Wii

Aram Dermenjian

Université du Québec à Montréal

16 juin 2016

Les partitions non croisées d'un groupe de Coxeter

Aram Dermenjian

Université du Québec à Montréal

16 juin 2016

Les systèmes des Coxeter

Un système de Coxeter est une paire (W, S) tel que

- S est un ensemble d'involutions ($s^2 = e$).
- W est le groupe engendré par S.

On donne la présentation suivante pour W:

$$W = \langle s_1, \ldots, s_n \in S \mid \; (s_i s_j)^{m_{i,j}} = e \text{ où } m_{i,j} \in \mathbb{N}^\star \text{ et } m_{i,j} = 1 \text{ ssi } i = j \rangle$$

Exemple: $W =$ Le groupe diédral d'ordre 12

$$\left\langle s, t \;\middle|\; s^2 = t^2 = (st)^6 = e \right\rangle$$
$$\ncong$$
$$\left\langle a, b, c \;\middle|\; a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^3 = (ac)^2 = (bc)^2 = e \right\rangle$$

Les diagrammes de Coxeter

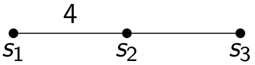
Un diagramme de Coxeter est le graphe Γ associé à un groupe de Coxeter.

- Les sommets: S
- Les arêtes: Pour s_i et s_j dans S on ajoute une arête entre eux si $m_{i,j} > 2$. Aussi, on étiquette une arête avec $m_{i,j}$ si $m_{i,j} > 3$.

Exemple:

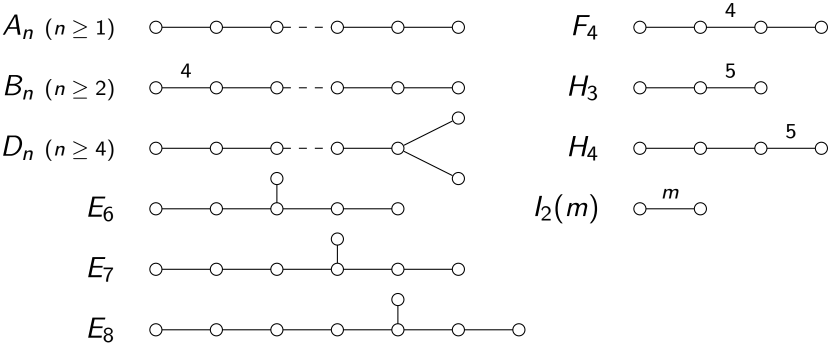
$$W = \left\langle s_1, s_2, s_3 \mid s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = (s_1 s_2)^4 = (s_2 s_3)^3 = (s_1 s_3)^2 = e \right\rangle$$

Γ_W :



Le classification

En 1935, Coxeter a montré que tout les groupes de Coxeter ont un des graphes suivants:



Exemple encore:

$\langle s, t \mid s^2 = t^2 = (st)^6 = e \rangle$ est un groupe de Coxeter de type $I_2(6)$.
$\langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^3 = (ac)^2 = (bc)^2 = e \rangle$ est un groupe de Coxeter de type $A_1 \times A_2$.

Les posets et les treillis

On fait un petit détour où on parlera des posets et des treillis.
Un **poset** $(X, \preccurlyeq)$ est un ensemble partiellement ordonné. Pour ça on a besoin d'un ensemble X et d'un ordre partiel $\preccurlyeq$ qui est une relation binaire sur X tel que:

- **Réflexive:** $x \preccurlyeq x$,
- **Antisymétrique:** $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq x$ implique que $x = y$, et
- **Transitive:** $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq$ implique $x \preccurlyeq z$.

Un **treillis** est un poset $(X, \preccurlyeq)$ tel que pour chaque x et y dans X on a

- Il existe un borne inférieure (le meet en anglais): un élément unique, $x \wedge y \preccurlyeq x, y$ tel que pour chaque $z \preccurlyeq x, y$ on a $z \preccurlyeq x \wedge y$.
- Il existe un borne supérieure (le join en anglais): un élément unique, $x \vee y \succcurlyeq x, y$ tel que pour chaque $z \succcurlyeq x, y$ on a $z \succcurlyeq x \vee y$.

L'ordre faible

Longeur: $\ell_S(w) = k$ si $w = s_1 s_2 \ldots s_k$ pour $s_i \in S$ est une expression réduite pour w (dans l'alphabet S).

L'ordre faible: Soit $w, v \in W$ on note

$$\begin{aligned} w \leq_S v \Leftrightarrow \ell_S(w) &= \ell_S(v) + \ell_S(v^{-1}w) \\ \Leftrightarrow &\ \text{un mot réduit pour } w \text{ est un préfixe} \\ &\qquad \text{d'un mot réduit pour } v \text{ dans l'alphabet } S \end{aligned}$$

Exemple: $s_1 s_3 s_4 \leq_S s_1 s_3 s_4 s_5 s_3 s_2 s_1$

Exemple: Le poset $(A_2, \leq_S) = (\mathfrak{S}_3, \leq_S)$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & (12)(23)(12) = (13) = (23)(12)(23) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
(12)(23) = (123) \arrow[d, dash] & & (132) = (23)(12) \arrow[d, dash] \\
(12) \arrow[dr, dash] & & (23) \arrow[dl, dash] \\
 & (1) &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & 321 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
231 \arrow[d, dash] & & 312 \arrow[d, dash] \\
213 \arrow[dr, dash] & & 132 \arrow[dl, dash] \\
 & 123 &
\end{tikzcd}$$

L'ordre absolue

On definit T par $T := \{wsw^{-1} \mid s \in S, w \in W\}$

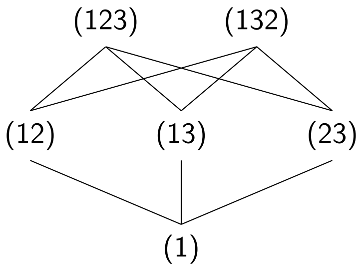
Longeur: $\ell_T(w) = k$ si $w = t_1 \dots t_k$ for $t_i \in T$ est une expression réduite pour w (dans l'alphabet T).

L'ordre absolue: Soit $w, v \in W$ on note

$$w \leq_T v \Leftrightarrow \ell_T(w) = \ell_T(v) + \ell_T(v^{-1}w)$$

$$\Leftrightarrow \text{ un mot réduit pour } w \text{ est un préfixe d'un mot réduit pour } v \text{ dans l'alphabet } T$$

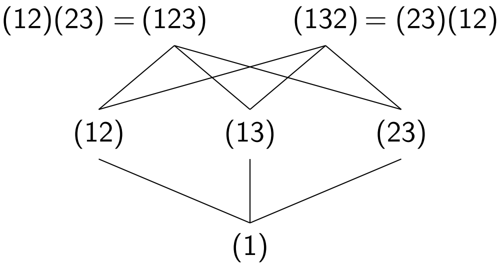
Exemple: Le poset $(A_2, \leq_T) = (\mathfrak{S}_3, \leq_T)$



L'élément de Coxeter

L'élément de Coxeter: $c = s_{\sigma(1)}s_{\sigma(2)}\dots s_{\sigma(n)}$ pour $s_i \in S$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Exemple: Le poset $(A_2, \leq_T) = (\mathfrak{S}_3, \leq_T)$ où $S = \{(12), (23)\}$

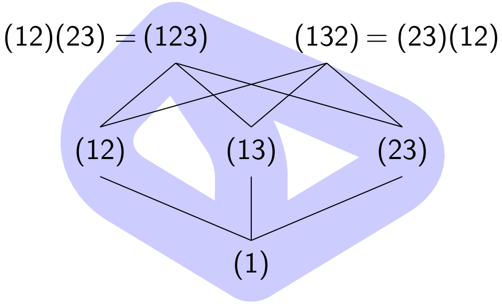


Le treillis non croisé

On s'appelle les partitions non croisées l'intervalle suivant dans le poset $(A_2, \leq_T)$

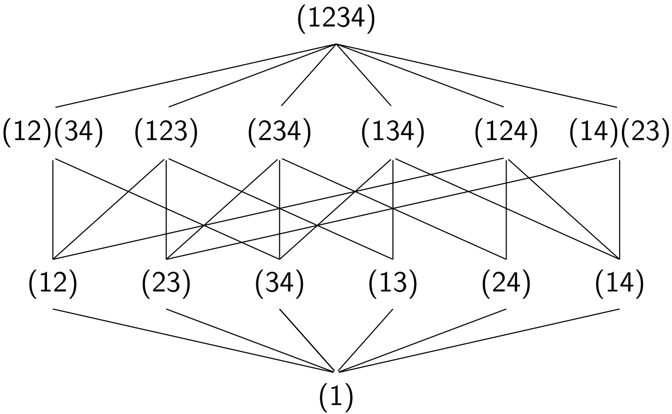
$$\mathbf{NC(W)} := [e, c] = \{w \in W \mid \ e \leq_T w \leq_T c\}$$

Exemple: Le poset $(A_2, \leq_T)$ où $c = (12)(23)$



Le treillis non croisé - Exemple

Exemple: $NC(A_3)$



Les partitions non croisées - L'histoire

1946 - H.W. Becker est étudié les schémas des rimes. On commence avec un poème:

Soir d'hiver

Ah ! comme la neige a neigé !
Ma vitre est un jardin de givre.
Ah ! comme la neige a neigé !
Qu'est-ce que le spasme de vivre
À la douleur que j'ai, que j'ai.

Tous les étangs gisent gelés,
Mon âme est noire ! où-vis-je ? où vais-je ?
Tous ses espoirs gisent gelés :
Je suis la nouvelle Norvège
D'où les blonds ciels s'en sont allés.

Pleurez, oiseaux de février,
Au sinistre frisson des choses,
Pleurez, oiseaux de février,
Pleurez mes pleurs, pleurez mes roses,
Aux branches du genévrier.

Ah ! comme la neige a neigé !
Ma vitre est un jardin de givre.
Ah ! comme la neige a neigé !
Qu'est-ce que le spasme de vivre
À tout l'ennui que j'ai, que j'ai !

Émile Nelligan

Les partitions non croisées - L'histoire

1946 - H.W. Becker est étudié les schémas des rimes. On commence avec un poème:

Soir d'hiver

Ah ! comme la neige a neigé ! A
Ma vitre est un jardin de givre. B
Ah ! comme la neige a neigé ! A
Qu'est-ce que le spasme de vivre B
À la douleur que j'ai, que j'ai. A

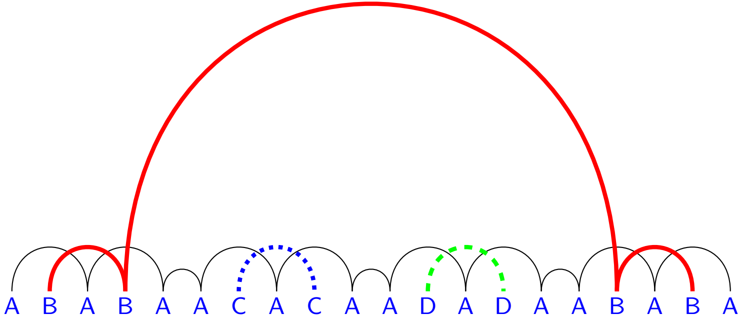
Tous les étangs gisent gelés, A
Mon âme est noire ! où-vis-je ? où vais-je ? C
Tous ses espoirs gisent gelés : A
Je suis la nouvelle Norvège C
D'où les blonds ciels s'en sont allés. A

Pleurez, oiseaux de février, A
Au sinistre frisson des choses, D
Pleurez, oiseaux de février, A
Pleurez mes pleurs, pleurez mes roses, D
Aux branches du genévrier. A

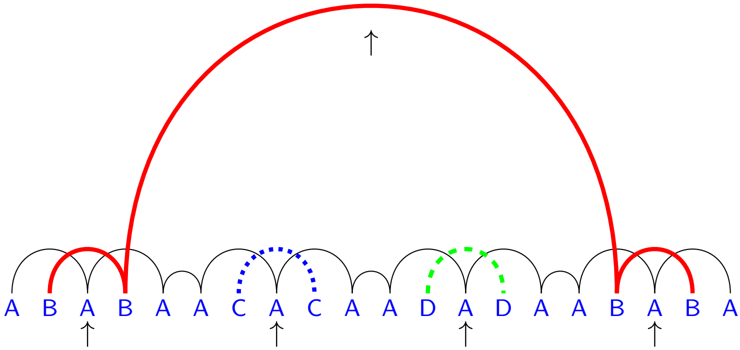
Ah ! comme la neige a neigé ! A
Ma vitre est un jardin de givre. B
Ah ! comme la neige a neigé ! A
Qu'est-ce que le spasme de vivre B
À tout l'ennui que j'ai, que j'ai ! A

Émile Nelligan

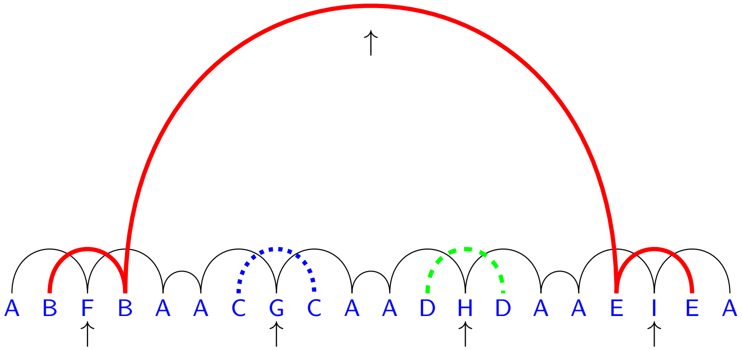
Les partitions non croisées - L'histoire



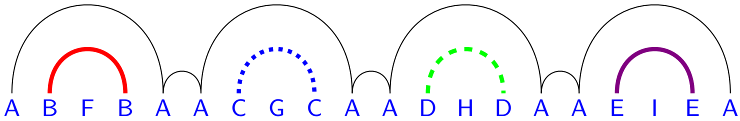
Les partitions non croisées - L'histoire



Les partitions non croisées - L'histoire

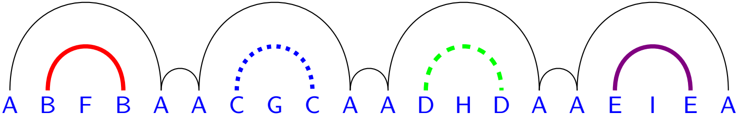


Les partitions non croisées - L'histoire



Les partitions non croisées - L'histoire

Si les arêtes ne se croisent pas, c'est un schéma de rimes planaires.
Combien existe-t-il de schémas de rimes planaires
si notre poème a n lignes?



Combien existe-t-il de schémas de rimes planaires si notre poème a n lignes?

Nombre des lignes	Les façons	Nombre de façons
0	$\varnothing$	1

Combien existe-t-il de schémas de rimes planaires si notre poème a n lignes?

Nombre des lignes	Les façons	Nombre de façons
0	$\varnothing$	1
1	A	1

Combien existe-t-il de schémas de rimes planaires si notre poème a n lignes?

Nombre des lignes	Les façons	Nombre de façons
0	$\varnothing$	1
1	A	1
2	$A\ A$ $A\ B$	2

Combien existe-t-il de schémas de rimes planaires si notre poème a n lignes?

Nombre des lignes	Les façons	Nombre de façons
0	$\varnothing$	1
1	A	1
2	$A\ A$ $A\ B$	2
3	$A\ B\ C$ $A\ A\ B$ $A\ B\ A$ $B\ A\ A$ $A\ A\ A$	5

Combien existe-t-il de schémas de rimes planaires si notre poème a n lignes?

Nombre des lignes	Les façons	Nombre de façons
0	$\varnothing$	1
1	A	1
2	$A\ A$ $A\ B$	2
3	$A\ B\ C$ $A\ A\ B$ $A\ B\ A$ $B\ A\ A$ $A\ A\ A$	5

Théorème (Becker, 1952)

Le nombre de schémas de rimes planaires avec n lignes est égal a le n-éme nombre de Catalan.

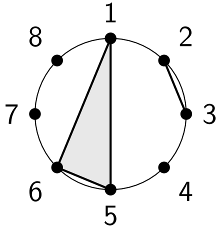
Les partitions non croisées

Les schémas des rimes planaires dans un autre sens.

- $[n] := \{1, \ldots, n\}$.
- $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_k\}$ est **une partition** de $[n]$ si:

$$P_i \subseteq [n], \quad \bigcup_{i=1}^{k} P_i = [n], \quad \text{et } P_i \cap P_j = \varnothing.$$

- P_i, P_j sont dits **non croisés** si $\nexists\ 1 \leq a < b < c < d \leq n$ tel que $a, c \in P_i$ et $b, d \in P_j$
- On dit que $\mathcal{P}$ est **non croisée** si les éléments dans $\mathcal{P}$ sont non croisés entre eux.
- **Exemple** $[8] = \{\{1, 5, 6\}, \{2, 3\}, \{4\}, \{7\}, \{8\}\}$



Un ordre sur les partitions non croisées

- On dit que une partition $\mathcal{P}$ est **plus fine** qu'une autre partition $\mathcal{P}'$ si pour chaque $P \in \mathcal{P}$ il existe un ensemble $P' \in \mathcal{P}'$ tel que $P \subseteq P'$.
- On definit un ordre partiel sur les partitions:

$$\mathcal{P} \leq \mathcal{P}' \Leftrightarrow \mathcal{P} \text{ est plus fin que } \mathcal{P}'.$$

Si on prend juste les partitions non croisées, on note le poset associé à cet ordre $\mathbf{NC(n)}$.

Exemple

$\{\{1,5,6\},\{2,3\},\{4\},\{7\},\{8\}\} \leq \{\{1,5,6\},\{2,3\},\{4\},\{7,8\}\}$

Théorème (Kreweras, 1972)

$NC(n)$ est un treillis!

Le treillis

Pour être un treillis pour chaque couple d'éléments il faut avoir une borne inférieure et une borne supérieure.

La borne inférieure: On prend la partition la plus grande qui est plus fine que les deux autres.
Exemple:

$\mathcal{P} = \{\{1,2,3,4\},\{5,7\},\{6,8\}\} \quad \mathcal{P}' = \{\{1\},\{2,3,4\},\{5,6,7\},\{8\}\}$

Alors $\mathcal{P} \wedge \mathcal{P}' = \{\{1\},\{2,3,4\},\{5,7\},\{6\},\{8\}\}$.

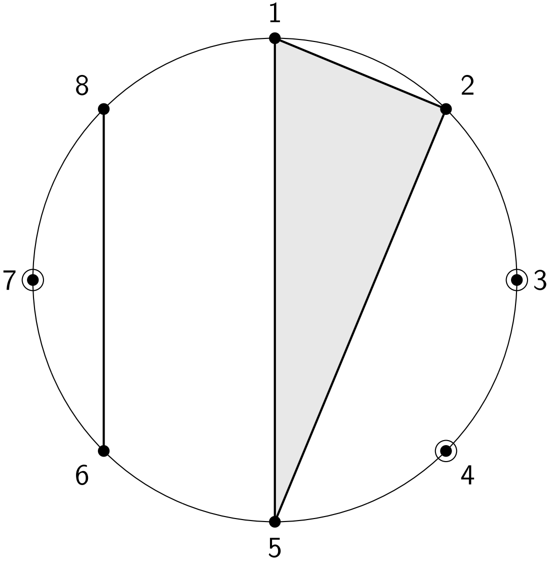
La borne supérieure: On a besoin du complément de Kreweras.
Le complément de Kreweras est l'application

$$K\colon NC(n) \to NC(n)$$

qui inverse l'ordre. Alors, si $\mathcal{P} \leq \mathcal{P}'$ alors $K(\mathcal{P}') \leq K(\mathcal{P})$.

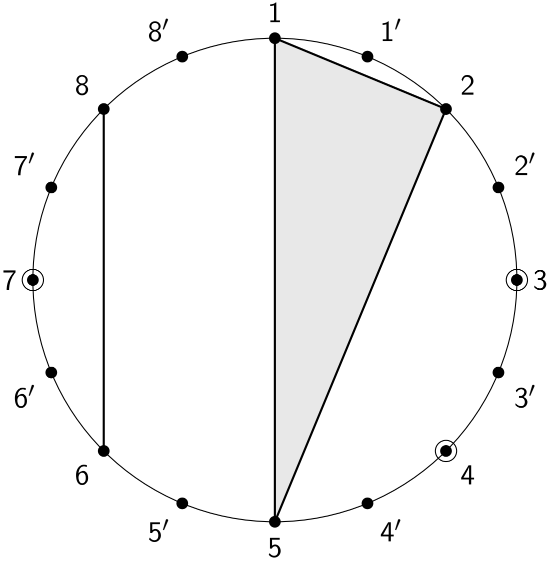
Le complément de Kreweras

Définition par un exemple: $K(\{\{1,2,5\},\{3\},\{4\},\{7\},\{6,8\}\})$



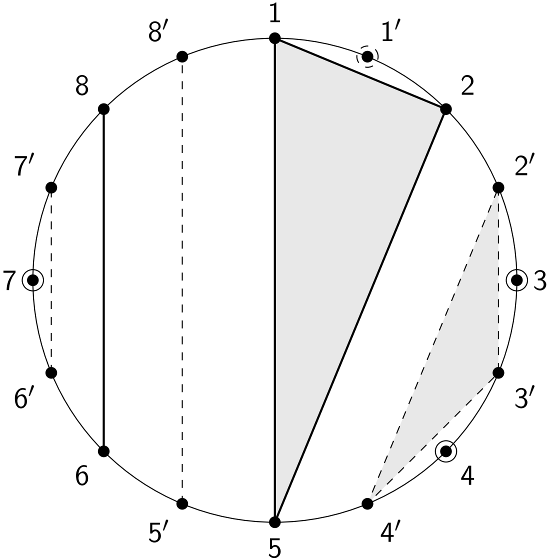
Le complément de Kreweras

Définition par un exemple: $K(\{\{1,2,5\},\{3\},\{4\},\{7\},\{6,8\}\})$



Le complément de Kreweras

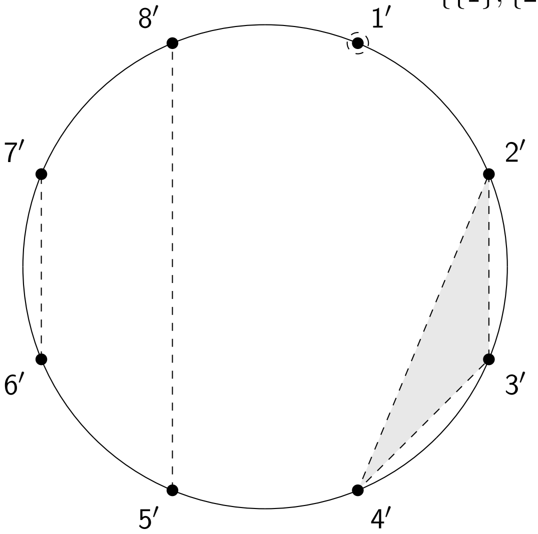
Définition par un exemple: $K(\{\{1,2,5\},\{3\},\{4\},\{7\},\{6,8\}\})$



Le complément de Kreweras

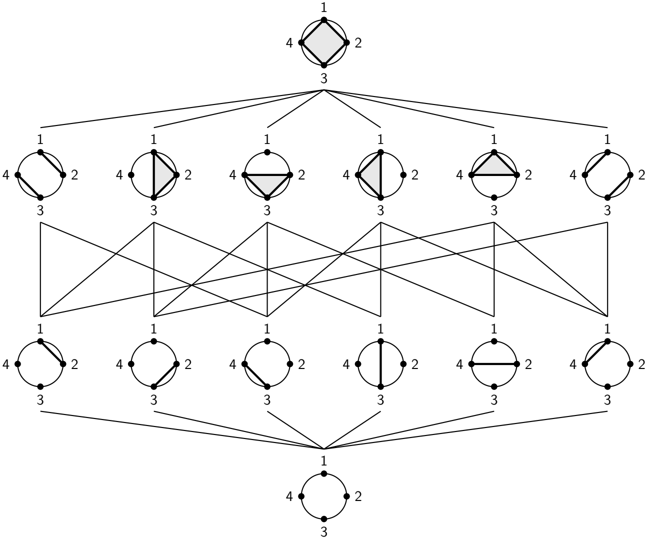
Définition par un exemple: $K(\{\{1,2,5\},\{3\},\{4\},\{7\},\{6,8\}\})$

$= \{\{1\},\{2,3,4\},\{5,8\},\{6,7\}\}$



Le treillis des partitions non croisées - Exemple

Exemple $NC(4)$



A_n Isomorphisme

Soit $\pi \in W$ où W est un groupe de Coxeter de type A. Alors

$$\pi = (a_1 a_2 \dots a_{k_a})(b_1 b_2 \dots b_{k_b}) \dots (z_1 z_2 \dots z_{k_z}).$$

On note $\{\pi\}$ la partition associée à π par la recette suivante.

- Pour chaque cycle dans π on crée un ensemble avec les éléments dans le cycle:

$$(a_1 a_2 \dots a_{k_a}) \mapsto \{a_1, a_2, \dots, a_{k_a}\}$$

- Notre partition $\{\pi\}$ est la collection de ces ensembles.

Théorème (Biane, 1997)

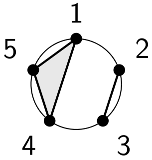
Il existe un isomorphisme de posets entre $NC(A_{n-1})$ et $NC(n)$ tel que $\pi \mapsto \{\pi\}$.

$NC(A_n)$ dans un sens différent

- On peut regarder notre poset $NC(A_n)$ comme les sous-espaces des intersections du système de racines ordonné par inclusion inverse.
- Le système de racines positives pour A_n:

$$\{\varepsilon_i = \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\},$$

Exemple - A_5
$\{\{1,4,5\},\{2,3\}\} \Leftrightarrow \{\varepsilon \in \mathbb{R}^5 \mid \varepsilon_1 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5,\ \varepsilon_2 = \varepsilon_3\}$



Les partitions non croisées pour B_n

Groupe de Coxeter: $NC(B_n) :=$ Le poset des sous-espaces des intersections du système de racines ordonné par inclusion inverse.

- Le système de racines positives pour B_n:

$$\{\varepsilon_i = \pm\varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\varepsilon_i = 0 \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

Partitions non croisées On définit

$$[\pm n] = \{1, 2, \ldots, n, -1, -2, \ldots, -n\}.$$

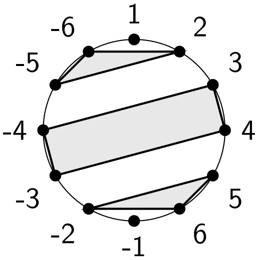
$NC_B(n) := NC(\pm n)$ avec les propriétés suivantes:

- Il existe au plus un ensemble P qui contient $+i$ et $-i$ pour un i quelconque. On permet que P a plus que seulement i tel que $\pm i \in P$.
- Pour tout $P \in \mathcal{P}$ on a que $-P := \{-p \mid p \in P\}$ doit être dans $\mathcal{P}$.

Un exemple d'une partition non croisée pour B_n

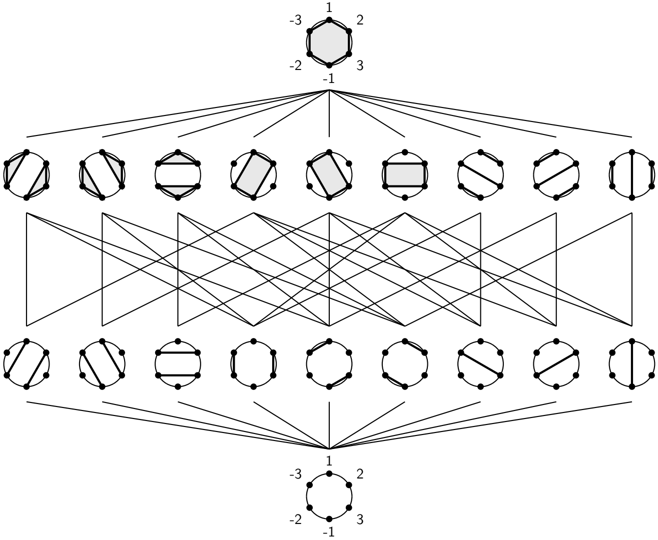
Soit B_6:

$$\mathcal{P} = \{\{2, -5, -6\}, \{-2, 5, 6\}, \{3, -3, 4, -4\}, \{1\}, \{-1\}\}$$
$$\{\varepsilon \in \mathbb{R}^6 \mid \ \varepsilon_2 = -\varepsilon_5 = -\varepsilon_6, \ \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 0\}$$



Le treillis associé aux partitions non croisées de type B_n

Exemple $NC_B(3)(\cong NC(B_3))$



B_n isomorphisme

Théorème (Biane, Goodman, Nica in 2002; Bessis in 2003; Brady and Watt in 2003)

Il existe un isomorphisme de posets entre $NC_B(n)$ *et* $NC(B_n)$.

Les partitions non croisées pour D_n

Groupe de Coxeter: $NC(D_n) :=$ Le poset des sous-espaces des intersections du système de racines ordonné par inclusion inverse.

- Le système de racines positives pour D_n:

$$\{\varepsilon_i = \pm\varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}.$$

Partitions non croisées $NC_D(n) := NC_B(n)$ avec les propriétés suivantes:

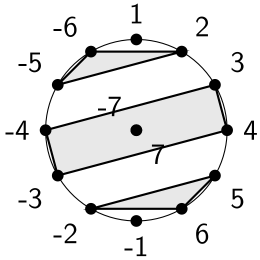
- On utilise pas un $2n$-gon mais un $(2n-2)$-gon qui a des étiquettes $[\pm(n-1)]$. Aussi, on ajoute un sommet dans le centre avec les deux étiquettes n et $-n$.

Mais ça suffit pas! Il faut aussi changer la définition de "non croisé": On dit que P_i et P_j sont **non croisés** si l'enveloppe convexe de l'un ne contient pas un sommet de l'enveloppe convexe de l'autre. (sauf si $\{P_i, P_j\} = \{\{n\}, \{-n\}\}$)

Un exemple d'une partition non croisée pour D_n

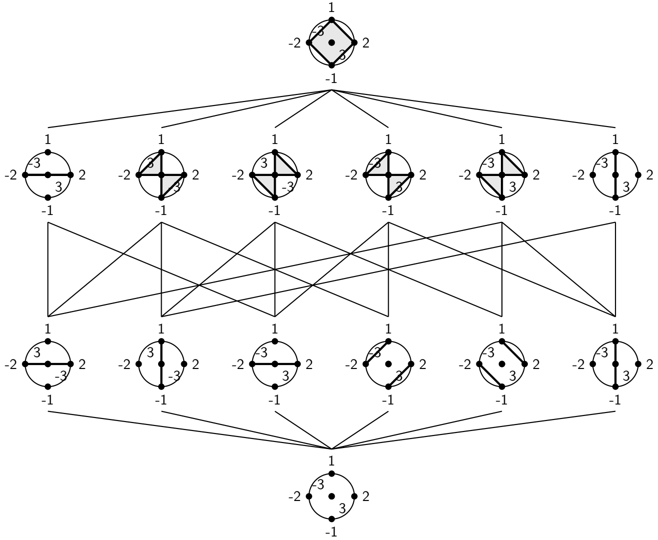
Soit D_7:

$$\mathcal{P} = \{\{2, -5, -6\}, \{-2, 5, 6\}, \{3, -3, 4, -4, 7, -7\}, \{1\}, \{-1\}\}$$
$$\{\varepsilon \in \mathbb{R}^7 \mid \ \varepsilon_2 = -\varepsilon_5 = -\varepsilon_6, \ \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_7 = 0\}$$



Le treillis associé aux partitions non croisées de type D_n

Exemple $NC_D(3)(\cong NC(D_3) \cong NC(A_3))$



D_n isomorphisme

Théorème (Athanasiadis, Reiner, 2004)

Il existe un isomorphisme de posets entre $NC_D(n)$ et $NC(D_n)$.

Merci =)

Particulièrement à Pauline pour l'aide, et Stéphanie pour le poème.