Probabilité et permutations : des problèmes concrets!

Nadia Lafrenière

16 juillet 2014

Résumé

Cet exposé vise à présenter quelques problèmes de probabilités qui se résolvent plutôt simplement en utilisant la théorie des permutations. Peut-être même apprendrez-vous des stratégies pour vous simplifier la vie !

1 L'échange de cadeaux

En famille ou entre ami-e-s, vous souhaitez faire un échange de cadeaux. Vous choisissez de procéder par pige pour savoir à qui chaque personne donnera un cadeau. Le problème est apparent : il est fort probable que quelqu'un pige son propre nom. Pour garder le plus grand secret, la pige recommence du début lorsqu'une telle situation se produit.

Intuitivement, si le nombre de participantes et de participants N est assez grand, la probabilité de rejet est élevée et la façon de procéder n'est peut-être pas optimale.

On cherche à connaître, sachant N, le nombre de piges nécessaires à la résolution du problème.

1.1 Approche 1 : Un conditionnement sur les probabilités

Une première approche correspond à analyser le déroulement de la pige. Elle suppose qu'après chaque tirage, on regarde le résultat et qu'on analyse la probabilité de rejet de la pige. Voici un exemple de l'application de la méthode :

Exemple. $N = 3$ *: Alice, Bob et Charlie pigent.*

Alice pige la première. Il y a une chance sur trois qu'elle pige son nom ($\mathrm{Prob}(A - A) = \frac{1}{3}$*).*

Il y a également une chance sur trois qu'elle pige le nom de Bob. Sachant cela, Bob a une chance sur deux de piger Alice ce qui fait que Charlie tire son propre nom : $\mathrm{Prob}(A - B \cap C - C) = \frac{1}{6}$.

Finalement, si Alice tire le nom de Charlie (une chance sur trois), Bob a ensuite une chance sur deux de tirer son propre nom : $\mathrm{Prob}(A - C \cap B - B) = \frac{1}{6}$.

En somme, il y a 2 chance sur trois qu'on doive recommencer.

Toutefois, cette méthode est longue et se complique rapidement lorsque N croît. De plus, en procédant de la sorte, on introduit une fausse relation de dépendance. En fait, ici le problème ne dépend pas de l'ordre dans lequel les ami-e-s tirent les noms, mais seulement du résultat de la pige. Le conditionnement sur les probabilités est donc fortuit.

1.2 Petite introduction aux dérangements

Définition 1. *Un* dérangement *est une permutation sans point fixe.*

Notation. *On note le nombre de dérangements de* $\mathcal{S}_n$ *par* D_n.

Exemple. *Les dérangements de* $\mathcal{S}_3$ *sont* 312 *et* 231.

Exemple. *Le groupe* $\mathcal{S}_4$ *compte 9 dérangements :*
$\{2143, 2341, 2413, 3142, 3412, 3421, 4123, 4312, 4321\}$.

Compter les dérangements

Exercice 1. *Montrer les propriétés suivantes sur le nombre de dérangements :*

1. $\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} D_k = N!$, $N \geq 0$;
2. $D_{k+1} = k(D_{k-1} + D_k)$, $k \geq 1$;
3. $D_k = kD_{k-1} + (-1)^k$, $k \geq 1$.

Pour aider à la réalisation des exercices, il est nécessaire de mentionner que l'unique élément de $\mathcal{S}_0$ n'a pas de point fixe, d'où $D_0 = 1$.

1.3 Approche 2 : Les dérangements pour résoudre le problème de la pige

Revenons à notre problème de la pige entre ami-e-s. Si on a vu qu'il était plutôt ardu à résoudre avec les probabilités conditionnelles, il n'en est rien lorsqu'on compare notre problème avec la définition d'un dérangement. La pige correspond en effet à une permutation de N éléments et les piges qui ne sont pas rejetées sont exactement les dérangements ! Comme il existe plusieurs façons de compter les dérangements parmi les permutations, il ne suffit que de choisir laquelle on préfère.

On peut donc imaginer que le problème de la pige se résout sans rejet avec une probabilité $\frac{D_N}{N!}$. En utilisant les propriétés de la loi géométrique, le nombre d'essais nécessaires avant d'obtenir un tirage satisfaisant a pour espérance $\frac{N!}{D_N}$.

En utilisant les propriétés démontrées à l'exercice 1, on peut montrer que

$$\frac{D_N}{N!} = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

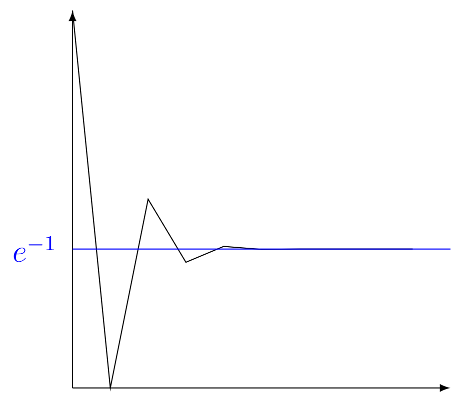
En effet, en utilisant les propriétés 2 et 3 de l'exercice, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{D_N}{N!} &= \frac{ND_{N-1} + (-1)^N}{N!} \\
&= \frac{D_{N-1}}{(N-1)!} + \frac{(-1)^N}{N!} \\
&= \frac{(N-1)D_{N-2} + (-1)^{N-1}}{(N-1)!} + \frac{(-1)^N}{N!} \\
&= \frac{D_{N-2}}{(N-2)!} + \frac{(-1)^{N-1}}{(N-1)!} + \frac{(-1)^N}{N!} \\
&= \dots \\
&= \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k!},
\end{aligned}$$

ce qui, on le devine en regardant le développement en série de e^x, tend plutôt rapidement vers

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1}.$$

D'où la probabilité de réussir la pige du premier coup est donnée par la courbe suivante, en fonction du nombre N :



Exemple. *Si on revient au problème exprimé plus tôt de la pige entre Alice, Bob et Charlie, on trouve que les piges possibles sont :*

Alice	*Bob*	*Charlie*	*Dérangement ?*
Alice	*Bob*	*Charlie*	*Non*
Alice	*Charlie*	*Bob*	*Non*
Bob	*Alice*	*Charlie*	*Non*
Bob	*Charlie*	*Alice*	*Oui*
Charlie	*Alice*	*Bob*	*Oui*
Charlie	*Bob*	*Alice*	*Non*

et il n'y a donc qu'un tiers de probabilité de réussir la pige.

2 Les rendez-vous symétriques

Alice et Bob se baladent dans un centre commercial lorsqu'il et elle se perdent de vue. La position dans laquelle les ami-e-s se trouvent est délicate : Elle et il ne peuvent communiquer et ne se sont pas donné de lieux de rendez-vous si une telle chose se produisait. Quelle stratégie utiliser alors pour se retrouver le plus rapidement possible ?

2.1 Poser le problème explicitement

Il y a n lieux possibles, étiquetés par les entiers de 1 à n. Les étiquettes diffèrent par une permutation aléatoire (uniforme) π et leur position initiale est également aléatoire (uniforme). À chaque étape, Alice et Bob peuvent se déplacer vers n'importe laquelle des n positions. Comment minimiser l'espérance de temps avant qu'il et elle ne se trouvent dans le même lieu ?

2.2 La solution efficace : Un rendez-vous asymétrique

Si les protagonistes se sont entendu-e-s au préalable sur une stratégie, ce devrait être celle-ci : Une personne attend à un endroit et l'autre se déplace. Évidemment, on suppose ici qu'Alice et Bob savent qui attend et qui se déplace. En particulier, si les deux attendent, leur probabilité de rencontre est nulle, à moins de partager la même position initiale.

2.2.1 Calcul de l'espérance du temps nécessaire pour les retrouvailles

L'expérience correspond à un tirage sans remise, en supposant que si Alice attend, Bob ne visitera pas deux fois un endroit où Alice n'est pas. Si Alice et Bob n'ont pas la même position initiale, l'espérance se calcule ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) =& \sum_{x=0}^{n} \mathrm{Prob}(X = x) \cdot x \\
=& \frac{1}{n-1} \cdot 1 + \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2} \cdot 2 + \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{1}{n-3} \cdot 3 + \dots \\
=& \sum_{x=1}^{n-1} \frac{x}{n-1} \\
=& \frac{n}{2}.
\end{aligned}$$

Toutefois, cette solution n'est pas toujours possible, ce qui nous amène au problème des rendez-vous *symétriques.*

2.3 Le problème général : les rendez-vous symétriques

Supposons maintenant qu'Alice et Bob ne se soient pas entendu-e-s au préalable sur la personne qui devait rester immobile. Intuitivement, Alice et Bob s'activeraient et partiraient à la recherche l'un-e de l'autre. On serait naturellement tenté-e-s de savoir s'il existe une solution plus optimale.

2.3.1 La solution naïve

Pour comparer, on devrait établir l'espérance du nombre de tirages nécessaires pour la solution tout juste énoncée.

Comme l'événement correspond à une chaîne d'événements indépendants (la probabilité que les deux personnages se trouvent au même endroit), la distribution de probabilité associée est une loi uniforme de paramètre $\frac{1}{n}$. On va donc en moyenne parcourir n étapes avant de se retrouver.

2.3.2 Améliorer la solution : Une idée d'Anderson et Weber

Anderson et Weber ont proposé en 1990 une solution plus efficace à ce problème. Elle va comme suit :

1. À chaque étape, lancer une pièce de monnaie biaisée :
   - Avec probabilité θ, on choisit une permutation σ de manière aléatoire (uniforme) et on visite successivement les endroits numérotés $\theta(1), \theta(2), \ldots, \theta(n)$.
   - Avec probabilité $1-\theta$, on reste sur place pour n temps.
   - On optimise sur θ.

La probabilité qu'ont Alice et Bob de se retrouver se calcule de la façon suivante :

- Si les deux se promènent (probabilité θ^2, par indépendance des tirages) et qu'elle et il ont choisi respectivement les permutations σ_A et σ_B, leur probabilité de retrouvailles dépend du nombre de points fixes de $\sigma_A^{-1}\pi\sigma_B$. Si $\sigma_A^{-1}\pi\sigma_B$ possède m points fixes, elle et il se retrouveront à chacun des temps avec une probabilité donnée par une loi uniforme de paramètre $\frac{m}{n}$. De plus, lorsque n est grand, une permutation de $\mathcal{S}_n$ a m points fixes avec probabilité $\frac{1}{e \cdot m!}$. En effet, pour compter la probabilité de m points fixes dans une permutation de $\mathcal{S}_n$, on compte les façons de disposer les points fixes (il y en a $\binom{n}{m}$) et on exige qu'aucune des autres positions ne soit fixée. D'où le nombre de permutations avec m points fixes est

$$\binom{n}{m} D_{n-m} = \frac{n!}{m!} \frac{D_{n-m}}{(n-m)!} \to \frac{n!}{m!e}.$$

On peut donc calculer la probabilité que la rencontre n'ait pas lieu avant le j-ième temps. C'est la probabilité que les points fixes ne se trouvent pas dans les $j-1$ premières positions :

$$q_j = \frac{\binom{n+1-j}{m}}{\binom{n}{m}}.$$

On peut ainsi calculer l'espérance du temps nécessaire pour la première rencontre :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n+1-m} q_j =& \binom{n}{m}^{-1} \sum_{j=1}^{n+1-m} \frac{(n+1-j)!}{m!(n+1-m-j)!} \\ =& \frac{(n-m)!}{n!} \sum_{k=0}^{n-m} \frac{(k+m)!}{k!} \\ =& \frac{(n-m)!}{n!} \frac{(n+1)!}{(m+1)(n-m)!} \\ =& \frac{n+1}{m+1}.\end{aligned}$$

D'où, s'il y a au moins un point fixe, on a comme espérance de temps nécessaire :

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{e^{-1}}{m!} \frac{n+1}{m+1} = \frac{n+1}{e} \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{(m+1)!},$$

ce qui, lorsque n est grand, tend vers $\frac{n+1}{e}(e-2)$.

— Si un-e des deux marche et l'autre attend (probabilité $2\theta(1-\theta)$), la probabilité de retrouvailles est la même que pour un rendez-vous asymétrique (ou qu'un tirage sans remise), $\frac{n}{2}$.

— Si les deux sont arrêté-e-s, la probabilité de retrouvailles est nulle et après n temps, on procède à un nouveau tirage. Cette même probabilité s'applique aussi dans les cas où $\sigma_A^{-1}\pi\sigma_B$ n'a pas de point fixe.

On définit la variable t comme le temps nécessaire aux retrouvailles. Ainsi, l'espérance de temps nécessaire pour qu'Alice et Bob se rejoignent est donnée par :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(t,n) = \theta^2 \frac{e-2}{e}(n+1) \\ + \theta(1-\theta)n \\ + \left(\frac{\theta^2}{e} + (1-\theta)^2\right) \cdot (\mathbb{E}(t+n)).\end{aligned}$$

On optimise sur θ :

$$\frac{\mathbb{E}(t,n)}{n} = \frac{\frac{\theta^2(e-2)}{e} + \theta(1-\theta) + \left(\frac{\theta^2}{e} + (1-\theta)^2\right)}{2\theta - \theta^2(1+\frac{1}{e})}$$

et on trouve la valeur de θ qui minimise la fonction :

$$\theta = 0.753, \quad \mathbb{E}(t) = 0.829n.$$

2.3.3 Améliorer encore la solution

Alors qu'il était su depuis 1990 qu'on ne pouvait trouver de solution dont l'espérance serait inférieure à $\frac{n}{2}$, il est toujours d'actualité de chercher des solutions symétriques (au sens où les deux personnes se comportent de la même façon). Récemment, des chercheurs ont trouvé une solution permettant des retrouvailles en un temps moyen $0.548n$ [2], mais la solution est possiblement moins amusante à présenter.

Références

[1] E.J. ANDERSON et R.R. WEBER. The rendezvous problem on discrete locations, Journal of Applied Probability, vol. 28, 1990, pp. 839-851.

[2] C. MOORE. Les rendez-vous symétriques, AofA 2014, Paris, 2014.