p119
The symmetric group
Bruce E. Sagan

Le Jeu de Taquin de Schützenberger

① Définitions

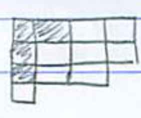
Partition : $\lambda \vdash n$ $(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_k)$ tq $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$
et $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = n$.

Diagramme de Ferrer de λ
Représentation de λ par un tableau à λ_i cases dans la $i^{ème}$ ligne (notation anglophone) de haut en bas.

Tableau standard
Remplissage avec des entiers de 1 à n croissant sur les lignes et les colonnes.

Tableau gauche soient λ et μ deux partitions tq $\mu \subseteq \lambda$
Portion $\lambda/\mu = \{ c \mid c \notin \mu, c \in \lambda \}$

ex : $\mu = 4431$ et $\lambda = 211$



$\rightarrow$ μ/λ

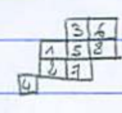


Tableau gauche standard
lignes et col croissantes.

Rappel (Stéphanie)
Bijection entre les permutations et les paires de tableaux standard de même forme de taille n.
$(\sigma \in S_n)$ $\sigma \xrightarrow{RS} (P, Q)$ où P, Q sont de forme $\lambda \vdash n$

② Jeu de Taquin

But: Déplacer les cases d'un tableau pour en obtenir un autre, définissant ainsi une relation d'équivalence.

Glissement : Soit λ/μ un tableau gauche standard. (T)

① Choisir une case c pouvant être ajoutée au tableau T
ie tel que $T \cup \{c\}$ soit un tableau gauche. (+ côté commun)

② <u>Si</u> c est au nord-ouest du diagramme / de T.

- soit c' la case ayant la plus petite valeur entre la case à l'est et celle au sud de c
- glisser c' à la position de c (c est vide)

↻ Recommencer jusqu'à ce qu'il n'y est plus de case ni au sud, ni à l'est de c.

<u>Si</u> c est au sud-est du diagramme / de T

- soit c' la case ayant la plus grande valeur entre la case à l'ouest et celle au nord.
- glisser c' à la place de c.

↻

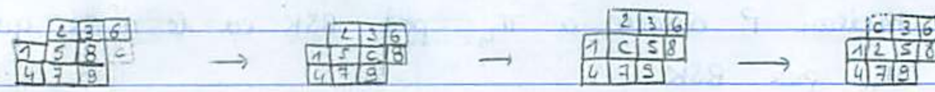
NB: si c est adjacente à une seule case au NO (resp SE), on considère cette case comme la plus grande (resp petite).

Exemple:

couleur

T

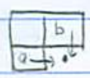
$T' = jdt^c(T)$



T $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $T' = jdt_c(T)$

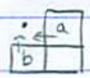
Propriétés

- Conserve la propriété d'être un tableau standard (gauche).



si $a > b$ $\rightarrow$ ✓

si $b > a$ $\downarrow$ ✓



si $a < b$ $\leftarrow$ ✓

si $b < a$ $\uparrow$ ✓

- Soit c case de départ et c' case d'arrivée après glissement alors si on refait un glissement à partir de c', on arrive en c et on retrouve le tableau de départ.

$$jdt_{c'}(jdt^{c}(T)) = T \quad / \quad jdt^{c'}(jdt^{c}(T)) = T.$$

Séquence

Une suite de glissements est une suite de cellules $(c_1, c_2, \ldots)$ valables qui permettent d'obtenir les tableaux $P_0 = P, P_1, P_2, \ldots$ où P_i est obtenu à partir de P_{i-1} en effectuant le glissement à partir de c_i.

On dit que deux tableaux P et Q sont équivalents $(P \cong Q)$ si on peut obtenir Q à partir de P par une suite de glissements.

Equivalence de Knuth.

On note π_P le mot associé au tableau P et en lisant P ligne par ligne de gauche à droite et de bas en haut.

(exemple T : $\pi_T = 479158236$).

On dit que T_1 et T_2 sont Knuth équivalents $T_1 \overset{K}{\cong} T_2$ si le tableau P associé à π_{T_1} par RSK est le même que celui associé à π_{T_2} par RSK.

<u>Théorème</u> $P \cong Q \iff P \overset{K}{\cong} Q$.

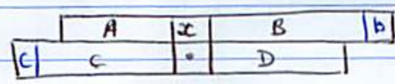
P et Q tableaux standards.

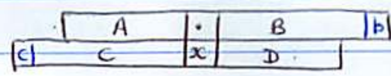
Preuve

$\boxed{\Rightarrow}$ On procède par induction et il suffit alors de montrer l'implication quand P et Q diffèrent d'un mouvement dans un glissement.
En effet, on veut montrer que $P \simeq Q \Rightarrow \pi_P$ et π_Q donnent le même tableau par RSK.

- Si P et Q diffèrent d'un mouvement horizontal $\pi_P = \pi_Q$.
 (la case qui sert au déplacement est considérée vide).

- Si P et Q diffèrent d'un mouvement vertical on considère uniquement les deux lignes concernées par le mouvement. On a alors

$P' =$ 

$Q' =$ 

On procède alors par induction sur le nombre d'éléments dans P' et Q'.
Cas de base : P' et Q' contiennent juste x. $\Rightarrow \pi_{P'} = \pi_{Q'} = x$

1er cas. $|B| > |D|$ alors soit b l'élément le plus à droite de B.
alors $\pi_{P'} = \pi_{P''} b \simeq \pi_{Q''} b = \pi_{Q'}$ par induction
où P'' et Q'' sont les tableaux obtenus de P' et Q' en enlevant b.

2e cas $|C| > |A|$ de la même façon si c est l'élément le plus à gauche de C alors $\pi_{P'} = c\,\pi_{P''} \simeq c\,\pi_{Q''} = \pi_{Q'}$ par induction.

Sauter si pas le temps.

3e cas $|B| = |D|$ et $|A| = |C|$
$A = a_1 \dots a_k$ $\quad B = b_1 \dots b_\ell$ $\quad (k, \ell > 0)$.
$C = c_1 \dots c_k$ $\quad D = d_1 \dots d_\ell$

$a_1 \dots a_k$	•	$b_1 \dots b_\ell$
$c_1 \dots c_k$	•	$d_1 \dots d_\ell$

tableau standard $\Rightarrow$ $a_1 < c_i$ et $a_1 < x$.
$a_1 < d_i$

+ lemme (voir livre)

$\boxed{\Leftarrow}$

Définition / Notation

On note $j(P)$ le tableau droit obtenu à partir du tableau gauche P par une suite arbitraire de glissements de Taquin.

Théorème.

$j(P)$ est unique et est en fait le tableau obtenu par RSK pour π_P.

Preuve

$P \simeq j(P) \Rightarrow P \overset{K}{\cong} j(P)$ donc π_P et $\pi_{j(P)}$ donnent le même tableau par RSK

Or il est facile de voir que comme $j(P)$ est un tableau standard alors RSK de $\pi_{j(P)}$ donne $j(P)$ lui-même.

On peut maintenant montrer que $P \overset{K}{\cong} Q \Rightarrow P \cong Q$.

En effet $P \overset{K}{\cong} Q \Rightarrow \pi_P$ et π_Q ont le même tableau par RSK P'

donc $j(P) = j(Q) = P'$ puisque $j(P)$ est le tableau obtenu par RSK à partir de π_P.

Donc il existe une séquence s telle que $P \xrightarrow{s} j(P) = P'$

et s' telle que $Q \xrightarrow{s'} j(Q) = P'$.

Donc $P \xrightarrow{s} P' \xrightarrow{(s')^{-1}} Q$.

$\Rightarrow P \simeq Q$.