Présentation R-S

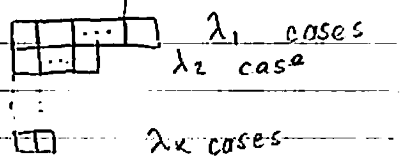
motivation : bcp de résultats en lien avec les représentations du groupe symétrique peuvent être approchés de façon combinatoire.
Le lien entre les 2 passe par les tableaux de Young standard
ici, R-S c'est une façon de lier les permutations avec des tableaux de YOUNG standard.

Plan : 1- Déf
2- Algo de R-S
3- Ombres de Viennot

1- Définitions

• Partage de n ($n \in \mathbb{N}$) : $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ est un partage de n si
$\lambda_i \in \mathbb{N} \quad \forall i$
$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = n$ et $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k$
On note $\lambda \vdash n$ (on dit aussi partition)

• Diagramme de Ferrers (ou de YOUNG) : Le diagramme de Ferrers associé à $\lambda \vdash n$ est



(on va tjs avoir quelque chose comme )

• Tableau de YOUNG de forme $\lambda \vdash n$: obtenu à partir d'un diagramme de YOUNG associé à λ en remplissant les cases avec des entiers.

→ **Standard** : Le diagramme doit être rempli avec des entiers de 1 à n et les entrées doivent être croissantes strictes de G à D et de haut en bas

ex : $\xrightarrow{<}$; $<\downarrow$

1	2	4	7	11	12
3	5	8	10		
6	9				

→ **½-Standard** : Le diagramme doit être rempli par des entiers de 1 à k $(k \leq n)$ et tous doivent être là.
croissant sur les lignes (G à D)
strict. croissant sur les colonnes (H à B)

1	1	2	3
3	4	5	
6			

2 - L'algo de Robinson-Schensted

En gros, bijection entre les permutations et les paires de tableaux de Young standard de m̂ forme.

Soit $\sigma \in S_n$, $\quad \sigma \xrightarrow{R\text{-}S} (P, Q)$ où P, Q sont des tableaux standards de forme $\lambda \vdash n$ (m̂ forme)

On pose $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$ $\qquad x_i = \sigma(i)$

On va construire une suite de tableaux

ajout de 1 ; ajout de 2 ; ajout de n

$(P_0, Q_0) = (\emptyset, \emptyset)\ ,\quad (P_1, Q_1)\ ,\quad (P_2, Q_2)\ ,\ \dots\ ,\quad (P_n, Q_n) = (P, Q)$ ♡

insertion de x_1 ; ins. x_2 ; ins. x_n

Nos déf. de insertion et de ajout font en sorte que $\text{forme}(P_k) = \text{forme}(Q_k)$

P_k, Q_k sont des tableaux partiels : - entrées distinctes
- colonnes & lignes croissantes

INSERTION : Soit P un tableau partiel et x ce qu'on veut insérer.
On considère la 1e ligne de P $:= R_1$

- Si $x > r$ $\forall\, r \in R$ (contenu des cases), on ajoute $\boxed{x}$ à la fin de R_1

- Sinon, on cherche y, le plus petit élmt de R t.q. $y > x$ (de gauche à droite, c'est le 1er)
On remplace y par x $\boxed{y} \longrightarrow \boxed{x}$

- On insert de la m̂ façon y dans la ligne suivante

⋮

- Il va arriver un moment où ce qu'on est rendu à insérer dans une ligne est + grand que toutes les entrées de la ligne, on ajoute la case à la fin et l'algo se termine.

exemple : $P = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 5 & 7 \\ \hline 3 & 8 \\ \cline{1-2}\end{array} \leftarrow 4$ et $x = 4$

$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 & 7 \\ \hline 3 & 8 \\ \cline{1-2}\end{array} \leftarrow 5$

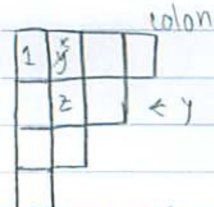
$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 & 7 \\ \hline 3 & 5 \\ \cline{1-2} 8 \\ \cline{1-1}\end{array} := r_4(P)$

$r_x(P)$ c'est P auquel on a inséré x

Lemme : $r_x(P)$ a tjs lignes/colonnes croissantes (P tableau partiel)

preuve : lignes : évident par l'algo

colonnes : insertion de x soit on met $\boxed{x}$ à la fin, donc les colonnes restent les m̂ sauf une de plus $\boxed{x}$.



Sinon, on remplace $y > x$ par x et on insère y ds ligne inf.
On sait que $z > y$ et donc y va être inséré à gauche de $\boxed{z}$ ou dans la case $\boxed{z}$.

<u>Pour construire P_k</u> : $\quad P_k = r_{x_k}(P_{k-1}) \quad (1 \leq k \leq n) \qquad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$

<u>Pour construire Q_k</u> : On ajoute à Q_{k-1}, $\boxed{k}$ au même endroit que la cellule ajouté à P_{k-1} lors de l'insertion de x_k.

On a donc bien forme(P_k) = forme(Q_k) et Q va être standard

P est le tableau d'insertion

Q ——— d'enregistrement

<u>exemple</u> : $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 5 & 7 & 4 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

$$P_i : \quad \emptyset \quad \begin{array}{l} 8 \end{array} \quad \begin{array}{l} 1 \\ 8 \end{array} \quad \begin{array}{l} 1\,5 \\ 8 \end{array} \quad \begin{array}{l} 1\,5\,7 \\ 8 \end{array} \quad \begin{array}{l} 1\,4\,7 \\ 5 \\ 8 \end{array} \quad \begin{array}{l} 1\,2\,7 \\ 4 \\ 5 \\ 8 \end{array} \quad \begin{array}{l} 1\,2\,3 \\ 4\,7 \\ 5 \\ 8 \end{array} \quad \begin{array}{l} 1\,2\,3\,6 \\ 4\,7 \\ 5 \\ 8 \end{array}$$

$$Q_i : \quad \emptyset \quad \begin{array}{l} 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} 1\,3 \\ 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} 1\,3\,4 \\ 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} 1\,3\,4 \\ 2 \\ 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} 1\,3\,4 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{array} \quad \begin{array}{l} 1\,3\,4 \\ 2\,7 \\ 5 \\ 6 \end{array} \quad \begin{array}{l} 1\,3\,4\,8 \\ 2\,7 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

<u>Thm</u> : $\sigma \xrightarrow{R-S} (P, Q)$ définit une bijection entre les éléments de S_n et les paires de tableaux standards de même forme $\lambda \vdash n$.

<u>preuve</u> : On va définir l'inverse $(P, Q) \xrightarrow{S-R} \sigma$

à partir de (P_k, Q_k) on va trouver x_k et (P_{k-1}, Q_{k-1})

$P_{i,j}$:= entrée ds la case (i,j) de P_k

On cherche la cellule (i,j) de Q_k contenant k.

k est la + grande entrée ds Q_k, donc $P_{i,j}$ est le dernier élément à avoir été déplacé durant la construction de P_k

On enlève $\boxed{P_{i,j}}$ de P_k et on va dé-insérer $P_{i,j}$ dans la ligne au-dessus

on va chercher y, la + grande entrée qui est $< P_{i,j}$, on remplace y par $P_{i,j}$.

On répète en dé-insérant y dans la ligne au-dessus

quand $\nexists$ de ligne au-dessus, alors $y = x_k$

ex :

	$\xrightarrow{6}$	$\xrightarrow{3}$	$\xrightarrow{2}$	$\xrightarrow{4}$	$\xrightarrow{7}$	$\xrightarrow{5}$	$\xrightarrow{1}$
P :	1 2 3 6 / 4 7 / 5 / 8	1 2 ~~3~~7 / 4 7 / 5 / 8	1 ~~2~~4 7 / ~~4~~5 / ~~5~~8 / 8	1 ~~4~~5 7 / ~~5~~8 / 8	1 5 7 / 8	1 5 / 8	~~1~~8 / 8
Q :	1 3 4 8 / 2 7 / 5 / 6	1 3 4 / 2 7 / 5 / 6	1 3 4 / 2 / 5 / 6	1 3 4 / 2 / 5	1 3 4 / 2	1 3 / 2	1 / 2

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 5 & 7 & 4 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

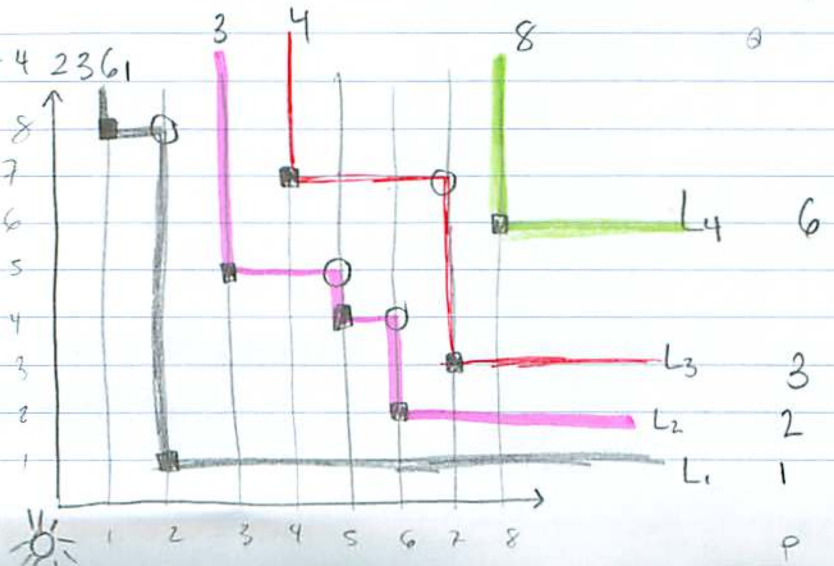
RSK a plein de propriétés amusantes, par exemple

Prop : Si $\sigma \longmapsto (P, Q)$
Alors $\sigma^{-1} \longmapsto (Q, P)$

3- Ombres de Viennot (construction géométrique)

Soit $\sigma = (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n)$
On place une boîte aux coordonnées (i, σ_i)

ex : 8 1 5 7 4 2 3 6 1



On considère les points qui sont dans l'ombre de personne.
(1,8) et (2,1)

La première ligne d'ombre L_1, c'est la ligne "frontière" des ombre combinées des 2 boîtes.
ex: sur graphique
(juste un rayon vertical, un horizontal et des segments de rayons)

Pour faire L_2, on "oublie" L_1 et on refait la même chose.
(3, 5) (5, 4) et (6, 2)

Posons $x_{L_i} :=$ coordonnée en x du rayon vertical de L_i
$y_{L_i} :=$ ——— y ——— horizontal de L_i

ex. sur graphique
(est-ce qu'on remarque quelque chose) ?

$$P_{1,j} = y_{L_j} \quad \forall j$$
$$Q_{1,j} = x_{L_j}$$

Lemme : Soit le diagramme d'ombres de $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n$
Supposons que la ligne verticale $x=k$ intersecte i lignes d'ombres
Soit y_j la coordonnée y du point le plus pas de l'intersection de $x=k$ avec L_j.
Alors, La 1e rangée de P_k, $R_1 = y_1 y_2 \cdots y_i$
(idée dans le graphique)

preuve : Induction sur k.
$k=0$ ok
On assume que c'est vrai pour $x=k$ donc $R_{1_k} = y_1 y_2 \cdots y_i$

cas 1 : $x_{k+1} > y_i$ (y_i est sur L_i qui est la dernière ligne d'ombre)
Alors la boite $(k+1, x_{k+1})$ nous donne une nouvelle ligne d'ombre
(par ex entre $x=3$ et $x=4$)
aucune des valeurs $y_1, \cdots, y_i$ change et on a une nouvelle intersection

$y_{i+1} = x_{k+1}$
mais comme $x_{k+1} > y_i$ et $R_1 = y_1 y_2 \cdots y_i \boxed{x_{k+1}}$ ok ✓

cas 2 : Si $y_1 < \cdots < y_{j-1} < x_{k+1} < y_j < \cdots < y_i$ (☆)

Alors $(k+1, x_{k+1})$ est ajouté à la ligne L_j ($x=4$ et $x=5$)
Donc $y_j' = x_{k+1}$ tous le reste reste inchangé

Par (☆) et R_1, on doit avoir que la 1e rangée de P_{k+1} est $y_1 y_2 \cdots y_{j-1} \underbrace{x_{k+1}}_{y_j'} y_{j+1} \cdots y_i$ ok ✓

On peut donc lire les ombres de gauche à droite.
chaque ligne verticale $x=k$ intersecte les L_j soit en

- Rayon vertical ~ élément placé à la fin
- segment vertical ~ élément case $(1,j)$ a été changé
- unique point ~ élément inchangé

Corollaire : Si $\sigma \longrightarrow (P, Q)$ et qu'on a les lignes d'ombre L_j
Alors $\forall j$ $P_{1,j} = y_{L_j}$ et $Q_{1,j} = x_{L_j}$

preuve : Pour P, on vient de le faire

Pour Q, l'entrée k est ajoutée dans $\square_{1,j}$ quand x_k est > que tous les éléments de la 1e ligne de P_{k-1}.
On a vu dans le dernier lemme que ça arrive exactement quand la ligne $x=k$ intersecte L_j en un rayon vertical
donc $y_{L_j} = k = Q_{1,j}$

On a la 1e ligne, mais pour le reste?

On considère les coins ┐ dans les L_i (o)

Si o a coordonnées (k, x'), alors x' a été remplacé dans la 1e ligne lors de l'insertion de x_k

(voir graphique)

Donc, les O correspondent aux éléments insérés ds la 2e ligne pendant la construction de P.