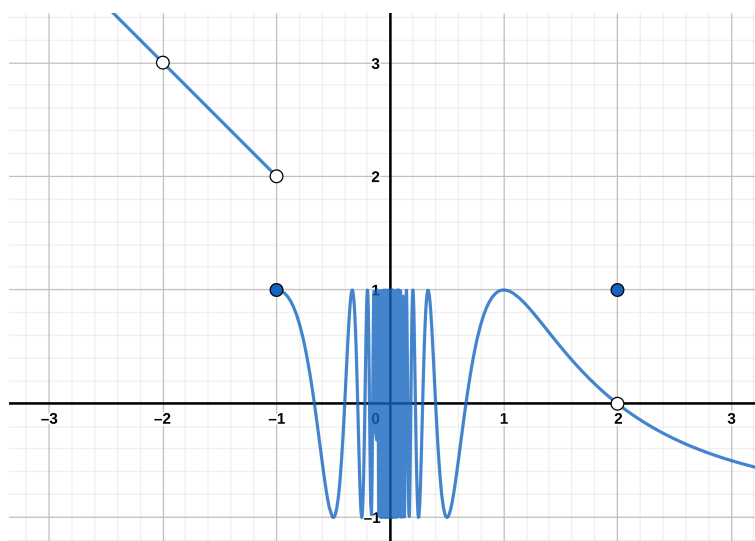
(1) \_\_\_\_\_

(2) \_\_\_\_\_

(3) \_\_\_\_\_

Si  $f$  no es continua en el punto  $a$  decimos que es *discontinua en  $a$* .

**Ejemplo 10.2** Este ejemplo nos muestra los cuatros tipos de discontinuidad que podemos encontrar.



(1) \_\_\_\_\_

(2) \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

(3) \_\_\_\_\_

(4) \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

De la misma manera podemos definir la continuidad por la izquierda y por la derecha.

**Definición 10.3** Una función  $f$  es *continua por la izquierda en  $a$*  si

Una función  $f$  es *continua por la derecha en  $a$*  si

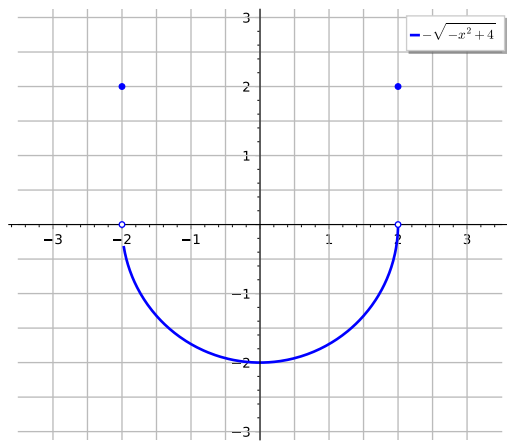
De manera similar, podemos hacerlo en un intervalo también.

**Definición 10.4** Una función  $f$  es *continua en un intervalo  $I$*  si es continua en todos los puntos en el intervalo.

**Ejemplo 10.5** Suponemos

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{4-x^2} & \text{si } -2 < x < 2 \\ 2 & \text{si } x = -2 \text{ o } x = 2 \end{cases}$$

Demuestra que  $f$  es una función continua en el intervalo  $(-2, 2)$ , pero discontinua en todos otros puntos. Aquí, una gráfica de la función:



Como las propiedades de límites, tenemos propiedades para continuidad.

**Teorema 10.6** Si  $f$  y  $g$  son funciones continuas en el punto  $a$  y si  $c$  es un número constante, entonces las funciones siguientes también son

continuas en el punto  $a$ :

(1) \_\_\_\_\_

(2) \_\_\_\_\_

(3) \_\_\_\_\_

¡Hay muchas funciones que sean continuas!

(1) Todas las funciones \_\_\_\_\_ son continuas en todo el dominio real.

(2) Las funciones \_\_\_\_\_ son continuas en todo su dominio.

(3) Las funciones \_\_\_\_\_ son continuas en todo su dominio.

(4) Las funciones \_\_\_\_\_ son continuas en todo su dominio.

(5) Las \_\_\_\_\_ son continuas en todo su dominio.

(6) Los \_\_\_\_\_ son continuos en todo su dominio.

**Ejemplo 10.7** ¿En cuáles puntos es la función  $f(x) = \frac{x^3+2x^2-1}{71x-3}$  continua?

**Ejercicio 10.8** Con un compañero, encuentra dónde  $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2-4} \frac{\ln(x)}{x^2-4}$  es continua.

¿Qué hacemos con la composición  $f \circ g$ ?

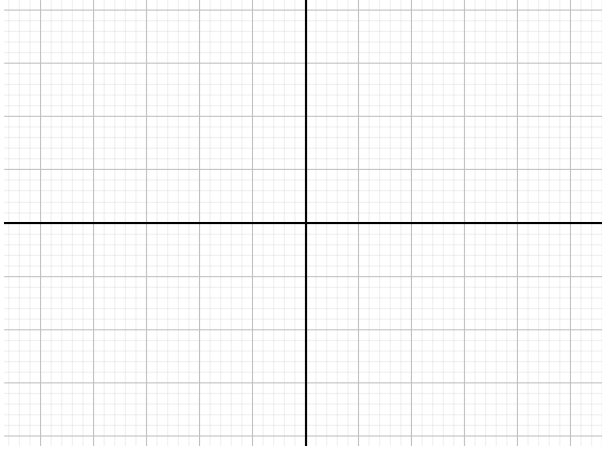
**Teorema 10.9** Si  $f$  es continua en el punto  $b$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ , entonces

*Si  $g$  es continua en  $a$  y  $f$  es continua en  $g(a)$  entonces  $f \circ g$  es continua en  $a$ .*

Las funciones continuas tienen la propiedad de que las funciones pasan a través de todos los números.

**Teorema 10.10** (Teorema del valor intermedio) *Sea  $f$  una función continua en el intervalo  $[a, b]$  y  $N$  un número entre  $f(a)$  y  $f(b)$ , entonces tenemos que existe un número  $c$  en  $[a, b]$  tal que  $f(c) = N$ .*

Mejor verlo con una imagen.



¡Este teorema nos ayuda mucho para encontrar las raíces de polinomios!

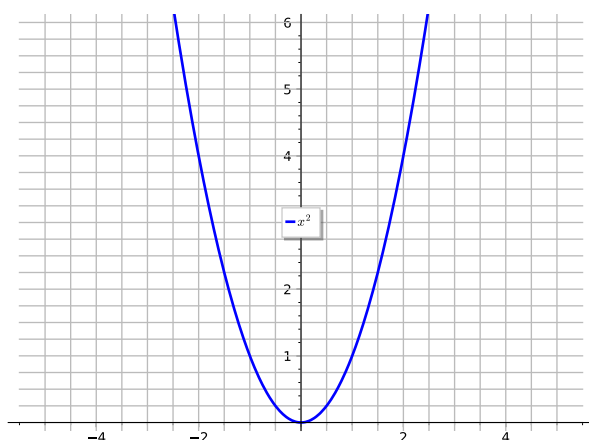


## Capítulo 4

# Derivadas de una variable

### 11. Derivadas

Recuerda que, al principio del estudio de los límites, analizamos la recta tangente a una curva. ¡Ahora podemos usar todas las herramientas que hemos desarrollado para responder a esta pregunta para cualquier curva! Veamos un primer ejercicio. Sea  $f(x) = x^2$ , ¿cuál es la pendiente de la recta tangente cuando  $x = 1$ ?



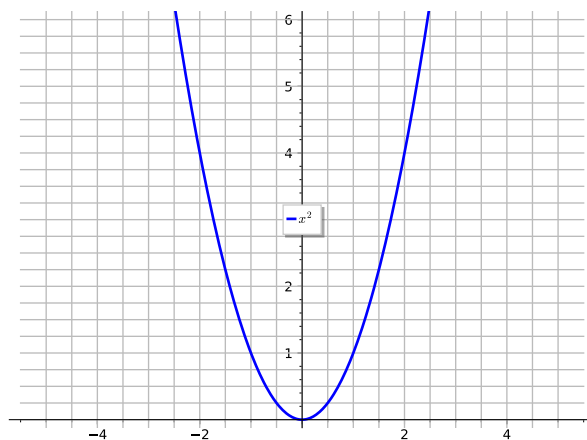
Recuerda que el método que usábamos fue para encontrar los secantes de la curva. Entonces usábamos ecuaciones como:

Si acercamos  $x$  a  $a$ , encontraremos la recta tangente. Es decir, la recta tangente a  $f(x)$  en el punto  $(a, f(a))$  tiene pendiente:

y desde eso podemos encontrar la recta tangente para cada punto.

**Problema 11.1** Con una pareja, usa este método para encontrar la recta tangente  $y = mx + b$  cuando  $a = 3$ .

Hay una segunda manera de encontrar la pendiente. Podemos fijar una distancia lejos del punto  $a$  y luego intentamos disminuir esa distancia. ¿Qué significa eso?



Comienza con un punto  $a$  en el que quieras encontrar la recta tangente. Sea  $h$  una cierta distancia desde el punto  $a$ . Luego, intenta hacer que esa distancia sea cada vez menor y resuelve el siguiente límite:

A veces, este método es más fácil de resolver que la versión anterior.

**Ejemplo 11.2** Para la función  $f(x) = 1/x^2$  encuentra la pendiente de su recta tangente en el punto  $(2, \frac{1}{4})$ .

Esta recta de pendiente tiene un nombre especial y es, en cierto modo, el objetivo principal de este curso.

**Definición 11.3** La *derivada de una función  $f$  en el punto  $a$*  es

Wikipedia: [derivada de una función  \$f\$  en el punto  \$a\$](#)

### 11.1. La derivada

Recuerda que hasta ahora estábamos estudiando la derivada de una función  $f$  en un punto  $a$

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Y ¿Qué sucede si queremos la derivada en un punto aleatorio y no en el punto  $a$ ? Para esto, sustituimos el número  $a$  por una variable.

Ya hemos hecho esto cuando estábamos estudiando la aceleración. Observa que así,  $f'$  es una función. Esta función,  $f'$ , se llama la *derivada de  $f$* .

**Ejemplo 11.4** Comenzamos con un ejemplo superfácil. Encontrar la derivada de  $f(x) = x$ .

Entonces  $f'(x) = 1$ .

**Problema 11.5** Intenta un ejemplo más complicado con una pareja. Encontrar la derivada de  $f(x) = x^2 - x$ .

Hay muchas formas diferentes en las que la gente escribe la derivada  $f'(x)$ . ¡Esto viene de la historia de la derivación!

$$f'(x) = \dot{y} = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = Df$$



¡Fracciones no son razones! No puedes dividir

**Definición 11.6** Decimos que una función  $f$  es *diferenciable en el punto  $a$*  si  $f'(a)$  existe.

Wikipedia: [diferenciable en el punto  \$a\$](#)

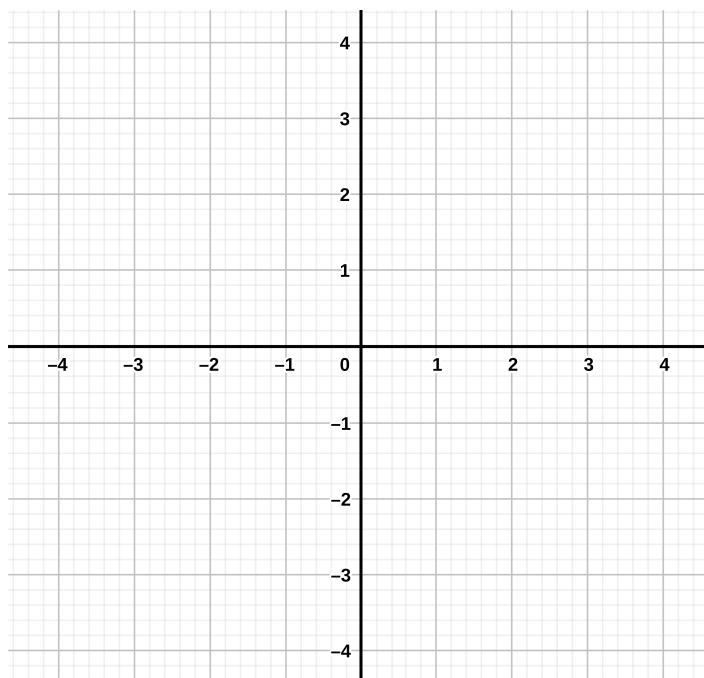
**Ejemplo 11.7** ¿En cuáles puntos es diferenciable la función siguiente?

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq 0 \\ -1 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

Si una función es diferenciable, sabemos si la función es continua o no lo es.

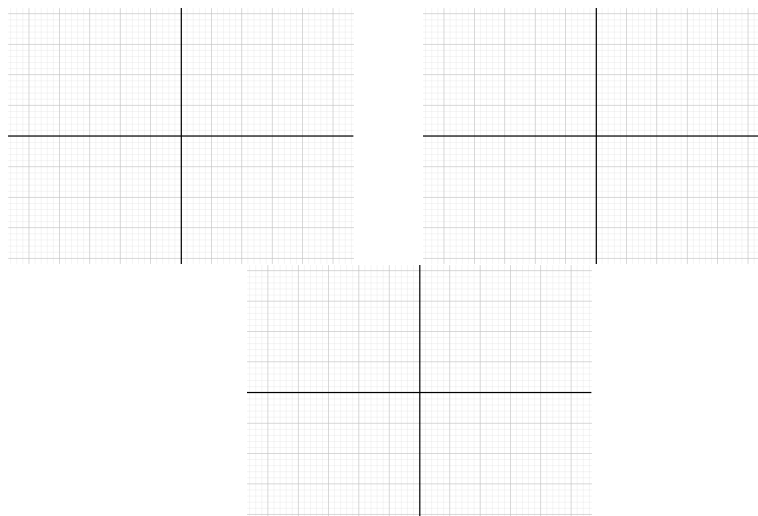
**Teorema 11.8** Si  $f$  es una función diferenciable en un punto  $a$ , entonces  $f$  es continua en  $a$ .

¡Ya lo vemos en nuestro ejemplo!



¡La conversión *no* es verdad! Hay funciones que son continuas pero no son diferenciables.

Intuitivamente, hay tres casos en los que una función no sea diferenciable:



## 11.2. Derivadas de orden superior

Recuerda que, cuando estábamos en el espacio exterior, la aceleración se calculaba como la tasa de cambio instantánea (también conocida como la derivada) de la velocidad. ¡La velocidad también es una tasa de cambio! Es la tasa de cambio instantánea de la posición. Así que, si la velocidad es la derivada de la posición y la aceleración es la derivada de

la velocidad, entonces la aceleración es la derivada de la derivada de la posición. ¡Hay dos derivadas!

Esto sucede porque podemos ver la derivada como una función en sí misma. Y como es una función, podemos preguntarnos cuál es la derivada de la derivada. Esto normalmente se llama la *segunda derivada*. De manera similar, podemos definir la *tercera derivada*, *cuarta derivada*, *n-ésima derivada*, etc. En cuanto a la notación, así es como se ven:

$$2^{nd} : f''(x) = \ddot{y} = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 f}{dx^2} = D^2 f$$

$$3^{rd} : f'''(x) = \ddot{\dot{y}} = \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d^3 f}{dx^3} = D^3 f$$

$$4^{th} : f''''(x) = f^{iv}(x) = f^{(4)}(x) = \ddot{\dot{\dot{y}}} = \dot{\dot{\dot{y}}} = \frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{d^4 f}{dx^4} = D^4 f$$

$$n^{th} : f^{(n)}(x) = \dot{\dot{\dot{\dot{\dot{y}}}}} = \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n f}{dx^n} = D^n f$$

**Problema 11.9** Con un compañero, encuentra la tercera derivada de  $f(x) = x^2$ .

## 12. Derivadas de varias funciones

### 12.1. Derivadas de polinomios

Todo eso es divertido, pero puede transformarse rápidamente en algo más complicado.

Por nuestros ejemplos anteriores, veremos que:

$$\frac{d}{dx}(x^2) = \underline{\hspace{2cm}} \qquad \frac{d}{dx}(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

Queremos decir la siguiente (¡y resulta que es verdad!)

**Teorema 12.1** *Si  $n$  es un número real, entonces*

*Demostración.* En realidad vamos a demostrar este resultado para los enteros positivos, porque es una demostración bonita y (relativamente) sencilla. Hay dos partes:

(1) \_\_\_\_\_

(2) \_\_\_\_\_

□

**Ejemplo 12.2** ■ ¿Cuál es la derivada de  $f(x) = x^{93}$ ? \_\_\_\_\_.

■ ¿Cuál es la derivada de  $f(x) = \sqrt[5]{x^3}$ ? \_\_\_\_\_.

■ ¿Cuál es la derivada de  $f(x) = x^\pi$ ? \_\_\_\_\_.

Usando nuestras leyes de los límites, tenemos el siguiente teorema:

**Teorema 12.3** *Sean  $f$  y  $g$  funciones derivables y sea  $c$  una constante.*

■ \_\_\_\_\_

■ \_\_\_\_\_

■ \_\_\_\_\_

¡Esto significa que podemos derivar polinomios más complicados!

**Ejemplo 12.4** ■ ¿Cuál es la derivada de  $f(x) = x^9 + 3x^4 - x^2 + 1$ ?

**Ejemplo 12.5** Apliquemos esto a una situación del mundo real. Supongamos que tenemos una varilla (o un trozo de alambre) de metal. La varilla es «homogénea» si su densidad es constante a lo largo de toda ella. En otras palabras, se define como la masa (kg) por unidad de longitud (m). Podemos escribirlo como:  $\rho$  (la densidad) es igual a la masa  $m$  dividida por la longitud  $\ell$ :

$$\rho = \frac{m}{\ell}$$

Pero ahora supongamos que nuestra varilla no es homogénea. En su lugar, supongamos que la masa está dada por una función  $m = f(x)$ . Entonces, la densidad media es:

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta \ell} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

¡Esto se ve exactamente como la derivada! Así que la densidad en cualquier punto viene dada por:

$$\rho = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta \ell} = \frac{dm}{dx}$$

Por ejemplo, sea  $f(x) = x^{3/2}$ . Usando las reglas de límites que acabamos de ver, sabemos que  $f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ . En otras palabras, en cualquier punto  $x$  de nuestra varilla,  $\rho = \underline{\hspace{2cm}}$ .

Así que, si nos situamos a 1 metro del extremo de la varilla, sabemos que la densidad es:

## 12.2. Funciones exponenciales

Hablemos de las funciones exponenciales y de cómo se comportan sus límites. Recuerda que una función exponencial es una función de la forma  $f(x) = b^x$ , donde  $b$  es un número real. Calculemos su derivada.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \underline{\hspace{10cm}} \\
 &= \underline{\hspace{10cm}} \\
 &= \underline{\hspace{10cm}} \\
 &= \underline{\hspace{10cm}} \\
 &= \underline{\hspace{10cm}} \\
 &= b^x f'(0)
 \end{aligned}$$

Pero ahora necesitamos determinar cuánto vale  $f'(0)$ . No hay una forma sencilla de hacerlo, así que tenemos que volver a nuestro método anterior de considerar varios valores de  $h$ .

| $h$    | $\frac{2^h-1}{h}$ | $\frac{3^h-1}{h}$ |
|--------|-------------------|-------------------|
| 0,1    | 0,7177346...      | 1,1612317...      |
| 0,01   | 0,695555...       | 1,104669...       |
| 0,001  | 0,693387...       | 1,099216...       |
| 0,0001 | 0,693171...       | 1,0098673...      |

Resulta que

$$b = 2 \Rightarrow f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$b = 3 \Rightarrow f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Entonces tenemos

$$\frac{d}{dx} 2^x = \underline{\hspace{2cm}} \quad \frac{d}{dx} 3^x = \underline{\hspace{2cm}}$$

y, en general:

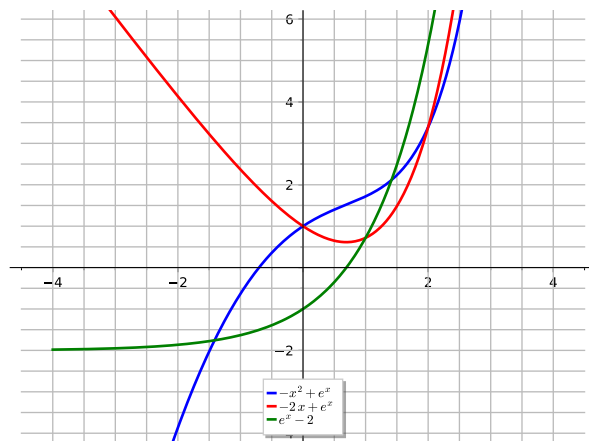
$$\frac{d}{dx} b^x = \underline{\hspace{2cm}}$$

Sería genial si pudiéramos encontrar un número para el cual  $f'(0) = 1$ . Esto implicaría que  $\underline{\hspace{10cm}}$ .  
 De aquí es de donde aparece el número  $\underline{\hspace{1cm}}$ . Si  $\underline{\hspace{2cm}}$ , entonces  $\underline{\hspace{10cm}}$  y estamos satisfechos.

**Ejemplo 12.6** Encuentra la segunda derivada de  $f(x) = e^x - x^2$ .

$$f''(x) = e^x - 2$$

La gráfica de estas funciones es la siguiente:



### 12.3. Derivadas de funciones trigonométricas

Intentemos encontrar la derivada de  $\text{sen}(x)$ . Por definición tenemos:

$$f(x) = \text{sen}(x)$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

=

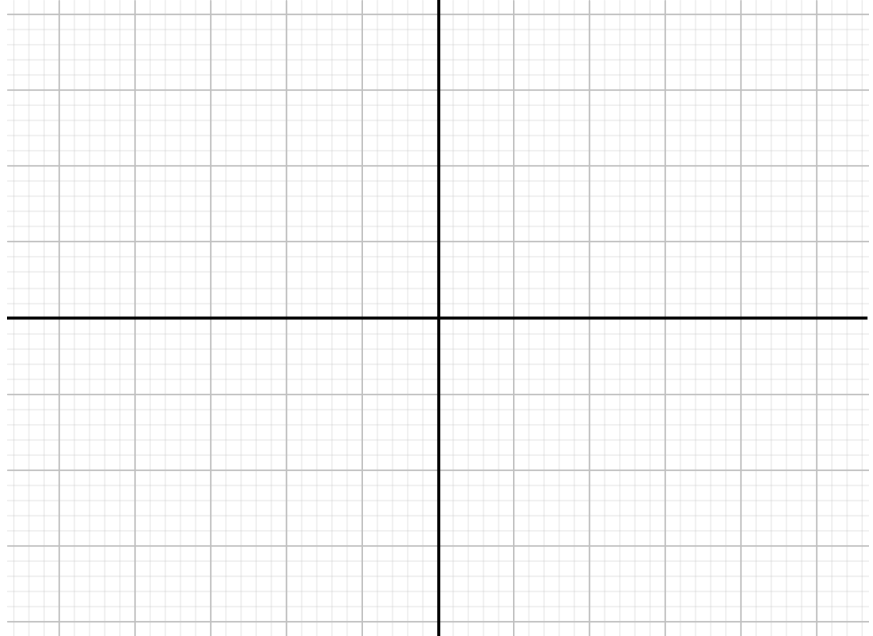
=

=

$$= \text{sen}(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(h)}{h}$$

Así que necesitamos determinar cuáles son estos dos últimos límites

para encontrar la derivada. ¡Vamos a usar el teorema del emparedado!  
 Primero queremos demostrar que  $\cos(\theta) < \frac{\text{sen}(\theta)}{\theta} < 1$ , donde  $\theta$  es un ángulo.



Por lo tanto, intuitivamente sabemos que  $\cos(\theta) < \frac{\text{sen}(\theta)}{\theta} < 1$ .

Ahora tomamos los límites de todo cuando  $\theta$  tiende a 0.

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \cos(\theta) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

Por lo tanto, por el teorema del emparedado  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\theta)}{\theta} = \underline{\hspace{1cm}}$ .

Ahora estudiamos  $\frac{\cos(\theta)-1}{\theta}$ .

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos(\theta) - 1}{\theta} &= \underline{\hspace{4cm}} \\ &= \underline{\hspace{4cm}} \\ &= \underline{\hspace{4cm}} \\ &= \underline{\hspace{4cm}} \\ &= - \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\theta)}{\cos(\theta) + 1} \\ &= \underline{\hspace{2cm}} \\ &= \underline{\hspace{1cm}} \end{aligned}$$

Entonces,

$$f'(x) = \sin(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Usando métodos muy similares, podemos demostrar las derivadas de todas las funciones trigonométricas:

| $f(x)$    | $f'(x)$                    | $f(x)$    | $f'(x)$                    |
|-----------|----------------------------|-----------|----------------------------|
| $\sin(x)$ | $\underline{\hspace{2cm}}$ | $\csc(x)$ | $\underline{\hspace{2cm}}$ |
| $\cos(x)$ | $\underline{\hspace{2cm}}$ | $\sec(x)$ | $\underline{\hspace{2cm}}$ |
| $\tan(x)$ | $\underline{\hspace{2cm}}$ | $\cot(x)$ | $\underline{\hspace{2cm}}$ |

## 13. Maneras de calcular derivadas más complejas

### 13.1. Reglas del producto y del cociente

Recuerda que, cuando sumábamos y restábamos derivadas, vimos que ocurría algo muy parecido a lo que sucedía con las leyes de los límites: simplemente podíamos separarlas. Para las leyes de los límites teníamos:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) + \left( \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right)$$

Y para las derivadas teníamos:

$$\frac{d}{dx} (f(x) + g(x)) = \frac{d}{dx} f(x) + \frac{d}{dx} g(x).$$

Ahora hacemos la misma pregunta para la multiplicación, ya que tenemos la misma ley de los límites:

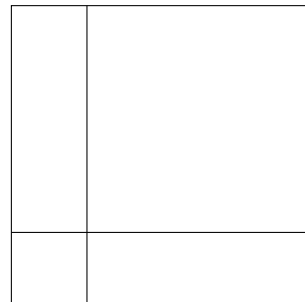
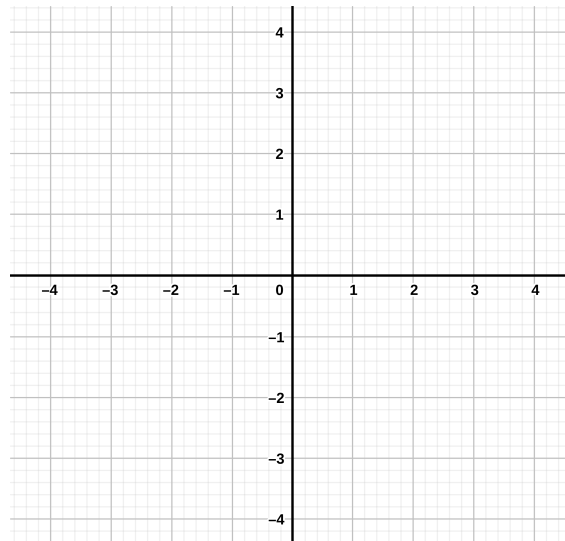
$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \left( \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right)$$

Resulta que esta propiedad *no* se cumple para la multiplicación (¡ni para la división!). En particular, tenemos  $(fg)' \neq f'g'$ , aunque eso sería lo que nos gustaría.

**Ejemplo 13.1** Veamos un ejemplo muy sencillo para comprobarlo. Sea  $f(x) = x$  y  $g(x) = x$ . Entonces,

Así que necesitamos encontrar otra forma de calcular  $(fg)'$ . Esto es un poco complicado, pero resulta que la mejor manera es usar geometría.

Primero, veamos una de nuestras funciones.



Esto se llama la *regla del producto* : Si  $f$  y  $g$  son ambas derivables, entonces

Wikipedia: [regla del producto](#)

**Ejemplo 13.2** Hagamos un ejemplo. Sea  $f(x) = x^2e^x$ . ¿Cuál es  $f'(x)$ ?

También podemos trabajar con cocientes usando una técnica similar a la del producto.

Esto se llama la *regla del cociente*: Si  $f$  y  $g$  son ambas derivables y  $g(x) \neq 0$ , entonces



Observa que, en la regla del cociente, el *orden* importa porque estamos restando. ¡Asegúrate de tener esto en cuenta!

**Ejemplo 13.3** Sea  $f(x) = \frac{x^3+3x}{x^2+1}$ .

Entonces,

$$f'(x) = \frac{x^4 + 3}{x^4 + 2x^2 + 1}$$

**Problema 13.4** Encuentra  $f'(x)$  trabajando con un compañero, donde  $f(x) = \frac{x^4+3x^2+x-1}{e^x}$ .

**Ejemplo 13.5** También podemos usar la regla del cociente para demostrar la derivada de  $\operatorname{tg}(x)$ . Supongamos que  $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} = \operatorname{tg}(x)$  y encontremos  $f'(x)$ .

**Problema 13.6** Trabajando con un compañero, encuentra la derivada de  $f(x) = \sin(x) \cos(x)$ .

### 13.2. La regla de la cadena

Hemos trabajado con suma, resta, multiplicación y división, pero todavía no hemos tratado una operación: la composición. ¿Cuál es la derivada de  $(f \circ g)$ ?

En notación prima, tenemos

Wikipedia: [regla de la cadena](#)

Esto se llama la *regla de la cadena*.

**Ejemplo 13.7** Sea  $f(x) = \sqrt{\sin(x)}$ . ¿Cuál es  $f'(x)$ ?

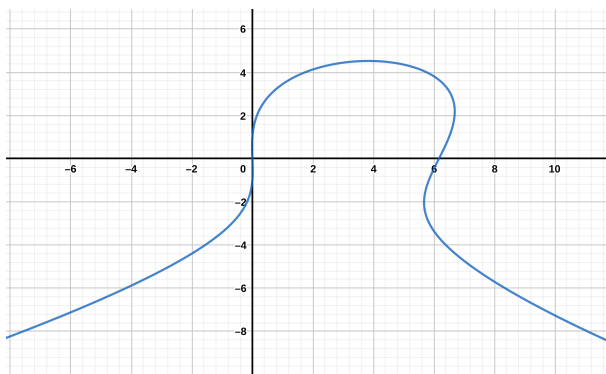
**Problema 13.8** Sea  $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+3x}}$ . Trabajando con un compañero, encuentra  $f'(x)$ .

Usemos la regla de la cadena para encontrar la derivada de una función exponencial. Sea  $f(x) = b^x$ , y queremos encontrar  $f'(x)$ . Vamos a usar el hecho de que  $b = e^{\ln(b)}$ . Entonces tenemos

### 13.3. Derivación implícita

Hasta ahora hemos estado trabajando con funciones definidas explícitamente:  $f(x) = \dots$ . Pero ¿qué sucede si nuestra función está definida implícitamente?

$$y^3 + 6x^2 - 2xy = 37x + y$$



¿Hay formas de encontrar la tangente a la curva (es decir, la derivada)?

\_\_\_\_\_

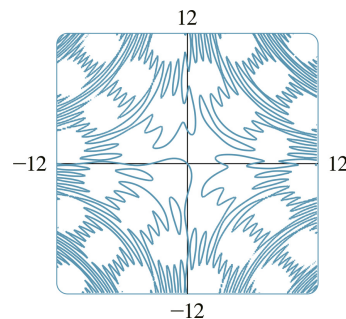
Lo que hacemos es dividir nuestra derivación en pequeñas partes. Esto se hace mejor con un ejemplo.

**Ejemplo 13.9** Sea  $x^3 + y^3 = 37$ .

Probemos con un ejemplo un poco más complicado.

**Ejemplo 13.10** Sea  $y^3 + 6x^2 - 2xy = 37x + y$ .

**Problema 13.11** Sea  $\sin(xy) = \sin(x) + \sin(y)$ .



Trabajando con una pareja, encuentra  $y'$ .

**Ejemplo 13.12** Sea  $x^3 + y^3 = 37$ . Encuentra  $y''$ .

## 14. Más derivadas

### 14.1. Derivadas de funciones trigonométricas inversas

Podemos usar la derivación implícita para encontrar las derivadas de las funciones trigonométricas inversas. Recuerda que  $\arcsin(x) = \sin^{-1}(x) = y$  significa que  $\sin(y) = x$  cuando  $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ . Probémoslo.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \sin(y) &= \frac{d}{dx} x \\ \frac{d}{dy} \sin(y) \frac{dy}{dx} &= 1 \\ \cos(y) \frac{dy}{dx} &= 1 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\cos(y)}\end{aligned}$$

Como  $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ , entonces  $\cos(y) \geq 0$ . Y como  $\sin^2(y) + \cos^2(y) = 1$ , tenemos

$$\cos(y) = \sqrt{1 - \sin^2(y)} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

Es decir,

Usando métodos similares, podemos encontrar las derivadas de todas las funciones trigonométricas inversas:

| $f(x)$       | $f'(x)$                    | $f(x)$                     | $f'(x)$                    |
|--------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| $\arcsin(x)$ | $\underline{\hspace{2cm}}$ | $\operatorname{arccsc}(x)$ | $\underline{\hspace{2cm}}$ |
| $\arccos(x)$ | $\underline{\hspace{2cm}}$ | $\operatorname{arcsec}(x)$ | $\underline{\hspace{2cm}}$ |
| $\arctan(x)$ | $\underline{\hspace{2cm}}$ | $\operatorname{arccot}(x)$ | $\underline{\hspace{2cm}}$ |

## 14.2. Derivadas de funciones logarítmicas

¿Cuál es la derivada de la función  $f(x) = \log_b(x)$ ?

Recuerda que  $y = \log_b(x)$  significa que  $b^y = x$ . ¡Hagamos una derivación implícita!

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} b^y &= \frac{d}{dx} x \\ &= \underline{\hspace{2cm}} \\ &= \underline{\hspace{2cm}} \\ \frac{dy}{dx} &= \underline{\hspace{2cm}} \end{aligned}$$

La derivada se obtiene del [Problema 13.2](#).

Esto significa que, si  $b = e$ , entonces

**Ejemplo 14.1** Sea  $f(x) = \ln(\cos(x))$ , ¿cuál es  $f'(x)$ ?

**Ejemplo 14.2** Sea  $f(x) = \left(\ln\left(\frac{x^3}{x^2+1}\right)\right)^2$ , ¿cuál es  $f'(x)$ ?

**Problema 14.3** Sea  $f(x) = x^2 \ln\left(\frac{x+3}{x^2}\right)$ . Trabajando con un compañero, encuentra  $f'(x)$ .

El logaritmo puede ayudarnos a derivar funciones racionales más complicadas. Esto se ve mejor con un ejemplo.

**Ejemplo 14.4** Sea

$$f(x) = \frac{x^{\frac{9}{4}}(x^3 - 1)^{\frac{4}{3}}}{(7x^2 - 1)^4}$$

y encuentra  $f'(x)$ . Esta expresión es muy complicada y podemos usar la regla de la cadena, la regla del producto y la regla del cociente para resolverla, pero se volvería muy complicada muy rápido. En su lugar, podemos usar logaritmos para simplificarlo todo. Lo hacemos en 3 pasos.

(1) \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

(2) \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

(3) \_\_\_\_\_

**Ejemplo 14.5** Intentémoslo de nuevo con un ejemplo muy sencillo.  
Sea  $f(x) = x^x$ .

(1)

(2)

(3)

**Problema 14.6** Sea

$$f(x) = \frac{x^{\frac{4}{3}} (x^3 - 3x^2)^{\frac{7}{3}}}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

y, trabajando con un compañero, encuentra  $f'(x)$ .

## 15. Usos de la derivada

### 15.1. Valores máximos y mínimos

Muchos problemas de la vida real son problemas de optimización: ¿cuándo alcanzan las funciones sus valores máximos o mínimos? Vimos algo parecido en nuestro problema del astronauta, donde queríamos encontrar la aceleración máxima. También aparece, por ejemplo, al decidir:

- ¿Cuál fue el valor máximo de  $CO_2$  en la atmósfera antes del año 0 a. C.?
- ¿A qué hora tienen los restaurantes la mayor cantidad de clientes?
- ¿Qué forma debe tener el envase de nuestro producto para minimizar los costos?

Hay una cantidad interminable de problemas de máximos y mínimos.

**Problema 15.1** Intenta inventar un problema de máximos y mínimos y compártelo con tu compañero:

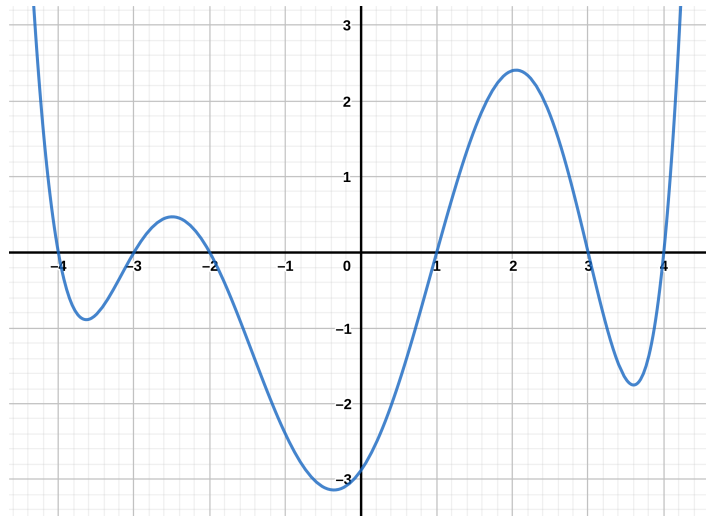
Problema de máximo/mínimo: \_\_\_\_\_

Pero, matemáticamente, ¿qué significan máximo y mínimo? Una función  $f$  tiene un *valor máximo absoluto en  $c$  sobre un dominio  $D$*  si  $f(c) \geq f(x)$  para todo  $x \in D$ . De manera similar, una función  $f$  tiene un *valor mínimo absoluto en  $c$  sobre un dominio  $D$*  si  $f(c) \leq f(x)$  para todo  $x \in D$ . A veces los valores absolutos también se conocen como

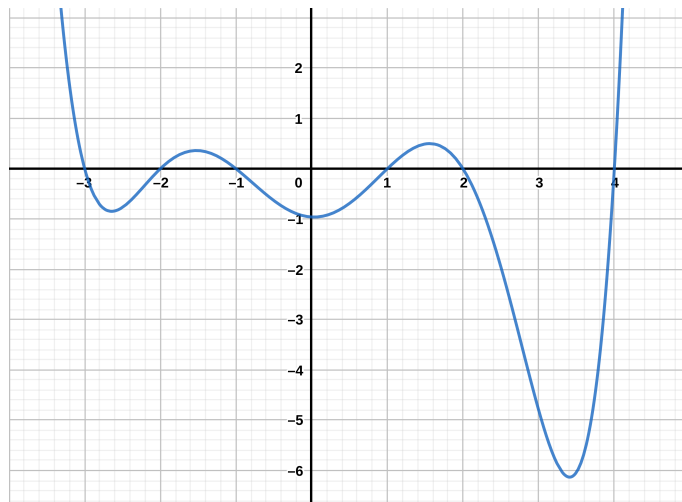
valores globales. Un *valor extremo de  $f$*  es un \_\_\_\_\_ de  $f$ .

También podemos considerar puntos que son máximos o mínimos en una región más pequeña. Si  $f(c) \geq f(x)$  para todo  $x$  cercano a  $c$ , decimos que  $f(c)$  es un *máximo local*. De manera similar,  $f(c)$  es un *mínimo local* si  $f(c) \leq f(x)$  para todo  $x$  cercano a  $c$ .

### Ejemplo 15.2



**Problema 15.3** Trabajando con un compañero, completa los máximos y mínimos absolutos y los máximos y mínimos locales en el dominio  $[-3, 4]$  de la siguiente gráfica:



¿Cómo sabemos que los valores extremos siquiera existen? ¡Quizá tengamos una gráfica en la que no existan valores extremos! Resulta que no es así, como mostró Bernard Bolzano en la década de 1830 al demostrar el siguiente resultado.

**Teorema 15.4** (Teorema del valor extremo) *Si  $f$  es continua en un intervalo cerrado  $[a, b]$ , entonces  $f$  alcanza un valor máximo absoluto*

$f(c)$  y un valor mínimo absoluto  $f(d)$  en algunos números  $c$  y  $d$  de  $[a, b]$ .

¿Y qué ocurre con los máximos y mínimos locales? Resulta que Pierre Fermat dio una propiedad muy útil sobre los máximos y mínimos locales.

**Teorema 15.5** (Teorema de Fermat) *Si  $f$  tiene un máximo o mínimo local en  $c$  y existe  $f'(c)$ , entonces  $f'(c) = 0$ .*

 Ten mucho cuidado con este teorema. Es muy fácil querer afirmar que el teorema dice más de lo que realmente dice. Hay 3 errores comunes que los estudiantes cometen con este teorema; dos de ellos aparecen en el libro.

(1) \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

(2) \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

(3) \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Aunque hay muchas trampas con el teorema de Fermat, este sugiere que *quizá* podamos determinar cómo se comporta una función a partir de su derivada. Un *número crítico* de una función  $f$  es un número  $c$  (del dominio) tal que  $f'(c) = 0$  o  $f'(c)$  no existe. En otras palabras, el teorema de Fermat se convierte en:

Si  $f$  tiene un máximo o mínimo local en  $c$ , entonces  $c$  es un número crítico de  $f$ .

Resulta que podemos usar los números críticos para determinar cuándo tenemos un máximo o mínimo absoluto en algún intervalo  $[a, b]$ . Para ello:

Wikipedia: [número crítico](#)

- (1) Encuentra los valores críticos de  $f$  en el intervalo  $(a, b)$ .
- (2) Encuentra los valores de  $f$  en los valores críticos y en los extremos del intervalo (en  $a$  y  $b$ ).
- (3) El mayor valor del paso anterior es el máximo absoluto y el menor valor es el mínimo absoluto.

**Ejemplo 15.6** Sea  $f(x) = x^3 - x^2 - x$ ; encuentra su máximo y mínimo absolutos en el intervalo  $[-\frac{1}{2}, 2]$ .

**Problema 15.7** Sea  $f(x) = x^3 + x^2 - 1$ ; encuentra sus valores extremos en el intervalo  $[-1, 1]$ .

## 15.2. El teorema del valor medio

Nuestro siguiente objetivo es el teorema del valor medio. Comenzamos con el teorema de Rolle, llamado así por Michel Rolle, quien lo publicó en 1691 para funciones polinómicas. Aunque Rolle fue el primero en publicar sus ideas, se atribuye al matemático indio Bhāskara II (1114–1185) ser la primera persona de la que sabemos que conocía el teorema. Además, el teorema en sí no se demostró por completo hasta 1823, cuando Cauchy lo demostró en su totalidad.

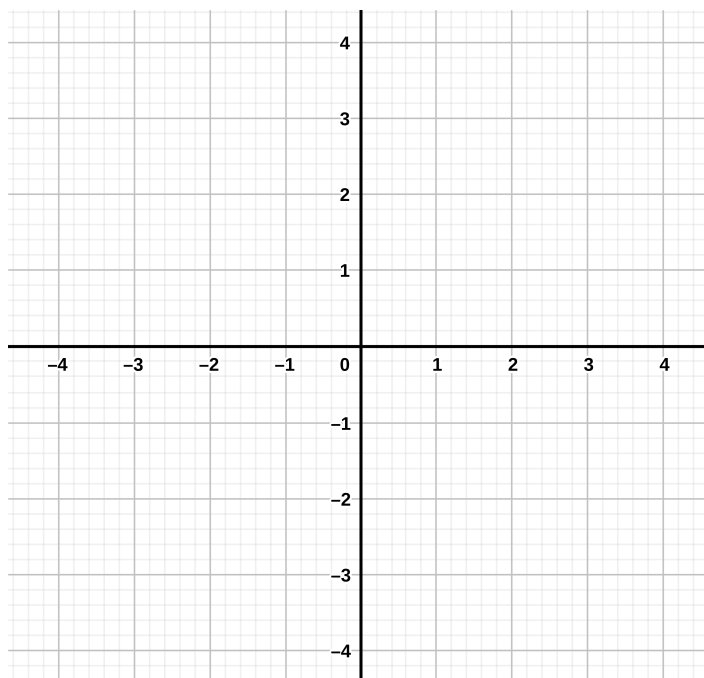
**Teorema 15.8** (Teorema de Rolle) *Sea  $f$  una función que satisface las siguientes tres hipótesis:*

(1)  $f$  es continua en  $[a, b]$ .

(2)  $f$  es derivable en  $(a, b)$ .

(3)  $f(a) = f(b)$ .

*Entonces existe un número  $c$  en  $(a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ .*



El teorema de Rolle se usa para determinar cuántas raíces puede tener una función.

**Ejemplo 15.9** Demuestra que la ecuación  $f(x) = x^3$  tiene exactamente una raíz real.

El teorema del valor medio fue conocido primero por Parameshvara (1370–1460), un matemático indio. En Europa, Joseph-Louis Lagrange fue el primero en enunciarlo en la siguiente forma.

**Teorema 15.10** (Teorema del valor medio) *Sea  $f$  una función tal que:*

(1)  $f$  es continua en  $[a, b]$ .

(2)  $f$  es derivable en  $(a, b)$ .

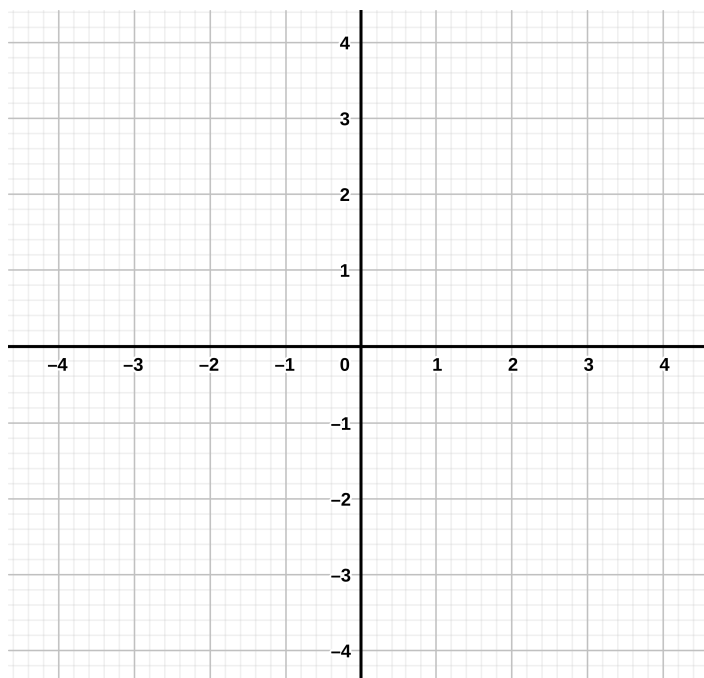
Entonces existe un número  $c$  en  $(a, b)$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

A veces este teorema se conoce como el *teorema del valor medio de Lagrange*. Existe una versión extendida de este teorema que no veremos aquí, llamada *teorema del valor medio extendido* o *teorema del valor medio de Cauchy*.

Wikipedia: [teorema del valor medio de Lagrange](#)

Wikipedia: [teorema del valor medio de Cauchy](#)



**Ejemplo 15.11** Sea  $f(x) = x^2 - 2$  y consideremos el intervalo  $[0, 2]$ . Demuestra que el teorema del valor medio se cumple en este intervalo.

El teorema del valor medio nos permite enunciar los siguientes dos teoremas.

**Teorema 15.12** Si  $f'(x) = 0$  para todo  $x$  en un intervalo  $(a, b)$ , entonces  $f$  es constante en  $(a, b)$ .

**Corolario 15.13** Si  $f'(x) = g'(x)$  para todo  $x$  en un intervalo  $(a, b)$ , entonces  $f - g$  es constante en  $(a, b)$ ; i.e.,  $f(x) = g(x) + c$  para alguna constante  $c$ .

## 16. Regla de L'Hôpital

Vamos a volver por un momento a los límites y ver cómo podemos encontrar límites en situaciones que no están bien definidas. Por ejemplo,

¿cuál es el siguiente límite?

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$$

¿Y qué pasa con

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Siempre que tengamos un límite

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \underline{\hspace{2cm}}$$

entonces este límite se llama una *forma indeterminada* de tipo  $\frac{0}{0}$  o  $\pm\frac{\infty}{\infty}$ .

Estos límites no son muy fáciles de resolver con los métodos que tenemos hasta ahora, pero en 1694 el matemático suizo Johann Bernoulli presentó un teorema al matemático francés Guillaume de l'Hôpital, que ahora llamamos regla de L'Hôpital:

**Teorema 16.1** (Regla de L'Hôpital) *Supongamos que  $f$  y  $g$  son derivables y que  $g'(x) \neq 0$  en un intervalo abierto  $I$  que contiene a  $a$  (excepto, posiblemente, en  $a$ ). Supongamos además que se cumple una de las siguientes condiciones:*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

o

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$$

(en otras palabras, el límite es una forma indeterminada de uno de los dos tipos). Entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \underline{\hspace{2cm}}$$

si el límite del lado derecho existe o es  $\pm\infty$ .

¡Esto está genial! Probémoslo con nuestros ejemplos anteriores.

**Ejemplo 16.2** Sea  $f(x) = \text{sen}(x)$  y  $g(x) = x$  y, de lo anterior, recuerda que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \underline{\hspace{2cm}}$$

así que podemos usar la regla de L'Hôpital.

**Ejemplo 16.3** Sea  $f(x) = x^2$  y  $g(x) = e^x$  y, de lo anterior, recuerda que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

¡Por lo tanto podemos usar la regla de L'Hôpital!

Prueba otro ejemplo con un compañero.

**Problema 16.4** Sea  $f(x) = x^2 - x - 2$  y  $g(x) = \sqrt{2} - \sqrt{x}$ . Trabajando con un compañero, encuentra

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)}$$

**Ejemplo 16.5** ¿En cuáles de los siguientes límites puedo usar la regla de L'Hôpital?

$$\begin{array}{ccc} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 7x}{x^2 + 9x + 3} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{(x^4 + 7x) \cdot e^x} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x} & \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\pi - x}{\cos(x)} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{\cos(x)} \end{array}$$

¡También podemos usar la regla de L'Hôpital en otros casos! En la mayoría de estos casos, lo que queremos hacer es convertir nuestro límite en un límite de uno de nuestros dos tipos de indeterminación. Estos casos se resuelven mejor mediante ejemplos.

**16.1. La forma  $\infty - \infty$** **Ejemplo 16.6** Encontrar el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x \operatorname{sen}(x)} - \frac{1}{x^2}$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x \operatorname{sen}(x)} - \frac{1}{x^2} =$$

$$= \frac{1}{6}$$

Observa cómo cambiamos nuestra expresión de  $\infty - \infty$  a  $\frac{0}{0}$  para poder usar la regla de L'Hôpital. Hacemos lo mismo con todos los tipos.

**16.2. La forma  $0 \cdot \pm\infty$** **Ejemplo 16.7** Encontrar el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} 8x^4 \ln(3x)$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} 8x^4 \ln(3x) =$$

$$= 0$$

**16.3. Las formas  $0^0$ ,  $\infty^0$  y  $1^{\pm\infty}$** 

¡Podemos hacer lo mismo con las potencias! En estos casos, es un poco más complicado.

**Ejemplo 16.8** Encontrar el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2)^{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2)^{x^2} \rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2)^{x^2} = e^0 = 1$$

En esencia, seguimos los siguientes pasos:

(1) \_\_\_\_\_

(2) \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

(3) \_\_\_\_\_

**Problema 16.9** Trabajando con un compañero, encuentra el siguiente límite.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x)^x$$





## Capítulo 5

# Integración

### 17. Antiderivadas

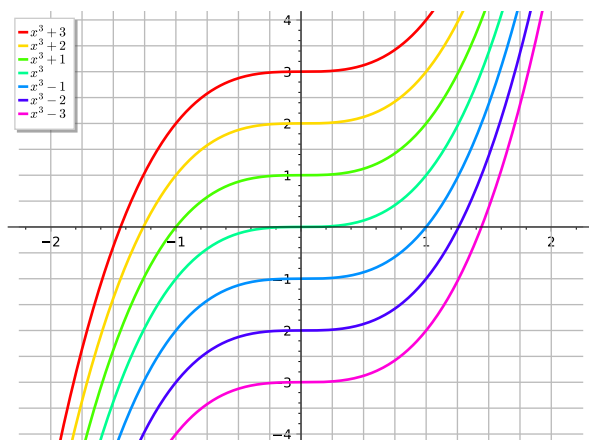
Ya hemos visto cómo encontrar la derivada de una función  $f(x)$ . Pero ¿qué pasa si queremos ir hacia atrás? Supongamos que tenemos una función  $f(x)$  y queremos saber de qué función es derivada. Esta es la idea de las antiderivadas.

**Definición 17.1** Una función  $F$  se llama *antiderivada* de  $f$  en un intervalo  $I$  si \_\_\_\_\_ para todo  $x$  en  $I$ .

Wikipedia: [antiderivada](#)

**Ejemplo 17.2** Si  $f(x) = 3x^2$ , ¿cuál es su antiderivada? \_\_\_\_\_

¿Cómo se ven estas funciones?



Pero ¿cómo sabemos que eso es todo? ¿Y si hubiera alguna otra antiderivada? Resulta que no es así, como veremos en el siguiente teorema.

**Teorema 17.3** Si  $F$  es una antiderivada de  $f$  en un intervalo  $I$ , entonces la antiderivada más general de  $f$  en  $I$  es

**Ejemplo 17.4** ¿Cuáles son las antiderivadas (generales) de las siguientes funciones?

(1)  $f(x) = \cos(x)$  : \_\_\_\_\_

(2)  $f(x) = x^n$  donde  $n \neq -1$  : \_\_\_\_\_

(3)  $f(x) = x^{-1}$  : \_\_\_\_\_

Podemos usar las reglas de derivación para encontrar las antiderivadas de funciones más complicadas. Por ejemplo, si tenemos  $f(x) + g(x)$  y si  $F(x)$  y  $G(x)$  son las antiderivadas de  $f$  y  $g$ , respectivamente, entonces  $F(x) + G(x)$  es una antiderivada de  $f(x) + g(x)$ . Veamos un ejemplo.

**Ejemplo 17.5** Encuentra todas las antiderivadas de  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 2 \cos(x) + \frac{2x^5 + \sqrt[3]{x}}{x^2}$ .

**Problema 17.6** Intenta uno con un compañero. Sea  $f(x) = 2 \sin(x) - \frac{1+x^3}{x}$  y encuentra todas las antiderivadas de  $f(x)$ .

Si buscamos una respuesta particular, también necesitamos un dato de la función.

**Ejemplo 17.7** Encuentra  $f$  si  $f'(x) = e^x - 2 \cos(x)$  y  $f(0) = 2$ .

Probemos algo un poco más difícil.

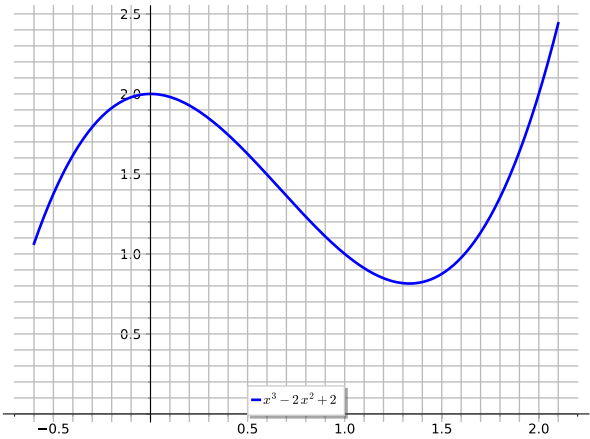
**Ejemplo 17.8** Encuentra  $f$  si  $f''(x) = 3x + 2$  donde  $f(0) = 4$  y  $f(2) = 13$ .

**Problema 17.9** Con un compañero, encuentra  $f$  si  $f''(x) = 4x^2 + 1$  donde  $f(0) = \frac{1}{6}$  y  $f(1) = 2$ .

| Función                   | Derivada                            | Función                    | Derivada                                       |
|---------------------------|-------------------------------------|----------------------------|------------------------------------------------|
| $f(x) = x^r$              | $f'(x) = rx^{r-1}$                  | $f(x) = kg(x)$             | $f'(x) = kg'(x)$                               |
| $f(x) = g(x)h(x)$         |                                     | $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ | $f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h^2(x)}$ |
| $f(x) = g(h(x))$          |                                     | $f(x) = g(x)^r$            | $f'(x) = r(g(x))^{r-1}g'(x)$                   |
| $f(x) = e^x$              | $f'(x) = e^x$                       | $f(x) = \ln(x)$            | $f'(x) = \frac{1}{x}$                          |
| $f(x) = a^x$              | $f'(x) = a^x \ln(a)$                | $f(x) = \log_a(x)$         | $f'(x) = \frac{1}{x \ln(a)}$                   |
| $f(x) = \text{sen}(x)$    |                                     | $f(x) = \cos(x)$           |                                                |
| $f(x) = \text{tg}(x)$     | $f'(x) = \sec^2(x)$                 | $f(x) = \cot(x)$           | $f'(x) = -\text{csc}^2(x)$                     |
| $f(x) = \sec(x)$          | $f'(x) = \sec(x) \text{tg}(x)$      | $f(x) = \csc(x)$           | $f'(x) = -\csc(x) \cot(x)$                     |
| $f(x) = \arcsin(x)$       | $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$    | $f(x) = \arccos(x)$        | $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$              |
| $f(x) = \arctan(x)$       | $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$           | $f(x) = \text{arccot}(x)$  | $f'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$                     |
| $f(x) = \text{arcsec}(x)$ | $f'(x) = \frac{1}{ x \sqrt{x^2-1}}$ | $f(x) = \text{arccsc}(x)$  | $f'(x) = \frac{-1}{ x \sqrt{x^2-1}}$           |

## 18. Áreas y distancias

Supongamos que tenemos la siguiente función:  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$ :



Como ya sabemos más o menos cómo estudiar las tangentes a una curva, ahora veamos el área bajo una curva. Supongamos que queremos calcular el área bajo la curva entre 0 y 2. ¿Cómo podemos hacerlo?

Usando nuestras técnicas, podemos estimar que el área debe ser:

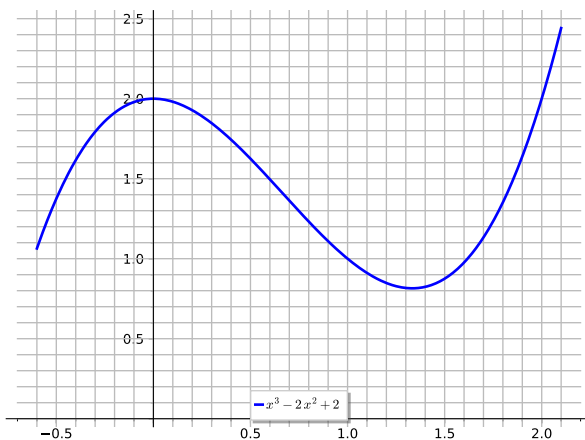
—

Esencialmente, estamos usando la siguiente fórmula para calcular el área:

$$\sum_{i=0}^n f(x_i) \Delta x$$

Pero podemos mirar esta función de otra manera. Podemos obtener una estimación usando los lados derechos de nuestros rectángulos:

$$\sum_{i=0}^n f(x_{i+1}) \Delta x$$



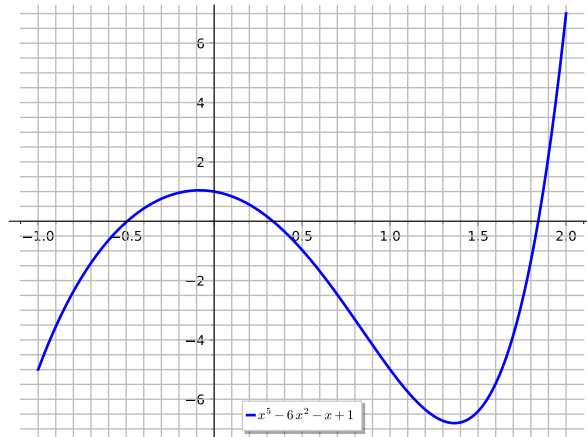
Al hacer esto con nuestro ejemplo, obtenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^9 f\left(\frac{i+1}{5}\right) \Delta x \\ &= \left( \frac{241}{125} + \frac{218}{125} + \frac{187}{125} + \frac{154}{125} + 1 + \frac{106}{125} + \frac{103}{125} + \frac{122}{125} + \frac{169}{125} + 2 \right) \frac{1}{5} \\ &= \frac{67}{25} \approx 2,680000000000000 \end{aligned}$$

¡Fíjate en que estos dos valores son bastante parecidos!

## 19. Integral definida

Ahora veamos una función diferente y seamos un poco más precisos al definir estos rectángulos. Trabajaremos con  $f(x) = x^5 - 6x^2 - x + 1$ :



Dado un intervalo cerrado  $[a, b]$ , una *partición* de un intervalo de números  $x_i$  es tal que:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Esto nos da pequeños subintervalos:

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

Si todos los intervalos tienen el mismo tamaño  $\left(\frac{b-a}{n}\right)$  decimos que la partición es *regular*.

**Ejemplo 19.1** Hacemos dos ejemplos. Tomemos  $a = 2$  y  $b = 5$ . Las siguientes son dos particiones diferentes:

$$2 < 2,1 < 3 < 4,2 < 4,5 < 4,51 < 5$$

$$2 < 3 < 4 < 5$$

y cada una define intervalos diferentes:

$$[2, 2, 1], [2, 1, 3], [3, 4, 2], [4, 2, 4, 5], [4, 5, 4, 51], [4, 51, 5]$$

$$[2, 3], [3, 4], [4, 5]$$

¿Cuál de las dos particiones es regular? \_\_\_\_\_

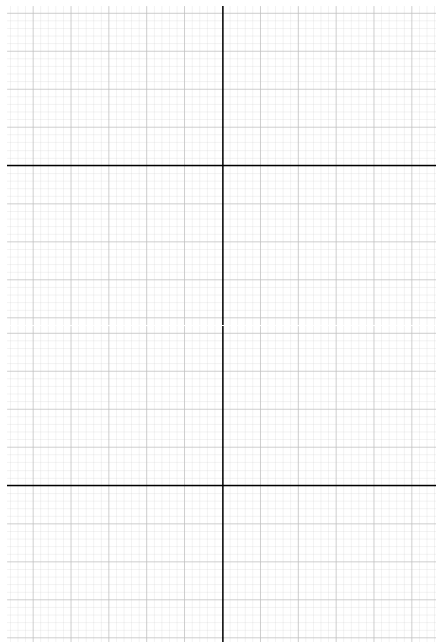
**Problema 19.2** Dados  $a = 0$  y  $b = 1$ , con un compañero, da una partición regular:

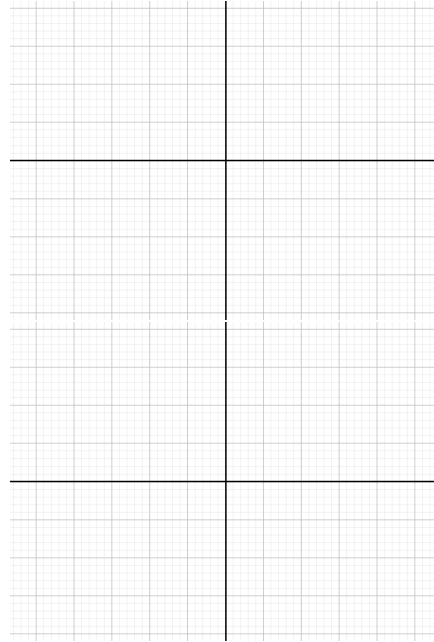
Se supone siempre que la partición es regular. La *longitud de un intervalo* es la diferencia entre el extremo inicial y el extremo final del intervalo:  $\Delta x_i =$  \_\_\_\_\_ para el intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ .

¡Ya estamos listos para definir nuestras sumas! La *suma de Riemann* de una función en un intervalo  $[a, b]$  es la suma:

Wikipedia: [suma de Riemann](#)

donde  $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$  es un número arbitrario.





¡Ya hemos visto dos de estas! La *suma por la derecha* es la suma de Riemann en la que tomamos  $x_i^* = x_i$ . La *suma por la izquierda* es la suma de Riemann en la que tomamos  $x_i^* = x_{i-1}$ . La *suma del punto medio* es la suma de Riemann en la que tomamos  $x_i^* = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$ .

¡Pero lo que realmente queremos es encontrar el área *exacta*, no solo una aproximación! ¿Qué podemos hacer para encontrar el área exacta?

Vamos a usar nuestra herramienta favorita hasta ahora en clase: los límites. Sí... los límites.

El límite que vamos a usar es el siguiente:

Si este límite existe, decimos que la función es *integrable en el sentido de Riemann*.

PERO esta notación es horrible. Hay un millón de símbolos. ¿Quién quiere escribir todo eso cada vez? Nadie. Así que vamos a usar otra notación que, creo, todos ya han visto: la integral.

**Observación 19.3** ¡Un poco de historia! Usamos  $\Sigma$  para la sumación porque «sumación» empieza con s. Así que necesitamos un símbolo nuevo para la integral. Por suerte, Gottfried Leibniz (alemán) había creado la notación perfecta en 1675. Usó la s larga del alemán antiguo: f. (Hoy en día, la s larga del alemán se escribe como «ß».) ¿Por qué? Porque la integral es una suma de intervalos realmente pequeños. Así que f es perfecta para eso, ya que se queda como una «s», pero es una s diferente! (Incluso en español se usaba f! Esta letra no desapareció del español hasta aproximadamente entre 1760 y 1800.)

Cambiamos la «s», pero también necesitamos cambiar la  $\Delta$ , ya que estamos tomando el límite. Como estamos tomando el límite, estos intervalos se hacen cada vez más pequeños. En otras palabras, sería genial representarlo usando un «pequeño»  $\Delta$ . Entonces, ¿cuál es la minúscula de  $\Delta$ ? ¡Es  $\delta$ , por supuesto! Pero Leibniz, uno de los fundadores del cálculo, tradujo el griego al alemán y la  $\delta$  se convirtió en una  $d$ . De aquí viene la notación de Leibniz:  $\frac{dy}{dx}$  en realidad!

Así que, si nuestra función es integrable en el sentido de Riemann, escribiremos:

$$\text{_____} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i.$$

Algunas definiciones:

- El  $a$  es el *límite inferior de integración*,
- El  $b$  es el *límite superior de integración*,
- El  $f(x)$  es el *integrando*,
- La  $x$  es llamada la *variable de integración* o la *variable independiente*.

**Teorema 19.4** Si una función  $f(x)$  es \_\_\_\_\_ en el intervalo  $[a, b]$  o si  $f(x)$  tiene solo un número finito de discontinuidades de salto, entonces la función  $f(x)$  es \_\_\_\_\_ en  $[a, b]$ .

**Ejemplo 19.5** Veamos un ejemplo (fácil). Encontrar  $\int_1^2 x^2 dx$ .

Eso fue bastante horrible. La idea de los próximos días es intentar hacer esto más fácil.

### 19.1. Propiedades de las integrales definidas

**Proposición 19.6** Sea  $f(x)$  una función continua en  $[a, b]$  y sea  $c$  una constante.

$$(1) \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du$$

$$(2) \int_a^a f(x) dx = \underline{\hspace{1cm}}$$

$$(3) \int_a^b c dx = c(b - a)$$

$$(4) \int_a^b f(x) dx = \underline{\hspace{3cm}}$$

$$(5) \int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$

$$(6) \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$(7) \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \underline{\hspace{3cm}}$$

### 19.2. El teorema fundamental del cálculo

Recuerda que, al estudiar sumas, vimos una que llamamos suma telescópica:

$$\sum_{i=1}^n a_i - a_{i-1} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

De hecho, nuestra integral se escribe de una forma casi idéntica:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) (x_i - x_{i-1}).$$

Ahora queremos saber si existe una forma más sencilla de resolver estas integrales y veremos (muy pronto) que sí existe. ¡De hecho, esto se hace mediante antiderivadas!

Recuerda que una antiderivada de una función  $f(x)$  es una función  $F(x)$  tal que  $F'(x) = f(x)$ .

**Teorema 19.7** (El teorema fundamental del cálculo) *Si  $f(x)$  es una función continua en un intervalo  $[a, b]$  y si  $F(x)$  es una antiderivada de  $f(x)$  entonces*

$$\int_a^b f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

Para hacerlo más sencillo, aquí tienes algunas funciones junto con sus antiderivadas

| Función                                        | (una) antiderivada            |
|------------------------------------------------|-------------------------------|
| $x^n$ donde $n \neq -1$                        | $\frac{x^{n+1}}{n+1}$         |
| $x^{-1}$                                       |                               |
| $\text{sen}(kx)$ donde $k \neq 0$              | $-\frac{\cos(kx)}{k}$         |
| $\cos(kx)$ donde $k \neq 0$                    | $\frac{\text{sen}(kx)}{k}$    |
| $\sec^2(kx)$ donde $k \neq 0$                  |                               |
| $\text{cosec}^2(kx)$ donde $k \neq 0$          | $-\frac{\cotan(kx)}{k}$       |
| $\sec(kx) \text{tg}(kx)$ donde $k \neq 0$      | $\frac{\sec(kx)}{k}$          |
| $\text{cosec}(kx) \cotan(kx)$ donde $k \neq 0$ | $-\frac{\text{cosec}(kx)}{k}$ |
| $e^{kx}$ donde $k \neq 0$                      |                               |

**Ejemplo 19.8** Veamos algunos ejemplos:

$$\int_1^2 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8-1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\int_2^4 2x dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\int_0^\pi \text{sen}(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\int_5^{50} e^{x^2} \cdot \text{sen}^2(x^2) dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

**Problema 19.9** Intenta un ejemplo con un compañero. Resuelve:

$$\int_1^3 4x^3 - e^x + \frac{1}{x} dx$$

**Pista:** Recuerda las propiedades de integrales anteriores.

## 20. Integrales indefinidas

Gracias al teorema fundamental del cálculo, podemos encontrar la integral  $\int_a^b f(x) dx$ . Pero para hacerlo, primero debemos encontrar una antiderivada de  $f(x)$ !

¡Esto no siempre es fácil!

**Ejemplo 20.1** Encontrar una función  $F(x)$  tal que  $F'(x) = f(x) = e^{x^2}$ .

Para esto necesitamos una forma de obtener antiderivadas. Normalmente esto se hace usando integrales indefinidas.

Una *integral indefinida* es el conjunto de \_\_\_\_\_ antiderivadas de una función dada. En otras palabras, es la fórmula general  $F(x) + c$  que vimos hace unos días. Normalmente lo denotaremos como:

Todo esto significa que  $F(x) + c$  es la fórmula general para una antiderivada de  $f(x)$ .



!!!Las integrales definidas e indefinidas son diferentes!!! Las integrales definidas tienen límites inferior y superior y dan un valor. Las integrales indefinidas no tienen límites inferior ni superior y dan una función.

Ya tenemos un montón de integrales indefinidas que podemos obtener usando las reglas de derivación que vimos antes:

$$(1) \int k dx = kx + c$$

$$(2) \int [k_1 f(x) + k_2 g(x)] dx = k_1 \int f(x) dx + k_2 \int g(x) dx$$

$$(3) \int x^n dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(4) \int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + c$$

$$(5) \int e^x dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(6) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \text{ (donde } 1 \neq a > 0)$$

$$(7) \int \operatorname{sen}(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(8) \int \cos(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(9) \int \sec(x) dx = \ln(|\sec(x) + \operatorname{tg}(x)|) + c$$

$$(10) \int \operatorname{cosec}(x) dx = \ln(|\operatorname{cosec}(x) - \operatorname{cotan}(x)|) + c$$

$$(11) \int \operatorname{tg}(x) dx = \ln(|\sec(x)|) + c$$

$$(12) \int \operatorname{cotan}(x) dx = \ln(|\operatorname{sen}(x)|) + c$$

$$(13) \int \sec^2(x) dx = \operatorname{tg}(x) + c$$

$$(14) \int \operatorname{cosec}^2(x) dx = -\operatorname{cotan}(x) + c$$

$$(15) \int \sec(x) \operatorname{tg}(x) dx = \sec(x) + c$$

$$(16) \int \operatorname{cosec}(x) \operatorname{cotan}(x) dx = -\operatorname{cosec}(x) + c$$

$$(17) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + c$$

$$(18) \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arcsec}(|x|) + c$$

$$(19) \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c$$

¿Pero a quién le importa? Nos importa porque nos da una forma más sencilla de calcular una integral definida.

**Ejemplo 20.2** Evalúa la siguiente expresión.

$$\int_2^4 \frac{12}{x^3} dx =$$

$$= \frac{9}{8}.$$

**Problema 20.3** Intenta calcular la siguiente integral con un compañero.

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx$$

**Ejemplo 20.4** Probemos con un ejemplo un poco más complicado. Vamos a encontrar  $\int_0^\pi 3x^2 - e^x + \cos(x) dx$ .

$$\int 3x^2 - e^x + \cos(x) dx =$$

Entonces,

$$\int_0^\pi 3x^2 - e^x + \cos(x) dx =$$

$$= \pi^3 - e^\pi + 1$$

## 21. Cómo resolver integrales

### 21.1. Sustitución

Ahora vamos a estudiar la regla de la cadena, pero para la integración. Así que supongamos que tenemos algunas integrales (indefinidas) como:  $\int (3x + 2)^{7/9} dx$ ? E intentamos encontrar la antiderivada de  $(3x + 2)^{7/9}$ .

Hasta ahora no hemos aprendido realmente una forma de abordar algo así, pero podemos usar las ideas de la regla de la cadena (y la derivación implícita) para resolverlo. Este método se llama «sustitución».

Lo que queremos es una integral más fácil de manejar. En nuestro caso, queremos transformar nuestra integral en algo como  $\int u^{7/9} du$ . ¿Por qué? ¡Porque ya sabemos cómo integrar esta función!

Así que, si tomamos  $u = 3x + 2$ , entonces tenemos  $\int u^{7/9} dx$ . Pero ahora tenemos otro problema. ¿Cuál crees que es el problema?

Bueno, ¡veamos si podemos resolverlo! Vamos a usar derivación implícita:

$$u = 3x + 2 \Rightarrow \underline{\hspace{2cm}}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int (3x+2)^{7/9} dx &= \\ &= \frac{1}{3} \int u^{7/9} du \\ &= \\ &= \frac{9}{3 \cdot 16} u^{16/9} + c \\ &= \frac{3}{16} (3x+2)^{16/9} + c \end{aligned}$$

¡Y eso es todo!

Entonces, ¿qué hicimos?

(1) \_\_\_\_\_

(2) \_\_\_\_\_

(3) \_\_\_\_\_

(4) \_\_\_\_\_

(5) \_\_\_\_\_

**Problema 21.1** Con un compañero, encuentra las siguientes integrales:  $\int x(7x^2 - 8)^{16/7} dx$ . **Hint:** No te preocupes por la  $x$  que aparece sola.

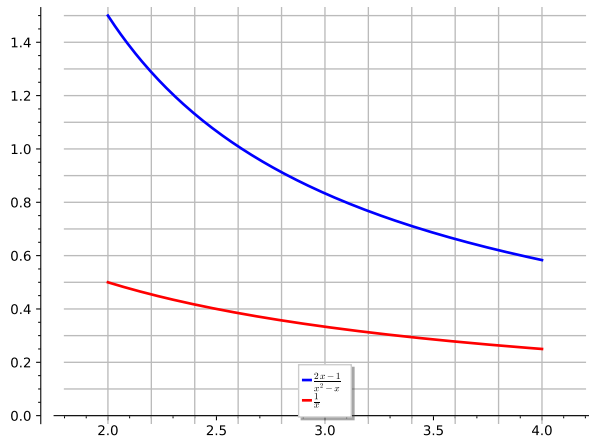
Pero recuerda que hacemos todo esto para encontrar integrales definidas. Entonces, ¿qué pasa con eso?

**Ejemplo 21.2** Encuentra la siguiente integral definida:  $\int_2^4 \frac{2x-1}{x^2-x} dx$

Entonces,

¡Pero ahora tenemos un problema diferente! \_\_\_\_\_

Veamos las dos funciones juntas. La de arriba (azul) es la que tiene la variable  $x$  y la de abajo (rojo) es la que tiene la variable  $u$ .



Entonces, ¿cómo resolvemos esto? Hacemos exactamente lo mismo que hicimos con  $dx$ .

Aquí está la regla de sustitución en todo su esplendor:

**Teorema 21.3** (Regla de sustitución para una integral definida) *Si  $g'(x)$  es una función continua en el intervalo  $[a, b]$  y si  $f(x)$  es una función continua que tiene una antiderivada en el intervalo  $[g(a), g(b)]$ , entonces*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

¿Y por qué hay  $g'(x)$ ? ¡De la regla de la cadena!

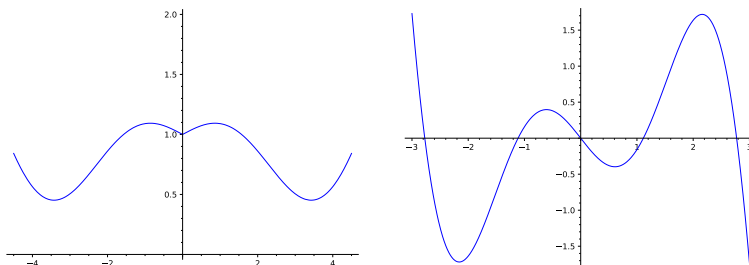
$$\begin{aligned} u = g(x) &\Rightarrow du = g'(x) dx \\ &\Rightarrow \frac{du}{g'(x)} dx \end{aligned}$$

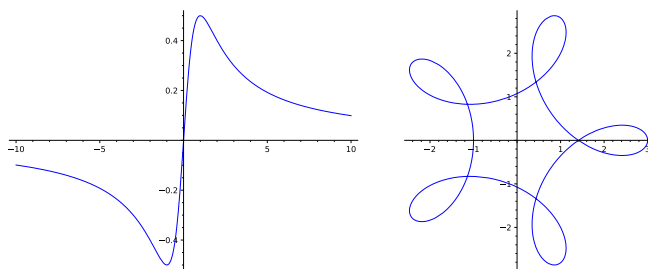
y, por lo tanto, para poder cambiar  $f(g(x))$  por  $f(u)$  siempre debemos tener  $g'(x)$ .

**Ejemplo 21.4** Probemos esto con una función un poco más divertida  $\int \cotan(ax) dx$  para  $a \in \mathbb{R}$ .

## 21.2. Funciones pares e impares

Recuerda que una función es par si  $f(-x) = f(x)$  y es impar si  $f(-x) = -f(x)$ . Algunos ejemplos:





**Teorema 21.5** (Propiedades de las funciones pares e impares) Si  $f_1(x)$  y  $f_2(x)$  son funciones pares y  $g_1(x)$  y  $g_2(x)$  son funciones impares, entonces, siempre que las operaciones estén definidas, se cumple que:

(1)  $f_1(x)f_2(x)$  y  $g_1(x)g_2(x)$  son funciones \_\_\_\_\_.

(2)  $f_1(x)g_1(x)$  es una función \_\_\_\_\_.

(3)  $\int_{-a}^a f_1(x) dx =$  \_\_\_\_\_

(4)  $\int_{-a}^a g_1(x) dx =$  \_\_\_\_\_

**Ejemplo 21.6** Por ejemplo:

$$\int_{-a}^a x^2 \sin(x) - x^7 + x \cos(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

### 21.3. Completar el cuadrado

Veamos las siguientes tres integrales:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \underline{\hspace{2cm}} \\ \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx &= \underline{\hspace{2cm}} \\ \int \frac{1}{1+x^2} dx &= \underline{\hspace{2cm}} \end{aligned}$$

Todas tienen la forma: \_\_\_\_\_. Por lo tanto, buscaremos una forma de transformar un polinomio  $ax^2+bx+c$  en un polinomio de la forma  $\pm x^2 \pm 1$ . A esto lo llamamos: \_\_\_\_\_.

Esto consiste en transformar nuestro polinomio de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \\ &= \underline{\hspace{2cm}} \\ &= a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left( \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) \right) \end{aligned}$$

Pero, sinceramente, es demasiado difícil memorizar esta fórmula. Lo único que realmente necesitamos recordar es cómo elegir  $\frac{b^2}{4a^2}$ . Y para eso es más fácil empezar con un ejemplo muy sencillo:

**Ejemplo 21.7**

$$x^2 + bx$$

Aquí ya sabemos que  $a = 1$  y  $c = 0$ , pero, como dije, por ahora no vamos a tener eso en cuenta. Queremos transformar  $x^2 + bx$  en «un cuadrado».

Por lo tanto, haremos lo contrario. Supongamos que tenemos:

$$(x + d)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

Y en la otra dirección, necesitamos dividir  $b$  entre 2, lo que nos da:

$$x^2 + bx =$$

**Ejemplo 21.8** Probemos con algunos ejemplos concretos:

$$x^2 + 8x = x^2 + 8x + 4^2 - 4^2 = (x + 4)^2 - 4^2$$

$$x^2 - 7x = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$2x^2 + 4x = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$3x^2 - 5x = \underline{\hspace{2cm}}$$

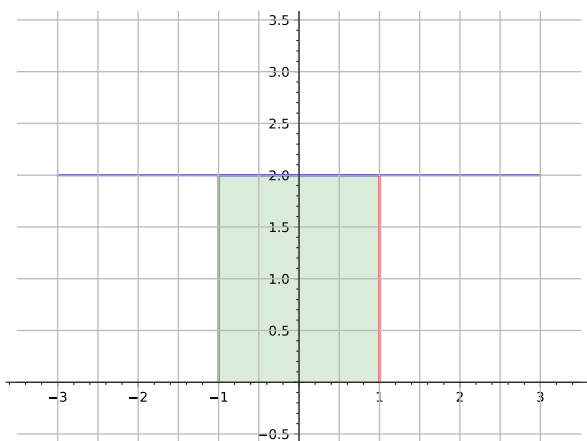
$$x^2 + 4x - 1 = \underline{\hspace{2cm}}$$

¿Por qué hacemos esto? Para poder resolver las integrales que planteamos al principio de la sección.

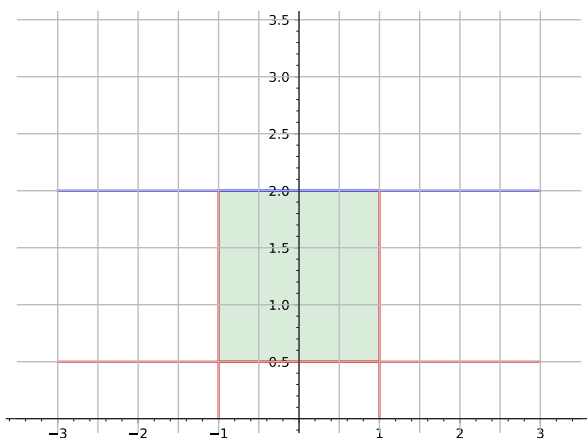
$$\int \frac{x + 2}{\sqrt{-2x^2 - 12x - 10}} dx$$

### 21.4. El área de una región plana

Supongamos que queremos encontrar el área de una región como la de un cuadrado



Queremos usar la integración para encontrar el área. De antes en el curso, sabemos que  $\int_{-1}^1 2 \, dx$  nos da el área. Pero ¿qué podemos hacer si cambiamos el tamaño de nuestro cuadrado?



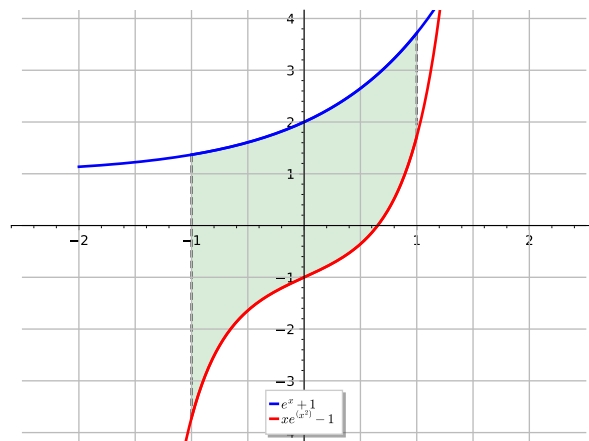
Podemos verlo como el área de la función de arriba menos el área de la función de abajo. En otras palabras

$$\int_{-1}^1 \left(2 - \frac{1}{2}\right) dx =$$

$$= 3$$

Pero eso fue demasiado fácil. Así que probemos con uno un poco más difícil.

**Ejemplo 21.9** ¿Cuál es el área entre las dos curvas?



La función  $e^x + 1$  está en azul y la función  $xe^x - 1$  está en rojo.

Vamos a hacer lo mismo. Encontraremos el área bajo la curva superior y restaremos el área bajo la curva inferior.

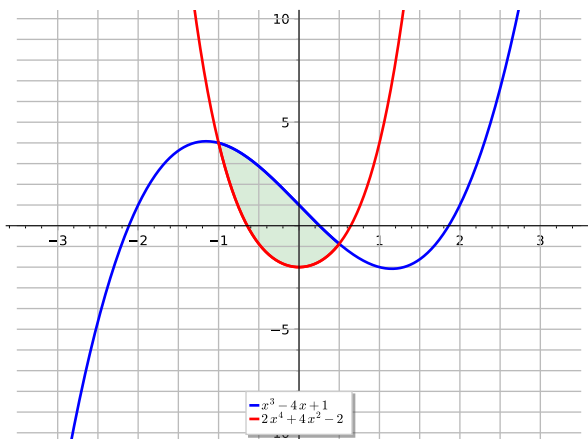
Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 e^x dx &= e^x \Big|_{-1}^1 = e^1 - e^{-1} \\ \int_{-1}^1 2 dx &= 2x \Big|_{-1}^1 = 2 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) = 2 + 2 = 4 \\ \int_{-1}^1 x e^{(x^2)} dx &= \end{aligned}$$

$$= 0$$

Por lo tanto, el área es  $e^1 - e^{-1} + 4$ .

**Ejemplo 21.10** Veamos otro ejemplo



Por lo tanto, en azul tenemos  $x^3 - 4x + 1$  y en rojo tenemos  $2x^4 + 4x^2 - 2$ . Si queremos el área de la región central, primero debemos encontrar dónde se intersecan estas dos curvas.

Se intersecan cuando \_\_\_\_\_.

Por lo tanto, debemos encontrar las raíces de  $2x^4 - x^3 + 4x^2 + 4x - 3$ .

Entonces, debemos usar el \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_:  $p/q$  es una raíz del polinomio  $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  si  $p|a_0$  y  $q|a_n$ . Por lo tanto, sabemos que las raíces necesitan estar en el conjunto:  $\{\pm 3, \pm 1, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{1}{2}\}$ .

Si miramos la figura, obtenemos algunas pistas. Así que comprobaremos si  $-1$  y  $\frac{1}{2}$  son raíces.

Si  $x = -1 \Rightarrow$  \_\_\_\_\_

Por lo tanto \_\_\_\_\_.

Si  $x = \frac{1}{2} \Rightarrow$  \_\_\_\_\_

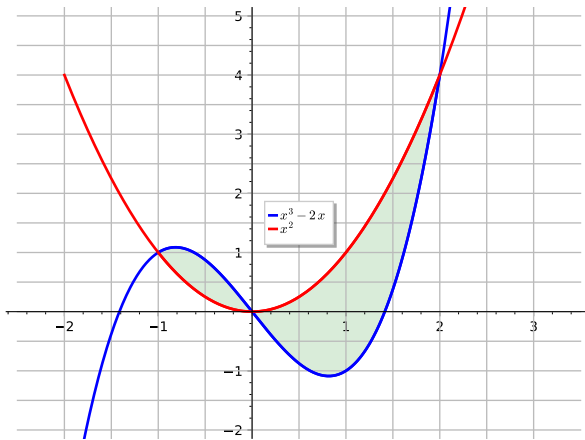
Por lo tanto \_\_\_\_\_.

Así que ya podemos encontrar el área. Pero debemos saber qué función está por encima de la otra. Vemos que la azul está arriba, así que

$$\int_{-1}^{\frac{1}{2}} (x^3 - 4x + 1) - (2x^4 + 4x^2 - 2) \, dx = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} -2x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x + 3 \, dx \int_{-1}^{\frac{1}{2}} -2x^4$$

$$= \frac{1233}{320}$$

**Ejemplo 21.11** Un último ejemplo. Si queremos el área de las dos regiones siguientes:



## 21.5. Integración por partes

Supongamos que  $f(x) = u$  y  $g(x) = v$ . Entonces  $d(uv) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x) = u dv + v du$ . Por lo tanto, podemos escribir  $\int_a^b d(uv) = \int_a^b u dv + \int_a^b v du$ . Esto nos dice que:

La versión indefinida viene dada por:

La integración usando la propiedad anterior es una *integración por partes*. Hagamos algunos ejemplos.

**Ejemplos 21.12** (1)  $\int (e^x)^2 dx = ?$

(2)  $\int x \cos(x) dx =$

(3)  $\int x^2 \sin(x) dx =$

$$(4) \int e^x \operatorname{sen}(x) dx =$$

Algunas pistas: Supongamos que tenemos  $\int f(x)g(x) dx$ . Si  $f(x)$  es un polinomio, siempre conviene probar con  $u = f(x)$  y  $dv = g(x) dx$ . Si  $f(x)$  es una función exponencial y  $g(x)$  una función trigonométrica, da igual cuál elijamos para  $u$  y cuál para  $dv$ .

**Ayuda para memorizar**

L \_\_\_\_\_

I \_\_\_\_\_

A \_\_\_\_\_

T \_\_\_\_\_

E \_\_\_\_\_

### Integración de funciones trigonométricas

A veces debemos usar identidades trigonométricas para ayudarnos a resolver la integral. Aquí tienes una lista de identidades que te pueden ayudar:

$$(1) \operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = \underline{\hspace{1cm}}$$

$$(2) 1 + \operatorname{tg}^2(x) = \underline{\hspace{1cm}}$$

$$(3) 1 + \cot^2(x) = \underline{\hspace{1cm}}$$

$$(4) \operatorname{sen}(x) \cos(y) = \frac{1}{2} (\operatorname{sen}(x - y) + \operatorname{sen}(x + y))$$

$$(5) \quad \sin(x) \sin(y) = \frac{1}{2} (\cos(x - y) - \cos(x + y))$$

$$(6) \quad \cos(x) \cos(y) = \frac{1}{2} (\cos(x - y) + \cos(x + y))$$

$$(7) \quad \sin(x \pm y) = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$(8) \quad \cos(x \pm y) = \underline{\hspace{10cm}}$$

Podemos usar esta lista para obtener identidades más sencillas:

$$(1) \quad \sin^2(x) = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$(2) \quad \cos^2(x) = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$(3) \quad \sin(2x) = \underline{\hspace{10cm}}$$

¿Cómo nos ayuda esto?

**Ejemplo 21.13** Intenta resolver la integral:  $\int \sin(32x) \cos(3501x) dx$ .  
¡Usamos integración por partes!

$$u = \sin(32x) \quad dv = \cos(3501x) dx$$

$$du = \cos(32x) \quad v = \frac{\sin(3501x)}{3501}$$

$$\int \sin(32x) \cos(3501x) dx = \underline{\hspace{10cm}}$$

¡Tenemos el mismo problema! No ha cambiado nada. ☹ Por lo tanto, usaremos una identidad trigonométrica.

$$\sin(32x) \cos(3501x) = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$= \underline{\hspace{10cm}}$$

$$\int \sin(32x) \cos(3501x) dx = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$= \frac{-\cos(-3469x)}{2 \cdot -3469} + \frac{-\cos(3533x)}{2 \cdot 3533} + c$$

$$= \frac{\cos(-3469x)}{6938} + \frac{-\cos(3533x)}{7066} + c$$

**Integrales de la forma**  $\int \sin^m(x) \cos^n(x) dx$

Supongamos que tenemos una integral de la forma:  $\int \sin^m(x) \cos^n(x) dx$ .  
Hay distintos métodos según los valores de  $m$  y  $n$ .

(1) Si  $m$  y  $n$  son impares, tenemos una forma de resolverla. Suponga-

mos que  $m = 2k + 1$ . ¡Podemos usar integración por sustitución!

$$\begin{aligned}
 u &= \cos(x) & du &= -\sin(x) dx \\
 \int \sin^m(x) \cos^n(x) dx &= \int \sin^{2k+1}(x) u^n \frac{du}{-\sin(x)} \\
 &= - \int \sin^{2k}(x) u^n du \\
 &= - \int (\sin^2(x))^k u^n du \\
 &= - \int (1 - \cos^2(x))^k u^n du \\
 &= - \int (1 - u^2)^k u^n du
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, probemos con un ejemplo concreto:  $\int \cos^5(x) \sin^2(x) dx$ .

Tenemos  $5 = 2 \cdot 2 + 1$ , ¡que es impar!

$$\begin{aligned}
 u &= \sin(x) & du &= \cos(x) dx \\
 \int \cos^5(x) \sin^2(x) dx &= \underline{\hspace{10em}} \\
 &= \int (\cos^2(x))^2 u^2 du \\
 &= \underline{\hspace{10em}} \\
 &= \int (1 - u^2)^2 u^2 du \\
 &= \underline{\hspace{10em}} \\
 &= \int u^2 - 2u^4 + u^6 du \\
 &= \int u^2 du - 2 \int u^4 du + \int u^6 du \\
 &= \frac{u^3}{3} - 2 \frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + c \\
 &= \frac{\sin^3(x)}{3} - \frac{2 \sin^5(x)}{5} + \frac{\sin^7(x)}{7} + c
 \end{aligned}$$

Y ahora, algo más difícil:  $\int \sin^3(x) \cos^{(-3/7)}(x) dx$

- (2) Si  $m$  y  $n$  son pares y no negativos. Usaremos las tres propiedades que vimos antes:

$$a) \sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$b) \cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$c) \sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

Con estas fórmulas podemos hacer manipulaciones para reducir el grado.

**Ejemplo 21.14** Hacemos un ejemplo:  $\int \sin^4(x) \cos^2(x) dx$

$$\int \sin^4(x) \cos^2(x) dx = \underline{\hspace{15cm}}$$

$$= \frac{x}{16} - \frac{\sin(4x)}{64} + c - \frac{1}{8} \int \sin^2(2x) \cos(2x) dx$$

Por lo tanto, debemos resolver  $\int \sin^2(2x) \cos(2x) dx$

$$u = \sin(2x) \quad du = 2 \cos(2x) dx$$

Por lo tanto, tenemos

## 21.6. ¡Secantes, cosecantes, tangentes y cotangentes!

Empecemos con  $\int \operatorname{tg}^n(ax) dx$ , donde  $n \geq 1$ . En general, tenemos

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^n(ax) dx &= \int \operatorname{tg}^2(ax) \operatorname{tg}^{n-2}(ax) dx \\ &= \frac{\int \sec^2(ax) \operatorname{tg}^{n-2}(ax) dx - \int \operatorname{tg}^{n-2}(ax) dx}{1} \\ &= \int \sec^2(ax) \operatorname{tg}^{n-2}(ax) dx - \int \operatorname{tg}^{n-2}(ax) dx \end{aligned}$$

Esta integral no parece más fácil que la anterior. Por lo tanto, intentemos usar uno de los métodos que ya hemos visto en este curso: \_\_\_\_\_.

Empecemos con \_\_\_\_\_.

Establece  $u =$  \_\_\_\_\_, entonces  $du =$  \_\_\_\_\_.

De donde

$$\begin{aligned}
 \int \sec^2(ax) \operatorname{tg}^{n-2}(ax) \, dx - \int \operatorname{tg}^{n-2}(ax) \, dx &= \underline{\hspace{10cm}} \\
 &= \underline{\hspace{10cm}} \\
 &= \underline{\hspace{10cm}} \\
 &= \frac{\operatorname{tg}^{n-1}(ax)}{a(n-1)} + c - \int \operatorname{tg}^{n-2}(ax) \, dx
 \end{aligned}$$

Entonces

$$\int \operatorname{tg}^n(ax) \, dx = \underline{\hspace{10cm}}$$

¡lo cual es mucho mejor!

**Ejemplo 21.15** Veámoslo con un ejemplo:  $\int \operatorname{tg}^5(2x) \, dx$ .

Podemos usar una técnica similar para la secante:  $\int \sec^n(ax) dx$ .

**Ejemplo 21.16** Resolvamos  $\int \sec^8(x) dx$

Este método no funciona cuando  $n$  es par. Si  $n$  es impar, debemos usar la fórmula de integración por partes.

## 21.7. Integración por sustitución trigonométrica

La idea ahora es encontrar una forma de integrar expresiones de la forma: \_\_\_\_\_ . Por el momento, ninguno de los

métodos que hemos visto nos da una forma sencilla de resolverla. Pero podemos usar identidades trigonométricas para resolverlas.

**Ejemplo 21.17** Si tenemos  $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$  usaremos el hecho de que  $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$  para resolver la integral. ¿Cómo nos ayuda esto? ¡Porque podemos manipular la fórmula!

En particular,  $\cos(x)^2 = 1 - \sin(x)^2$ , por lo tanto, si reemplazamos  $x$  por \_\_\_\_\_ obtendremos algo más sencillo.

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \underline{\hspace{10em}}$$

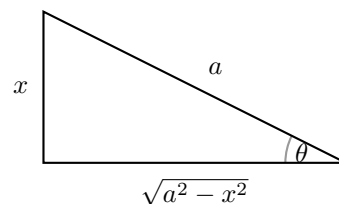
Al derivar, obtenemos  $dx = \underline{\hspace{10em}}$  ! Por lo tanto,  $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int a^2 \cos^2(\theta) d\theta$ .

Y a partir de aquí ya sabemos cómo hacerlo:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int a^2 \cos^2(\theta) d\theta \\ &= \underline{\hspace{10em}} \\ &= \underline{\hspace{10em}}. \end{aligned}$$

¡PERO! Ahora tenemos otro problema. Queremos la fórmula en términos de  $x$ . Por lo tanto, debemos encontrar el valor de  $\theta$  y  $\sin(2\theta)$  en términos de  $x$ .

Si  $x = a \sin(\theta)$  entonces  $\arcsin(\frac{x}{a}) = \theta$ . Para  $\sin 2\theta$  tenemos  $\sin(2\theta) = 2 \sin(\theta) \cos(\theta)$ . Usando el triángulo:



tenemos  $\sin(\theta) = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$  y  $\cos(\theta) = \frac{x}{a}$ . Por lo tanto,

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \theta + \frac{1}{2} \sin(2\theta) + c$$

=

\_\_\_\_\_

=

\_\_\_\_\_.

¡Pero tenemos muchas identidades que podemos usar para ayudarnos!

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \quad 1 + \tan^2(x) = \sec^2(x)$$

Para cada caso usamos una sustitución diferente:

|             |             |                                                                                                                                                                         |
|-------------|-------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $a^2 - x^2$ | $x =$ _____ | $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$                                                                                                                 |
| $a^2 + x^2$ | $x =$ _____ | $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$                                                                                                                 |
| $x^2 - a^2$ | $x =$ _____ | $\begin{cases} \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[ & \text{cuando } x \geq a \\ \theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right] & \text{cuando } x \leq -a \end{cases}$ |

Hagamos algunos ejemplos.

**Ejemplos 21.18** (1)  $\int \left(25 + (x-3)^2\right)^{-3/2} dx$

La expresión  $25 + (x-3)^2$  es como  $1 + x^2$ , por lo tanto vamos a usar  $x =$  \_\_\_\_\_ como sustitución.

(2)  $\int \frac{1}{x\sqrt{2x^2-16}} dx$

Supongamos que  $\sqrt{2}x > 4$  y que \_\_\_\_\_

## 21.8. Integración de expresiones que contienen funciones cuadráticas

Ya tenemos todas las herramientas necesarias para integrar funciones que contienen  $ax^2 + bx + c$ .

Recuerda cómo completar el cuadrado.

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= \underline{\hspace{10em}} \\ &= \underline{\hspace{10em}} \\ &= a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left( \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) \right) \end{aligned}$$

A partir de aquí podemos usar los métodos anteriores para encontrar la integral.

**Ejemplo 21.19** Hacemos un ejemplo:  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-6x+14}} dx$ .

$$\begin{aligned}
 x^2 - 6x + 14 &= \underline{\hspace{10cm}} \\
 \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 6x + 14}} dx &= \underline{\hspace{10cm}} \\
 &\Rightarrow \underline{\hspace{10cm}} \\
 \therefore &= \int \frac{\sqrt{5} \sec^2(\theta)}{\sqrt{5 \operatorname{tg}^2(\theta) + 5}} d\theta \\
 &= \int \frac{\sqrt{5} \sec^2(\theta)}{\sqrt{5} \sqrt{\operatorname{tg}^2(\theta) + 1}} d\theta \\
 &= \int \frac{\sec^2(\theta)}{\sqrt{\sec^2(\theta)}} d\theta \\
 &= \int \sec(\theta) d\theta \\
 &= \underline{\hspace{10cm}} \\
 &= \ln \left( \left| \frac{\sqrt{(x-3)^2 + 5}}{\sqrt{5}} + \frac{x-3}{\sqrt{5}} \right| \right) + c
 \end{aligned}$$

## 21.9. Integración de funciones racionales por descomposición en fracciones simples

Si nuestra integral contiene una fracción cuyo numerador y denominador son polinomios, a veces resulta útil usar la descomposición en fracciones simples. Veamos esto en un ejemplo.

**Ejemplo 21.20** Dado  $\int \frac{3x^2+x+2}{x^3-x^2-x+1} dx$



## Capítulo 6

# Sucesiones y series de funciones

### 22. Sucesiones de funciones

En la [Sección 5](#) estudiamos sucesiones de números, pero ¿qué sucede si consideramos sucesiones de funciones? Algunas cosas se vuelven más complicadas, ¡pero muchas otras tienden a ser prácticamente iguales! Este es un buen momento para volver atrás y repasar [Capítulo 2](#), ya que haremos muchas cosas similares.

#### 22.1. Definiciones

**Definición 22.1** Una *sucesión de funciones* es una sucesión  $\{f_n\}$  en  $A$  tal que cada  $f_n$  es una función  $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $A \subseteq \mathbb{R}$ .

**Ejemplo 22.2** Las siguientes son sucesiones de funciones:

(1)  $\{f_n\}$  donde  $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$ ,

(2)  $\{g_n\}$  donde  $g_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ .

(3) Haz tu propio ejemplo: \_\_\_\_\_

#### 22.2. Cotas

**Definición 22.3** Se dice que una sucesión  $\{f_n\}$  de funciones en  $A \subseteq \mathbb{R}$  es *puntualmente acotada* si la sucesión  $\{f_n(x)\}$  es acotada para cada  $x \in A$ . Es decir, para cada  $x \in A$ , existe un número  $M(x)$  tal que  $|f_n(x)| \leq M(x)$ .

Una sucesión  $\{f_n\}$  de funciones en  $A \subseteq \mathbb{R}$  es *uniformemente acotada* si existe  $M$  tal que:

$$|f_n(x)| \leq M \quad \forall x \in A \text{ y } n \in \mathbb{N}$$

**Definición 22.4** Se dice que una sucesión  $\{f_n\}$  de funciones en  $A \subseteq \mathbb{R}$  es *monótona creciente* (resp. decreciente) si  $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$  (resp.  $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ ) para todo  $x \in A$  y todo  $n \in \mathbb{N}$ .

### 22.3. Convergencia y límites

Como hicimos, queremos saber si estas sucesiones convergen y, si convergen, cuáles son sus límites. Dado que son funciones, hay dos maneras diferentes de definir «converger» que se parecen, pero que *no* son las mismas.

Wikipedia: *converge puntualmente*

**Definición 22.5** Dado  $x \in A \subseteq \mathbb{R}$ , se dice que la sucesión de funciones  $\{f_n\}$  en  $A \subseteq \mathbb{R}$  *converge puntualmente* en  $x$  si la sucesión de números reales  $\{f_n(x)\}$  es convergente. Se denomina  $f(x)$  el *límite puntual* de la sucesión  $\{f_n\}$ . Es decir:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad x \in A.$$

**Definición 22.6** El conjunto  $C$  de todos los puntos  $x \in A \subseteq \mathbb{R}$  tal que  $\{f_n\}$  sea convergente puntualmente en  $x$  se llama el *conjunto de puntos de convergencia puntual*.

$$C = \{x \in A \mid \{f_n(x)\} \text{ es convergente}\}$$

Wikipedia: *uniformemente convergente*

**Definición 22.7** Sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones, se dice que la sucesión es *uniformemente convergente* en  $X$  si existe una función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \geq N \text{ y } \forall x \in X, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

**Proposición 22.8** Sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones que tienen el conjunto de puntos de convergencia puntual  $C$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$  se define:

$$m_n = \sup \{|f_n(x) - f(x)| \mid x \in C\}$$

Son equivalentes los siguientes asertos:

- (1) La sucesión  $\{f_n\}$  converge uniformemente en  $C$  hacia  $f$ ,
- (2) Existe un  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $m_n \in \mathbb{R}$  para cada  $n \geq N$  y la sucesión  $\{m_n\}$  converge hacia 0.

**Teorema 22.9** (Teorema del límite uniforme) Sean  $X \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$  y  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones en  $A$  que converge uniformemente en  $X$  hacia la función  $f$ . Si  $f_n$  es continua para cada  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $f$  es continua.

**Ejemplo 22.10** Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la sucesión de funciones:

$$f_n(x) = x^n, x \in [0, 1]$$

**Ejemplo 22.11** Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la sucesión de funciones:

$$f_n(x) = x^n, x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

## 23. Series de funciones

Dada una sucesión de funciones  $\{f_n\}$  en  $A \subseteq \mathbb{R}$ , podemos considerar la sucesión  $\{S_n\}$  de sumas parciales definida por

$$S_n = \sum_{k=1}^n f_k \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

es decir,,

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x) \quad \forall x \in A, \forall n \in \mathbb{N}$$

**Definición 23.1** Entonces la serie  $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  converge puntualmente/uniformemente hacia la función  $S : A \rightarrow \mathbb{R}$  si  $\{S_n\}$  converge (puntualmente/uniformemente) hacia  $\{S\}$ . Decimos que  $S = \sum f_n$  es una *serie de funciones*.

La sucesión  $\{f_n\}$  es el *término general* de la serie  $\sum_n f_n$  y la suma  $S_n$  es la  $n$ -ésima *suma parcial* de la serie  $\sum_n f_n$  con sucesión de sumas parciales  $\{S_n\}$ .

### 23.1. Convergencia

La serie de funciones  $\sum f_n$  converge en un punto  $x \in A$  cuando la sucesión de sumas parciales  $\{S_n(x)\}$  converge. Esto es equivalente a

decir que la serie de números reales  $\sum f_n(x)$  sea convergente.

**Definición 23.2** Sea  $C \subset A$  no vacío y  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces la serie  $\sum f_n$  *converge puntualmente* en  $C$ , cuando la serie numérica  $\sum_n f_n(x)$  converge, con límite puntual  $f(x)$ .

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$$

con función suma de la serie:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

**Ejemplo 23.3** Dado  $\alpha > 0$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$  se define  $u_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  por:

$$u_n(x) = \frac{x^\alpha}{1 + n^2 x^2}$$

Probar que la serie de funciones  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  converge puntualmente en  $[0, \infty)$  para cualquier valor de  $\alpha$ .

De la teoría general de series numéricas convergentes se deduce que, si una serie de funciones es puntualmente convergente, entonces el término general ha de converger puntualmente hacia 0.

**Definición 23.4** La serie  $\sum_n f_n$  *converge uniformemente* en  $C \subset A$

cuando

$$\forall \epsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N} \text{ tal que } n \geq m \text{ implica } \left| f(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| < \epsilon \quad \forall x \in C$$

Es decir, la serie es uniformemente convergente cuando la sucesión de sumas parciales es uniformemente convergente.

**Corolario 23.5** *Una condición necesaria para que una serie de funciones  $\sum f_n$  sea uniformemente convergente en un conjunto  $A$  es que la sucesión de funciones  $\{f_n\}$  converja uniformemente a 0 en  $A$ .*

**Definición 23.6** Dada una serie de funciones  $\sum f_n$  en un conjunto  $X$ , si la serie  $\sum |f_n|$  es puntualmente convergente en  $X$  se dice que la serie original es *absolutamente convergente* (de forma puntual) en  $X$ .

**Corolario 23.7** *Todas las series absolutamente convergentes son convergentes puntualmente. Toda serie absolutamente convergente es puntualmente convergente.*

**Definición 23.8** El *conjunto de puntos de convergencia absoluta* de la serie de funciones  $\sum f_n$  es el conjunto

$$D = \left\{ x \in A \mid \sum |f_n(x)| \text{ es convergente} \right\}$$

**Definición 23.9** Sea  $\sum f_n$  una serie de funciones en un conjunto  $X$ . Se dice que la serie *converge normalmente* en  $X$  si existe una serie convergente de números reales no negativos  $\sum m_n$  tal que para todo  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que:

$$|f_n(x)| \leq m_n \quad \forall x \in X.$$

Wikipedia: *Prueba M de Weierstrass*

**Teorema 23.10** (Prueba M de Weierstrass) *Sea  $\sum_n f_n$  una serie de funciones y  $A$  un conjunto tal que para todo  $x \in A$  y  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que  $|f_n(x)| \leq M_n$ , donde la serie  $\sum_n M_n$  es convergente. Entonces  $\sum_n f_n$  converge uniformemente y absolutamente en  $A$ .*

**Ejemplo 23.11** Demostrar que converge uniformemente en  $\mathbb{R}$  la serie de funciones:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n(x)}{n^{\frac{5}{2}}}$$

**Ejemplo 23.12** ¿La siguiente suma converge? Y si converge, ¿a cuál

valor converge?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

## 23.2. Series de potencias

**Definición 23.13** Una serie de funciones con la siguiente forma se denomina una *serie de potencias* centrada en  $x = c$ .

Wikipedia: [serie de potencias](#)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \dots$$

donde  $a_n$  es una función de  $n$  y  $c \in \mathbb{R}$ .

**Ejemplo 23.14** Aquí hay algunos ejemplos:

(1)  $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$

(2)  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(x-1)^i}{i}$

(3)  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{2i}{\sqrt{i+1}} (x-2)^i$

(4) Haz tu propio ejemplo: \_\_\_\_\_

Si observamos el primer ejemplo, podemos ver que si  $|x| < 1$ , entonces la serie \_\_\_\_\_, y si  $|x| > 1$ , entonces la serie \_\_\_\_\_.

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^i = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} (2)^i = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots$$

Entonces, podemos ver que, dependiendo de nuestra elección de  $x$ , la serie puede divergir o converger. El conjunto  $I$  de *todos* los puntos  $x$  tales que la serie de potencias converge se denomina intervalo de convergencia. Toda serie de potencias tiene al menos un punto en el que converge, ya

que si  $x = c$ , entonces  $(x - c) = 0$  y nuestra serie de potencias es igual a \_\_\_\_.

Observa que, cuando  $x = 1$ , no sabemos si converge o no. Este punto se denomina radio de convergencia. Lo definimos de la siguiente manera:

**Definición 23.15** El *radio de convergencia* es el número  $r \in \mathbb{R}$  tal que

- (1) Si la serie converge *únicamente* para  $x = c$ , entonces  $r = 0$ .
- (2) Si la serie converge para todo  $x$  tal que  $|x - c| < r$  y diverge para  $|x - c| > r$ .
- (3) Si la serie converge para *todos* los valores de  $x$ , entonces  $r = \infty$ .

El *intervalo de convergencia* es, por tanto, el intervalo formado por todos los puntos donde converge la serie de potencias.

**Teorema 23.16** Dada una serie de potencias  $\sum a_i(x - c)^i$ , el radio de convergencia viene dado por  $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$  cuando este límite existe o es igual a  $\infty$ .

**Ejemplo 23.17** Hallar el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2^n + 4^n)x^n$$

Wikipedia: [analítica](#)

**Definición 23.18** Sean  $I$  un intervalo abierto en  $\mathbb{R}$  y  $f$  una función real definida en  $I$ . Se dice que  $f$  es *analítica* en un punto  $x_0 \in I$  si existen un número  $\delta > 0$  tal que  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I$ , y una serie de potencias

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  convergente en  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , tales que:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Es decir, que la serie de potencias converge en  $x_0$  y que coincide con la función  $f$  en dicho punto.

### 23.3. Series de Taylor y Maclaurin

Podemos convertir funciones en series de potencias para poder integrarlas más fácilmente. Hacemos esto utilizando algo llamado serie de Taylor. Pero primero necesitamos un teorema.

**Teorema 23.19** Si la serie de potencias  $\sum a_i(x - c)^i$  tiene radio de convergencia  $r > 0$ , entonces la función definida por  $f(x) = \sum a_i(x - c)^i$  es derivable e integrable en el intervalo abierto  $(c - r, c + r)$ , i.e.,  $f$  es analítica en  $c$ . Además

$$f'(x) = \underline{\hspace{10cm}}$$

y

$$\int f(x) dx = \underline{\hspace{10cm}}.$$

El radio de convergencia de estas dos nuevas series de potencias también es igual a  $r$ .

Ahora hagamos algo un poco extraño. ¿Qué sucede si seguimos tomando derivadas?

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x - c)^i \Rightarrow f(c) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i(x - c)^{i-1} \Rightarrow f'(c) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f''(x) = \sum_{i=2}^{\infty} i \cdot i - 1 \cdot a_i(x - c)^{i-2} \Rightarrow f''(c) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f'''(x) = \sum_{i=3}^{\infty} i \cdot i - 1 \cdot i - 2 \cdot a_i(x - c)^{i-3} \Rightarrow f'''(c) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f^{(4)}(x) = \sum_{i=4}^{\infty} i \cdot i - 1 \cdot i - 2 \cdot i - 3 \cdot a_i(x - c)^{i-4} \Rightarrow f^{(4)}(c) = \underline{\hspace{2cm}}$$

Entonces podemos sustituir cada  $a_i$  en la suma de  $f(x)$  por la derivada correspondiente:

$$f(x) = \underline{\hspace{10cm}}$$

Wikipedia: [serie de Taylor](#)

Llamamos a esta serie la *serie de Taylor* centrada en  $c$ . Si  $c = 0$ , esta serie también se conoce a veces como la *serie de Maclaurin*.

**Ejemplo 23.20** Hacemos ejemplo usando  $f(x) = e^x$ .

¿Cuál es el radio de convergencia?

Aquí tenemos más series de Taylor centradas en  $c = 0$ .

$$(1) \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad x \in \mathbb{R},$$

$$(2) \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad x \in \mathbb{R},$$

$$(3) \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \quad x \in (-1, 1)$$

# Apéndice A

## Conjuntos numéricos

### 1. Conjuntos

#### 1.1. Definición

**Definición 1.1** Un *conjunto* es una colección, *bien definida*, de elementos. «Bien definida» quiere decir que existe una regla de pertenencia inequívoca.

#### Ejemplo 1.2

- El conjunto de gente alta *no* es un conjunto.
- El conjunto de gente de más de 1,5m de altura *sí* es un conjunto.

Los elementos que forman un conjunto pueden ser números, letras, nombres, películas, memorías, etc.

#### 1.2. Notación

Un conjunto está escrito usando las llaves '{}', separando cada elemento del conjunto con una coma. El nombre de un conjunto suele ser expresado con una letra mayúscula, y los elementos que forman el conjunto con letras minúsculas.

**Ejemplo 1.3** ■  $A = \{1, 4, 7, 9\}$

- $B = \{x, y, z\}$
- $C = \{\text{Victor, Leticia, Juan, Cristina}\}$

Para la definición correcta de un conjunto y sus elementos, formalizamos todo.

**Definición 1.4** Si un elemento  $a$  *pertenece* a un conjunto  $A$ , lo escribimos así:

$$a \in A$$

O en el caso contrario ( $a$  no pertenece a  $A$ ), escribimos:

$$a \notin A$$

Se puede definir un conjunto con una sucesión de elementos, o bien con una regla.

### Ejemplo 1.5

$$A = \{x \mid x \text{ es una vocal}\}$$

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

$$B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 1 \leq x \leq 4\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4\}$$

donde « $\mid$ » se lee como «tal que».

## 2. Conjuntos notables

Los conjuntos numéricos más notables son:

**Conjunto vacío**  $\emptyset$  (también escrito  $\{\}$ )

**Números naturales**  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

**Números enteros**  $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

**Números racionales**  $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \text{ y } q \neq 0\right\}$

**Números reales**  $\mathbb{R}$

**Números complejos**  $\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\} \text{ (} i^2 = -1 \text{)}$

**Conjunto universal**  $\mathcal{U}$

Cada uno de estos conjuntos notables tiene propiedades importantes que están usados exhaustivamente en matemáticas para desarrollar demostraciones y razonar argumentos.

## 3. Representación gráfica

Wikipedia: [diagrama de Venn](#)

**Definición 3.1** Un *diagrama de Venn* es una gráfica para visualizar conjuntos y las interacciones entre ellos.

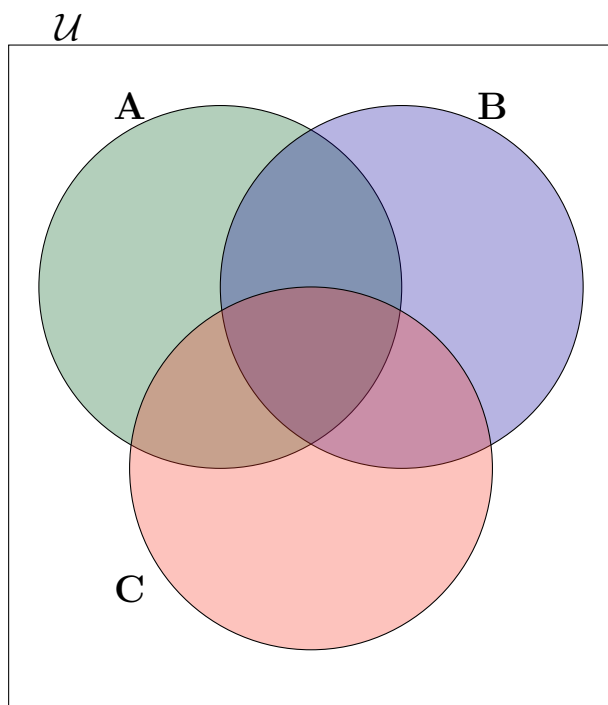


Figura A.1: Diagrama de Venn

**Ejemplo 3.2** Si consideramos los conjuntos  $A = \{1, 2, 3\}$  y  $B = \{3, 4, 5\}$ , su diagrama de Venn sería:

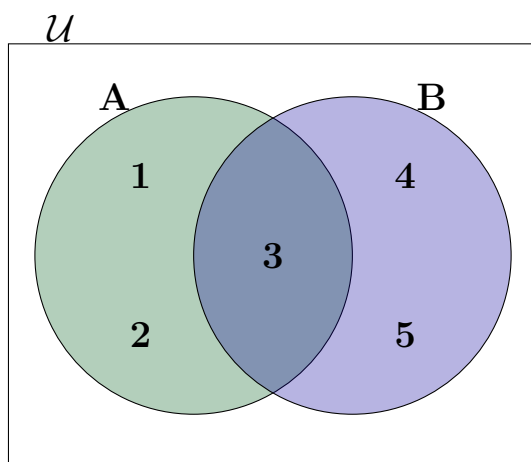


Figura A.2: Ejemplo de diagrama de Venn

donde el elemento compartido, 3, aparece en la intersección de los dos conjuntos.

## 4. Subconjuntos

**Definición 4.1** Sean  $A$  y  $B$ , dos conjuntos. Decimos que  $A$  es un *subconjunto* de  $B$ , escrito como  $A \subseteq B$ , si todos los elementos de  $A$  pertenecen a  $B$ . Es decir, si  $x \in A$  entonces  $x \in B$ . El diagrama de Venn sería:

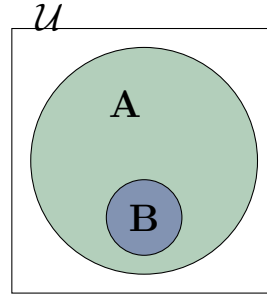


Figura A.3: Ejemplo de subconjuntos

Los conjuntos numéricos notables comparten elementos, y pueden ser definidos como subconjuntos entre ellos.

$$\emptyset \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

## 5. Operaciones

La interacción entre varios conjuntos está definida con *operaciones*.

### 5.1. Intersección

Wikipedia: [intersección](#)

**Definición 5.1** La *intersección* de dos conjuntos  $A$  y  $B$  es el conjunto de todos los elementos que pertenecen en ambos conjuntos. Lo notamos:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$$

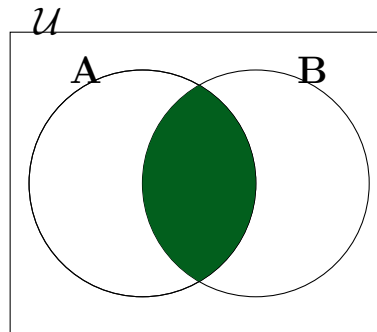


Figura A.4: Intersección:  $A \cap B$

## 5.2. Unión

**Definición 5.2** La *unión* entre dos conjuntos  $A$  y  $B$  es el conjunto de todos los elementos que pertenecen en al menos uno de los dos conjuntos.

Lo notamos:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$$

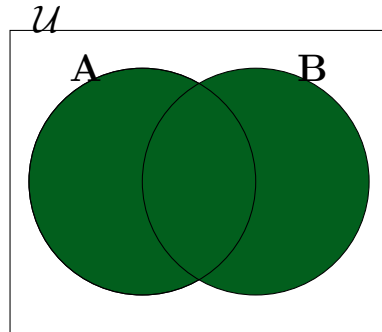


Figura A.5: Unión:  $A \cup B$

## 5.3. Diferencia

**Definición 5.3** La *diferencia* entre dos conjuntos  $A$  y  $B$  es el conjunto de todos los elementos de  $A$  restando los elementos de  $B$ .

$$A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$$

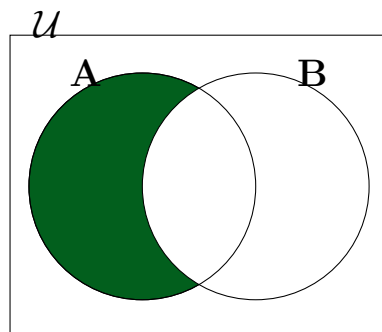


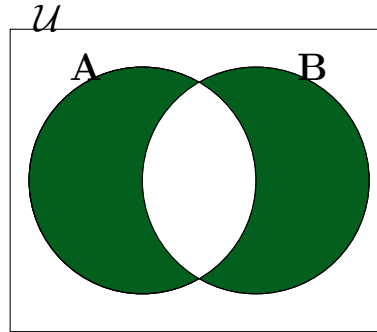
Figura A.6: Diferencia:  $A - B$

## 5.4. Diferencia simétrica

**Definición 5.4** La *diferencia simétrica* entre dos conjuntos  $A$  y  $B$  es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a cada uno de los conjuntos, pero no a ambos a la vez.

Wikipedia: [diferencia simétrica](#)

$$A \triangle B = \{x \mid (x \in A, x \notin B) \text{ o } (x \in B, x \notin A)\} = (A - B) \cup (B - A)$$

Figura A.7: Diferencia simétrica:  $A \Delta B$ 

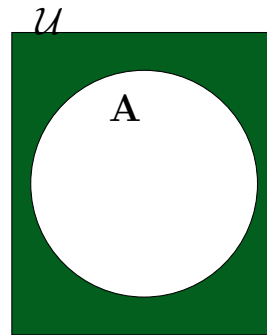
### 5.5. Complementario

**Definición 5.5** Sea  $A$  un subconjunto de otro conjunto  $B$ ,  $A \subseteq B$ . El *complementario* de  $A$  es el conjunto de todos los elementos que pertenecen en  $B$  pero no en  $A$ .

$$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\} = B - A$$



Solo podemos definir el complemento si  $A$  es un subconjunto de otro conjunto  $B$ .

Figura A.8: Complementario:  $\overline{A}$ 

## 6. Propiedades

Sea  $A$  y  $B$  conjuntos y  $\mathcal{U}$  conjunto universal. **Propiedad de idempotencia:**

$$A \cap A = A \quad A \cup A = A$$

**Propiedad conmutativa:**

$$A \cap B = B \cap A \quad A \cup B = B \cup A \quad A \Delta B = B \Delta A$$

**Propiedad asociativa:**

$$\begin{aligned}(A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C), \\ (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C), \\ (A \triangle B) \triangle C &= A \triangle (B \triangle C).\end{aligned}$$

**Propiedad absorción:**

$$A \cap (A \cup B) = A \quad A \cup (A \cap B) = A$$

**Propiedad Distributiva:**

$$\begin{aligned}A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C)\end{aligned}$$

**Ley de involución:**

$$\overline{\overline{A}} = A$$

**Leyes de De Morgan:**

$$\begin{aligned}\overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B} \\ \overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B}\end{aligned}$$

**Leyes de complementarios:**

$$\begin{aligned}A \cup \overline{A} &= \mathcal{U} \quad A \cap \overline{A} = \emptyset \\ \overline{\emptyset} &= \mathcal{U} \quad \overline{\mathcal{U}} = \emptyset\end{aligned}$$

**Leyes adicionales:**

$$\begin{array}{lll}A \cup \emptyset = A & A \cup A = A & A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U} \\ A \cap \emptyset = \emptyset & A \cap A = A & A \cap \mathcal{U} = A \\ A \triangle \emptyset = A & A \triangle A = \emptyset & A \triangle \mathcal{U} = \overline{A}\end{array}$$

## 7. Cardinal

**Definición 7.1** El *cardinal* de un conjunto  $A$ , escrito  $|A|$ , es el número de elementos en  $A$ .

**Ejemplo 7.2** Consideremos el conjunto  $A = \{a, b, c, d\}$ . Entonces,  $|A| = 4$ .

## 8. Conjunto potencia

Wikipedia: [conjunto potencia](#)

**Definición 8.1** El *conjunto potencia* de un conjunto  $A$ , escrito  $\mathcal{P}(A)$ , es el conjunto de todos los subconjuntos de  $A$ .

$$\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$$

**Ejemplo 8.2** Consideremos el conjunto  $A = \{1, 2, 3\}$ .

El conjunto de potencia de  $A$  es:

$$\mathcal{P}(A) =$$

Teniendo en cuenta que todo elemento pertenezca en un subconjunto o no, entonces:

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}.$$

## 9. Producto cartesiano

### 9.1. Definición

**Definición 9.1** Sean  $A$  y  $B$  conjuntos. El conjunto formado por todos los pares *ordenados* de primera componente en  $A$  y segunda componente en  $B$  se le llama **producto cartesiano** de  $A$  y  $B$  y se denota:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

**Ejemplo 9.2** Dados los conjuntos  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{a, b\}$ , el producto cartesiano de  $A$  y  $B$  es:

$$A \times B =$$

### 9.2. Propiedades

**Conjunto vacío:**

$$A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$$

**No es conmutativa:**

$$A \times B \neq B \times A$$

**No es asociativa:**

$$A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$$

**Cardinal:**

$$|A_1 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot \dots \cdot |A_n|$$



## Apéndice B

# Descomposición en fracciones simples

Si tenemos una fracción de dos polinomios  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ , a veces queremos descomponer la fracción en una suma de fracciones más sencillas cuyo denominador sea lineal o cuadrático. Lo hacemos de la siguiente manera.

### 10. Factorizar

El **primero paso** que hacemos es factorizar  $Q(x)$  en polinomios lineales y cuadráticos. En otras palabras,

$Q(x) =$  \_\_\_\_\_

Mejor verlo con un ejemplo.

**Ejemplo 10.1** Dado

$$Q(x) = 2x^5 + 5x^4 - 12x^3 - 14x^2 + 34x - 15.$$

Debemos usar el \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_.

Tenemos  $-15 = a_0$  y  $2 = a_n$ . Por lo tanto,  $p/q$  puede ser: \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_. Probemos con el más sencillo: 1.

$$Q(1) = \underline{\hspace{10cm}}$$

Por lo tanto,  $(x - 1)|Q(x)$  y

$$Q(x) = \underline{\hspace{10cm}}$$

Probemos con 1 otra vez:

$$Q(1) = \underline{\hspace{10cm}}.$$

Entonces:

$$Q(x) = \underline{\hspace{10cm}}$$

Entonces, probemos con 1 una vez más.

$$Q(1) = \underline{1 : 2 + 9 + 4 - 15 = 0} \quad 1 : 2 + 9 + 4 - 15 = 0.$$

Así que:

$$Q(x) = \underline{\hspace{10cm}}$$

Pero, a partir de aquí, es evidente que 1 (ni ningún número positivo) funcionará, porque siempre obtendremos algo estrictamente positivo. Por lo tanto, probemos con  $-1$ .

$$Q(-1) = \underline{-1 : 2 - 11 + 15 = 6} \quad -1 : 2 - 11 + 15 = 6.$$

¡No! Probemos con  $-3$ .

$$Q(-3) = \underline{\hspace{10cm}}$$

Y ahora:

$$Q(x) = (x - 1)^3(x + 3)(2x + 5)$$

## 11. Decompose

El **segundo paso** es descomponer nuestro cociente con respecto al denominador.

$$\frac{P(x)}{(ax + b)^n} = \frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \dots + \frac{A_n}{(ax + b)^n}$$

$$\frac{P(x)}{(ax^2 + bx + c)^n} = \frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{A_nx + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

Si tenemos varias, las sumamos.

$$\frac{P(x)}{(ax + b)(cx + d)} = \frac{A}{ax + b} + \frac{B}{cx + d}$$

**Ejemplos 11.1** (1) En nuestro ejemplo:  $\frac{P(x)}{2x^5 + 5x^4 - 12x^3 - 14x^2 + 34x - 15}$ .

$$\frac{P(x)}{(x-1)^3(x+3)(2x+5)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{2x+5} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{(x-1)^3}$$

$$(2) \frac{P(x)}{(x^2+1)^2(2x+3)}$$

$$(3) \frac{P(x)}{x^2(x+1)^3\left(x-\frac{5}{2}\right)(x^2+1)^3(x^2+2x+8)}.$$

**El tercer paso** es encontrar los variables majusculos. Pero, ¿cómo encontramos los variables majusculos? Si no tenemos poderes, es fácil:

**Ejemplo 11.2**  $\frac{12x+3}{x(x-1)} =$  \_\_\_\_\_.

$$= \frac{\quad}{\quad}$$

$$12x + 3 = \frac{\quad}{\quad}$$

Si  $x = 0$  entonces \_\_\_\_\_

Si  $x = 1$  entonces \_\_\_\_\_

Alors  $A =$  \_\_\_\_\_ et  $B =$  \_\_\_\_\_. Donc

$$\frac{12x + 3}{x(x-1)} = \frac{\quad}{\quad}$$

**Ejemplo 11.3**  $\frac{2x^2-15x+3}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3}$ .

=

$$2x^2 - 15x + 3 = A(x + 3) + B(x - 1)$$

Si  $x = 1$  entonces

Si  $x = -3$  entonces

Entonces,  $A =$  \_\_\_\_\_ et  $B =$  \_\_\_\_\_ lo que nos da

$$\frac{2x^2 - 15x + 3}{(x - 1)(x + 3)} =$$

Probemos con algunos ejemplos más complicados.

**Ejemplo 11.4**

$$\frac{x^2 + x}{(x + 1)^3} =$$

Empezando de manera similar:

$$x^2 + x =$$

$$C =$$

Pero ¿no sabemos qué valor de  $x$  sustituir para encontrar  $A$  y  $B$ ? Así que vamos a desarrollar y comparar los coeficientes de ambos lados.

$$x^2 + x = Ax^2 + 2Ax + A + Bx + B - 1$$

=

$$A =$$

$$B =$$

Entonces,

**Ejemplo 11.5** ¿Y si hacemos un ejemplo en el que el denominador tenga más de un término y además haya potencias?

$$\frac{x^2 + x}{x^2(x+1)^3} = \underline{\hspace{10cm}}$$

Sustituyendo 0 y  $-1$  obtenemos:

$$x^2 + x = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$B = \underline{\hspace{1cm}}$$

$$E = \underline{\hspace{1cm}}$$

Para  $A$ ,  $C$  y  $D$ , hacemos lo mismo que antes.

$$\begin{aligned} x^2 + x &= Ax(x+1)^3 + Cx^2(x+1)^2 + Dx^2(x+1) \\ &= Ax^4 + 3Ax^3 + 3Ax^2 + Ax + Cx^4 + 2Cx^3 + Cx^2 + Dx^3 + Dx^2 \\ &= \underline{\hspace{10cm}} \end{aligned}$$

$$A = \underline{\hspace{1cm}}$$

$$C = \underline{\hspace{1cm}}$$

$$D = \underline{\hspace{1cm}}$$

Entonces,

**Ejemplo 11.6** Empecemos con el ejemplo del principio:

$$\frac{2x^4 + x^3 + 17x - 20}{(x-1)^3(x+3)(2x+5)} =$$

---

# Índice alfabético

- $n$ -ésima derivada, 87
- absolutamente convergente, 162
- acotada, 21
  - inferiormente, 21
  - puntualmente, 157
  - superiormente, 21
  - uniformemente, 157
- analítica, 164
- antiderivada, 119
- arcocoseno, 16
- arcoseno, 16
- arcotangente, 16
- asíntota horizontal, 72
- biyectiva, 7
- codominio, 3
- coeficientes, 5
- composición, 10
- conjunto, 167
  - cardinal, 173
  - complementario, 172
  - diferencia, 171
  - diferencia simétrica, 171
  - intersección, 170
  - unión, 171
- conjunto potencia, 174
- continua, 75, 76
  - por la derecha, 76
  - por la izquierda, 76
- converge
  - puntualmente, 158
  - uniformemente, 158
  - converge normalmente, 162
  - converge puntualmente, 161
  - converge uniformemente, 161
  - convergencia absoluta, 162
  - convergencia puntual, 158
  - convergente
    - absolutamente, 45
    - condicionalmente, 45
  - cota inferior, 21
  - cota superior, 21
  - cuarta derivada, 87
  - demostración épsilon-delta, 61
  - derivada, 83, 84
  - diagrama de Venn, 168
  - diferenciable, 85
  - discontinua, 75
  - dominio, 3
  - forma indeterminada, 113
  - funciones trigonométricas
    - hiperbólicas, 17
  - función, 3
    - acotada, 53
    - continua, 75
    - creciente, 10
    - decreciente, 10
    - límite, 60
    - monótona, 10
    - monótona creciente, 158
    - par, 9
    - supremo, 53
    - ínfimo, 53
  - función cuadrática, 5

- función cúbica, 5
- función definida a trozos, 6
- función exponencial, 12
- función inversa, 11
- función lineal, 4
- función piso, 7
- función racional, 5
- función techo, 7
- función
  - discontinua, 75
- grado  $n$ , 5
- imagen, 3
- integrable en el sentido de
  - Riemann, 126
- integración por partes, 144
- integral indefinida, 130
- integrando, 127
- intervalo abierto, 10
- intervalo cerrado, 10
- intervalo de convergencia, 164
- inyectiva, 7
- logaritmo, 13
- logaritmo natural, 13
- longitud de un intervalo, 125
- límite, 60
  - puntual, 158
  - sucesión, 29
- límite inferior de integración,
  - 127
- límite superior de integración,
  - 127
- monótona, 10, 26
- máximo local, 106
- mínimo local, 106
- número crítico, 107
- operaciones, 170
- partición, 124
- pertenece, 167
- polinomio, 5
- preimagen, 3
- radio de convergencia, 164
- rango, 3
- regla de la cadena, 98
- regla del cociente, 96
- regla del producto, 95
- regular, 124
- segunda derivada, 87
- serie
  - alternada, 47
  - aritmético-geométrica, 42
  - armónica, 40
  - convergente, 36
  - divergente, 37
  - oscilante, 37
  - p, 41
  - potencias, 163
  - telescópica, 41
- serie de funciones, 160
- serie de Maclaurin, 166
- serie de Taylor, 166
- serie infinita, 35
- series
  - geométrica, 39
- sobreyectiva, 7
- subconjunto, 170
- sucesión
  - creciente, 26
  - decreciente, 26
  - divergente, 30
  - estrictamente creciente, 26
  - estrictamente decreciente,
    - 26
  - Fibonacci, 20
  - funciones, 157
  - monótona, 26
  - nula, 38
  - oscilante, 30
  - recurrente, 20
- sucesión de números reales, 19
- suma de Riemann, 125
- suma del punto medio, 126

suma parcial, [36](#), [160](#)

suma por la derecha, [126](#)

suma por la izquierda, [126](#)

supremo, [25](#)

teorema del valor medio de  
Cauchy, [111](#)

teorema del valor medio de  
Lagrange, [111](#)

teorema del valor medio  
extendido, [111](#)

tercera derivada, [87](#)

término general, [160](#)

valor extremo, [106](#)

valor máximo absoluto, [105](#)

valor mínimo absoluto, [105](#)

variable de integración, [127](#)

variable independiente, [127](#)

índice, [19](#)

ínfimo, [25](#)



# Bibliografía

Los libros siguiente han sido utilizados en la creación de estos apuntes.

- [1] PhD. Thomas Ian Ashley. *Cálculo 1*. Universidad de Loyola, 2025.
- [2] James Stewart. *Calculus: Early Transcendentals*. Brooks Cole, 2015.