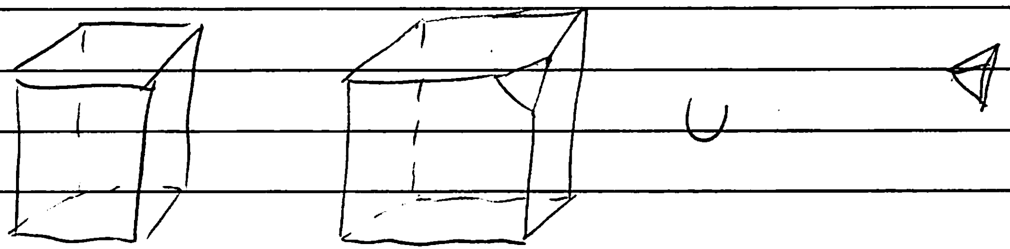
Équidécomposition de polyhèdres

On introduit sur l'ensemble $\mathcal{E}$ des polyhèdres dans $\mathbb{R}^3$ une relation d'équivalence :

On dit que $P_1, \dots, P_k \in \mathcal{E}$ est une décomposition de $P \in \mathcal{E}$, noté $P = P_1 + \dots + P_k$, si

$$P = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_k$$

et les P_i [illegible] s'intersectent seulement en leurs faces :



$P = P_1 + P_2$

On dira que P et Q sont équidécomposables, noté $P \sim Q$, si

$$P = P_1 + \dots + P_k \quad , \quad Q = Q_1 + \dots + Q_k$$

avec P_i et Q_i isométriques $\forall i \in \{1, \dots, k\}$.

C'est clairement une relation d'équivalence. Notons que l'on a un invariant évident pour les classes [illegible] d'équidécomposabilitées : le volume : si $P = P_1 + \dots + P_k$, alors

$$Vol(P) = Vol(P_1) + \dots + Vol(P_k).$$

Donc si $P \sim Q$, $Vol(P) = Vol(Q)$.

La [illegible] question est la suivante :

Est-ce que le volume est un invariant total ?

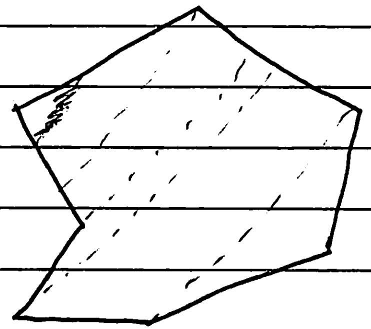
i.e. si $Vol(P) = Vol(Q)$, est-ce que $P \sim Q$?

Regardons d'abord le cas des polygônes, en 2D :

Prop : En 2D, la réponse est oui, i.e si ~~P~~ $\text{aire}(P_1) = \text{aire}(Q)$, alors $P \sim Q$:

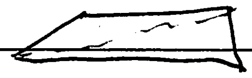
preuve :

Lemme 1 : Tout polygone P se décompose en triangles :

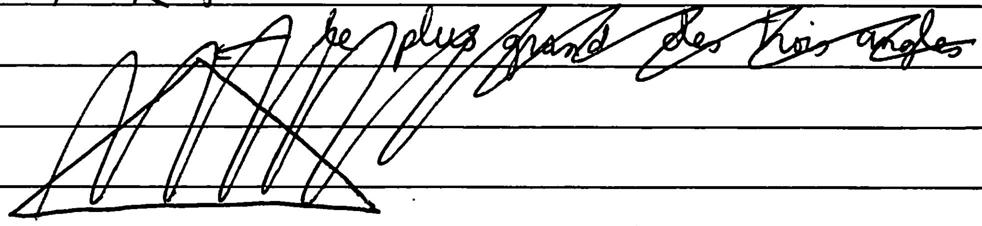


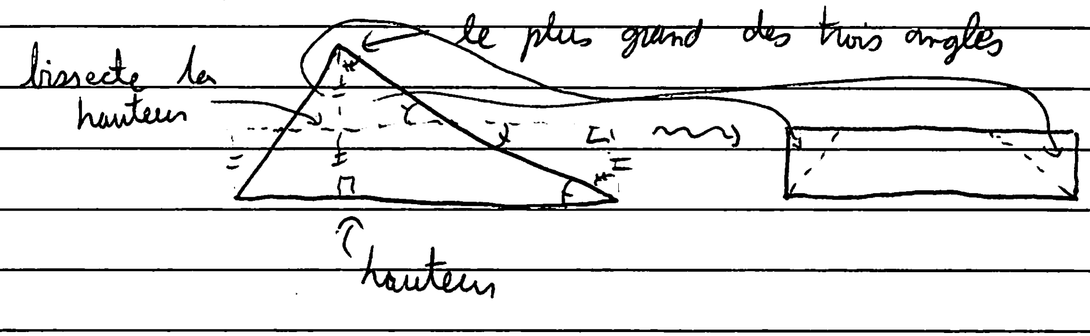
la pente des droites pointillées est différente des pentes des arêtes de P.

on obtient des triangles et des trapézoïdes, que l'on peut décomposer en 2 triangles :



Lemme 2 : Pour tout triangle T, existe un rectangle R tel que $T \sim R$:



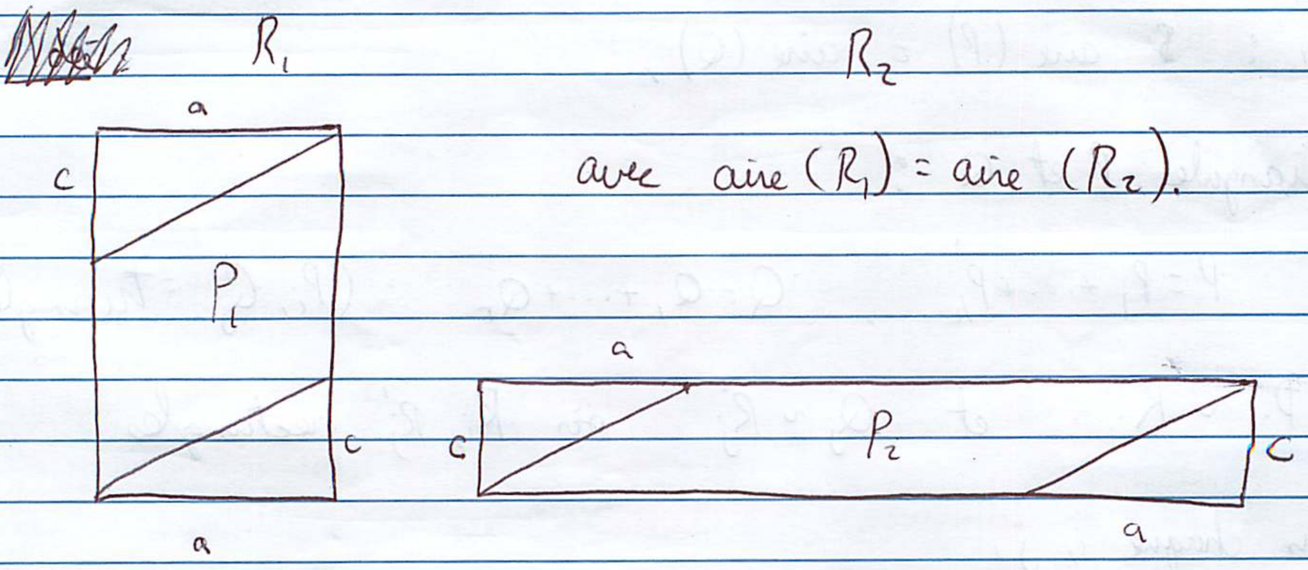


Lemme 3 Deux rectangles de même aires sont toujours équidécomposables :

~~Supposons que les bases des rectangles satisfassent~~

~~$$b_1 < b_2 < 2b_1 .$$~~

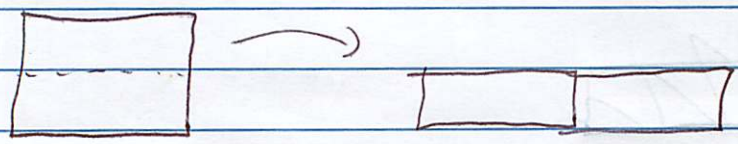
~~On peut faire ça en doublant la base de l'un tout en divisant sa hauteur par 2.~~



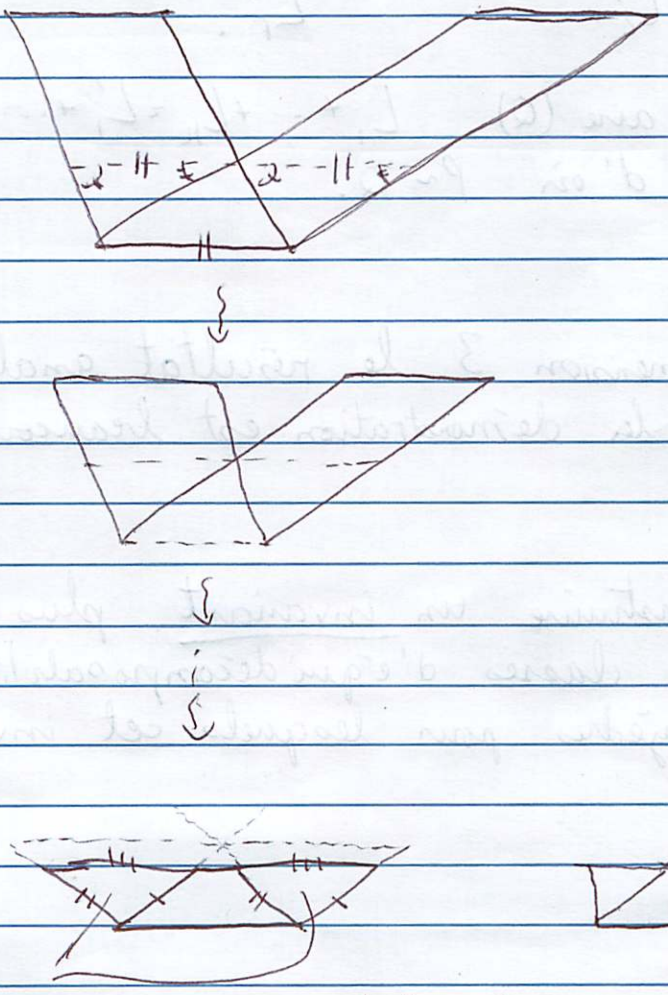
avec aire (R_1) = aire (R_2).

alors aire (P_1) = aire (P_2) et base $(P_1) = \sqrt{a^2+c^2}$ = base (P_2)

NB: Pour arriver à ce dessin, on peut "allonger" R_2 en faisant



sous-lemme: Deux parallélogrammes de m̂ base et hauteur sont équidécomposables :



ces 2 Δ sont iso à dilatation près mais ont la m̂ aire … donc iso □

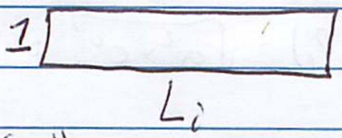
Ainsi : Si aire (P) = aire (Q),

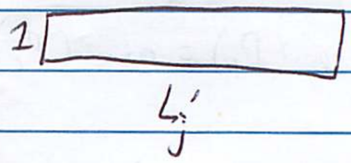
1) triangule P et Q ;

$P = P_1 + \dots + P_k$, $Q = Q_1 + \dots + Q_r$ (P_i, Q_j = triangles)

2) $P_i \sim R_i$ et $Q_j \sim R'_j$ où R_i, R'_j rectangles

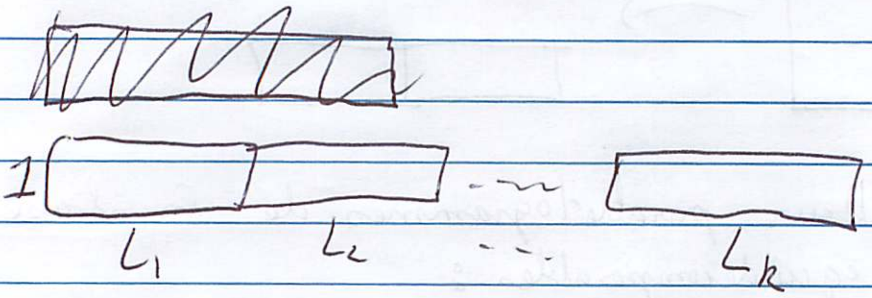
3) Pour chaque i, j,

$R_i \sim$ 

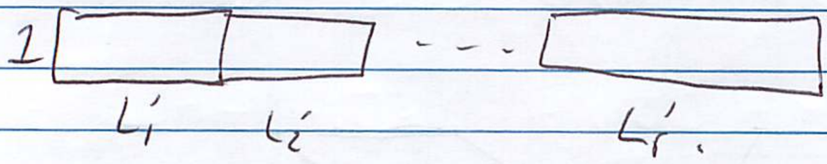
$R_j \sim$ 

où L_i (L'_i) = aire(R_i) (R'_i)

4) Donc

$P \sim$  $= R$

et

$Q \sim$  $= R'$

Puisque aire(P) = aire(Q), $L_1 + \dots + L_k = L'_1 + \dots + L'_r$ et donc $R \equiv R'$, d'où $P \sim Q$. ▨

On verra qu'en dimension 3 le résultat analogue est *faux* et qu'en fait la démonstration est beaucoup plus élégante.

L'idée est de construire un *invariant* plus fin que le volume sur les classes d'équidécomposabilité puis d'exhiber deux polyèdres pour lesquels cet invariant diffère.

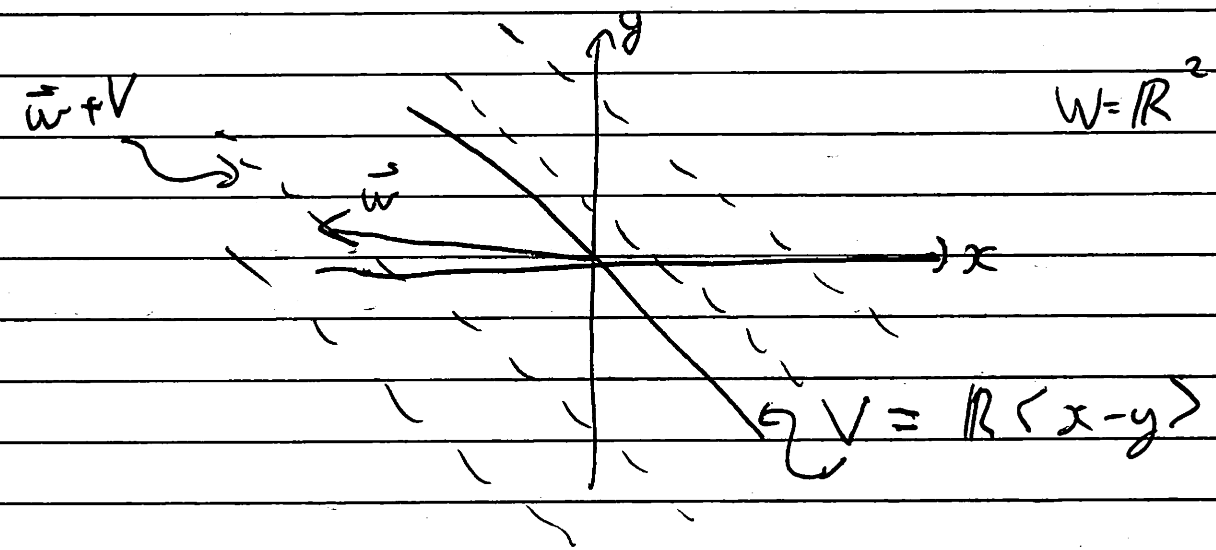
Rappels algébriques

Pour construire l'invariante de Dehn, on a besoin de quelques notions d'algèbre.

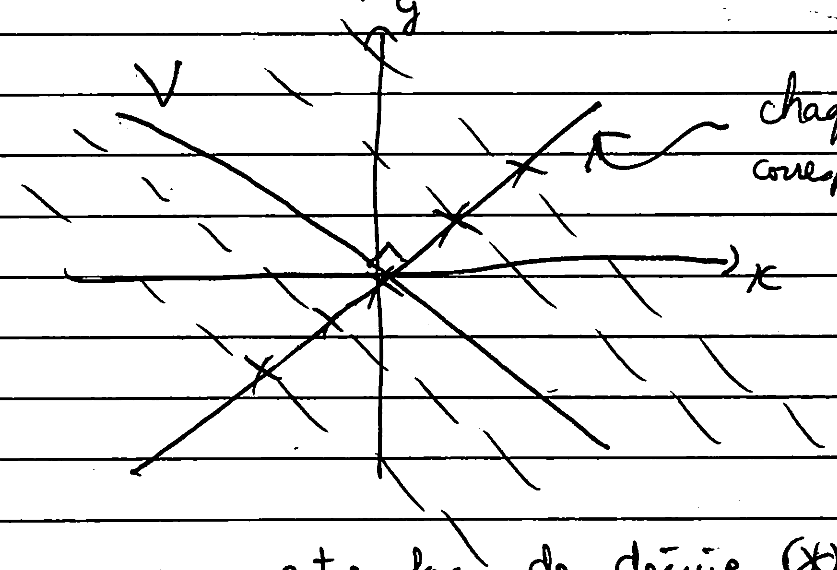
D'abord, si W est un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$, et si $V \subset W$ est un sous-espace, le quotient

$$W/V = \{ w + V \mid w \in W \} \qquad (*)$$

est naturellement un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On peut le voir comme l'espace des translatés de V :



Ou encore, si $\dim W < \infty$, en introduisant un produit scalaire, on peut voir W/V comme V^* :



chaque pt de cette droite correspond à un translaté de V.

Finalement, ~~on peut voir W/V comme~~ une autre façon de décrire (*) est comme le quotient

$$W/V = W/\sim$$

où on identifie deux pts de W w_1 et w_2 si $w_1 - w_2 \in V$. ie W/V est l'ensemble des $w \in W$ mais avec $w_1 = w_2$ si $w_1 - w_2 \in V$.

Par exemple :

$\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel mais aussi un $\mathbb{Q}$-espa vectoriel.

Le sous-ensemble $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ n'est pas un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel mais c'est un sous-$\mathbb{Q}$-espa vectoriel.

On peut donc former le quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$.

On considérera plus tard le quotient

$$\mathbb{R}/_{\pi\mathbb{Q}}$$

où $\pi\mathbb{Q} = \{\pi . q \mid q \in \mathbb{Q}\}$ est le $\mathbb{Q}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ (vu comme un $\mathbb{Q}$-espace vect) consistant des multiples rationnels de π.

Par exemple, i) $[\pi/2] = [0]$ dans $\mathbb{R}/_{\pi\mathbb{Q}}$ car $\pi/2 \in \pi\mathbb{Q}$.

ii) $[\pi . \sqrt{2}] \neq [\pi]$ dans $\mathbb{R}/_{\pi\mathbb{Q}}$ puisque $\sqrt{2}\pi - \pi = (\sqrt{2}-1)\pi \notin \mathbb{Q}\pi$.

Produit tensoriel :

Étant donné deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels V et W, on forme un nouvel espace

$$V \underset{\mathbb{K}}{\otimes} W$$

appelé le produit tensoriel (sur $\mathbb{K}$) de V et W.

Pour nos besoins, il suffit de décrire les propriétés de cet espace (on prend son existence pour aquis).

Les éléments :

$$V \otimes_{\mathbb{K}} W = \left\{ \text{combinaisons linéaires finies à coéfficients dans } \mathbb{K} \text{ de la forme } \sum_{i=1}^{m} a_i v_i \otimes w_j \;\middle|\; a_i \in \mathbb{K},\ v_i \in V,\ w_i \in W \right\}$$

Les relations : On étend les relations suivantes par linéarité :

i) $(v_1+v_2)\otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w \qquad \forall v_1, v_2 \in V,\ w \in W$

ii) $v \otimes (w_1+w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2 \qquad \forall v \in V,\ w_1, w_2 \in W$

iii) $(av)\otimes w = a(v \otimes w)$
$\quad = v \otimes (aw) \qquad \forall a \in \mathbb{K},\ v \in V,\ w \in W.$

En brefs, $V \otimes_{\mathbb{K}} W$ est l'espace des comb. lin. de couples $(v,w) \in V \times W$ où l'on impose les relations ci-dessus.

On peut penser aux application bilinéaires

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

qui par définition satisfont

$$\varphi(au,v) = a\varphi(u,v) = \varphi(u,av)$$

et

- $\varphi(u_1+u_2, v) = \varphi(u_1,v) + \varphi(u_2,v)$
- $\varphi(u, v_1+v_2) = \varphi(u,v_1) + \varphi(u,v_2)$.

En fait, ~~les~~ ces applications bilinéaires $\mathrm{Bilin}(\mathbb{R}\times\mathbb{R};\mathbb{R})$ sont isomorphes au dual du produit tensoriel $\mathbb{R}\otimes\mathbb{R}$:

$$\mathrm{Bil}(\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}) \cong (\mathbb{R}\otimes\mathbb{R})^*$$

~~On est maintenant en mesure de définir l'invariant de Dehn, qui à~~

Exemples de manipulation :

- $v\otimes 0 = v\otimes(0.w)$ pour n'importe quel w

  $= 0\,(v\otimes w)$ par $\mathbb{K}$-linéarité

  $= 0$

  $\left(= (0v)\otimes w\right)$

- Dans $\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{R}$:

  $\lambda(\pi\otimes 1) = \pi\otimes\lambda$ où λ est n'importe quel réel,

  $= \pi(1\otimes\lambda)$

  $= \pi\lambda(1\otimes 1)$

  $= (\pi\lambda)\otimes 1$, etc....

On est maintenant en mesure de définir l'invariant de Dehn, qui à une classe d'équidécomposabilité de polyèdres dans $\mathbb{R}^3$ associe un élément du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel

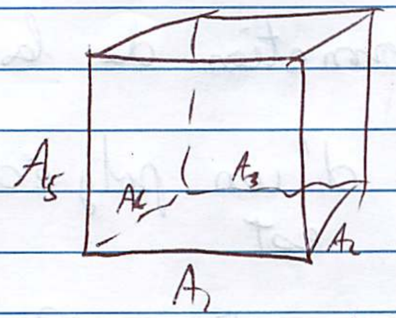
$$\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Q}}\left(\mathbb{R}/\pi\mathbb{Q}\right).$$

NB : Les éléments de cet espace sont des (classes d'équivalences de) couples $(\lambda,[\mu])$ où $[\mu]$ désigne la classe de $\mu\in\mathbb{R}$ ~~de~~ modulo $\pi\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Q}$. (par exemple $[\pi]=[\frac{p\pi}{q}]=0\in\mathbb{R}/\pi\mathbb{Q}$ etc...).

Donc par exemple

i) $2\otimes([\pi/2]) = 2\otimes 0 = 0$

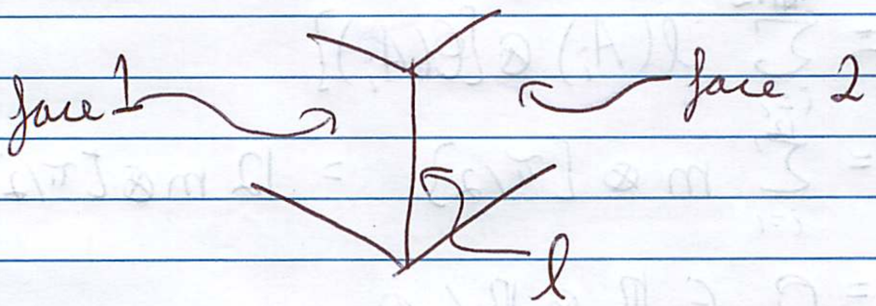
Déf: Soit P un polyèdre avec arêtes $A_1, \dots, A_k$.



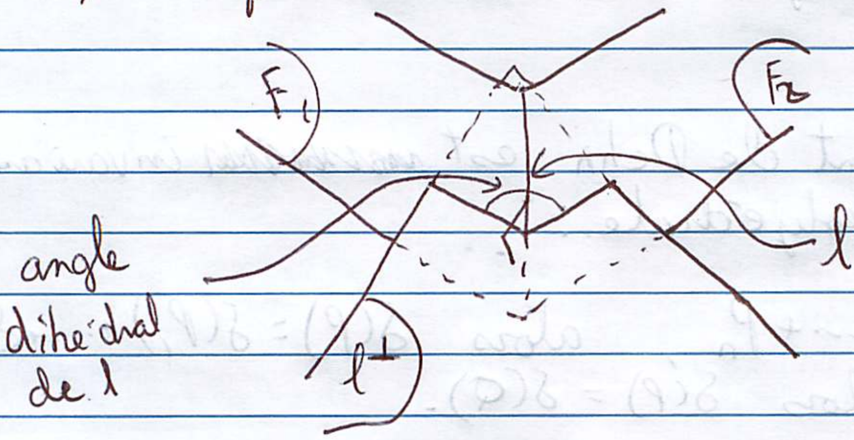
Chaque arête possède une longueur et un "angle dihédral"

L'angle dihédral est obtenu de la façon naturelle :

À une arête l correspond deux faces :

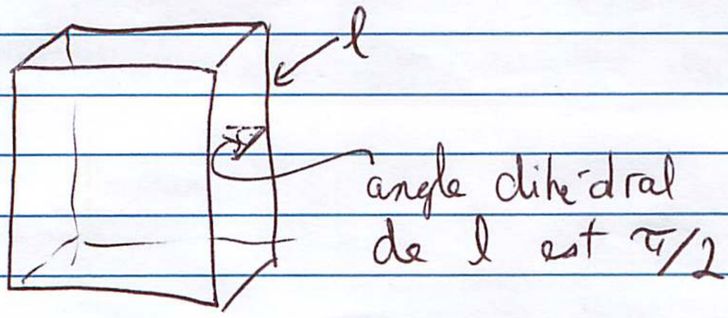


On coupe ces deux faces par le plan orthogonal à l, ce qui crée un "coin" dans ce plan :



Alors l'angle dihédral est l'angle de ce "coin" qui se calcule dans le plan $l^\perp$.

ex: Sur le cube :



Notons l'angle dihédral d'une arête A_i par $\Theta(A_i)$ et la longueur de A_i par $l(A_i)$.

On organise cette information de la façon suivante :

L'invariant de Dehn d'un polyèdre P ayant pour arêtes $A_1, \ldots, A_k$ est

$$\delta(P) = \sum_{i=1}^{k} l(A_i) \otimes [\Theta(A_i)] \in \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Q}$$

Ex : Pour un cube de volume $V\ m^3$, i.e. de côtés de longueur m, on a

$$\delta(\text{cube}) = \sum_{i=1}^{12} l(A_i) \otimes [\Theta(A_i)]$$

$$= \sum_{i=1}^{12} m \otimes [\pi/2] = 12\, m \otimes [\pi/2]$$

$$= 0 \in \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}/\pi\mathbb{Q}.$$

car $\pi/2$ est multiple rationnel de π.

Proposition : L'invariant de Dehn est invariant par décomposition polyédrale.

i.e. si $P = P_1 + \cdots + P_n$, alors $\delta(P) = \delta(P_1) + \cdots + \delta(P_n)$. donc si $P \sim Q$, alors $\delta(P) = \delta(Q)$.

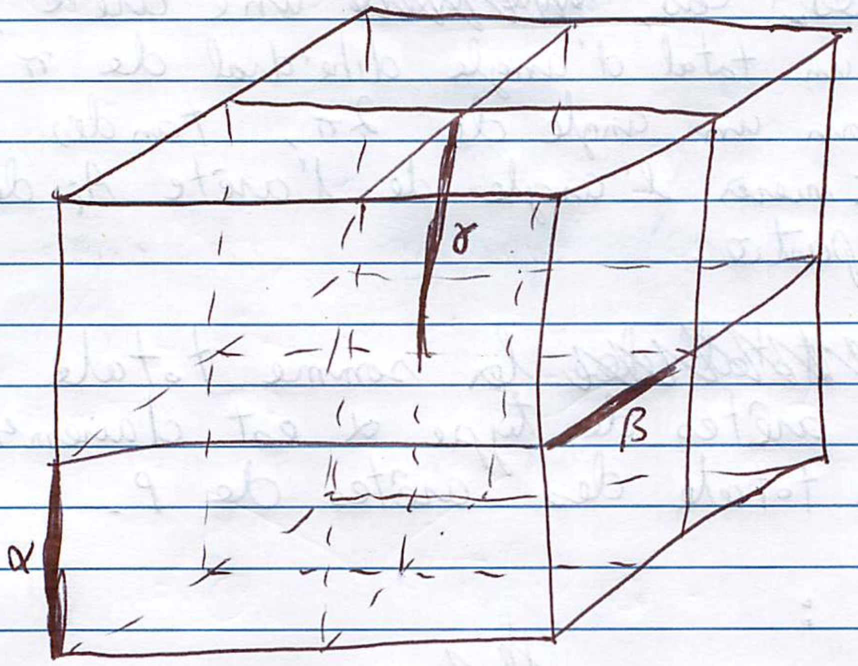
NB : Puisque $\delta(\text{cube}) = 0$, il suffira ensuite de trouver un polyèdre P avec $\delta(P) \neq 0$.

Démonstration :

Considérons une décomposition

$$P = P_1 + \dots + P_n$$

d'un polyèdre dans $\mathbb{R}^3$. Par exemple la décomposition du cube en 8 cubes suivante :



(pensez à un cube Rubik)

L'idée est que les seules arêtes qui vont contribuer dans $\delta(P_1)+\dots+\delta(P_n)$ sont celles qui sont des morceaux des arêtes originales de P :

Notons $A_1, \dots, A_k$ les arêtes de P, et $B_{i_1}, \dots, B_{i_{k_i}}$ les arêtes de P_i.

Dans l'ensemble des arêtes de $P_1 + \dots + P_n$, i.e dans $\{ B_{i_j} \mid 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le k_i \}$, il y a trois types d'arêtes :

1) Les α : qui sont contenues dans l'une des A_j, arêtes de P originale

2) Les β : qui sont contenues dans une face de P

3) Les γ : qui sont dans l'intérieur de P

Pour calculer $\delta(P_1)+\dots+\delta(P_n)$, il faut sommer sur toutes les arêtes, et parfois la même arête contribue plus d'une fois (si elle est l'arête de plus d'un P_i)

par exemple dans le cube ci-dessus, une arête α ~~est comptée~~ contribue 1 fois, une β deux fois et une γ 4 fois.

Dans tous les cas, ~~une petite~~ une arête β va contribuer pour un total d'angle dihédral de π ~~et~~, une arête ~~[illegible]~~ γ pour un angle de 2π, tandis qu'une arête α contribuera l'angle de l'arête A_i de P dont elle fait partie.

De plus, ~~[illegible]~~ la somme totale des longueurs des arêtes de type α est clairement égale à la somme totale des arêtes de P.

En formules :

$$\sum_{i=1}^{n} \delta(P_i) = ~~[illegible]~~$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k_i} l(B_{ij}) \otimes [\Theta(B_{ij})]$$

$$= \sum_{B_{ij}} l(B_{ij}) \otimes [\Theta(B_{ij})]$$ ~~ou par [illegible]~~

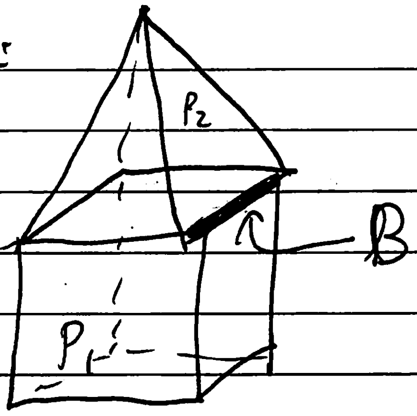
~~$\sum_{B \text{ arêtes de type } \alpha} l(B) \otimes [\Theta(B)] + \sum_{B \text{ arêtes de type } \beta} l(B) \otimes [\Theta(B)]$~~

Puisque, ~~par [illegible]~~ si une arête B ~~est comptée deux fois~~, contribue deux fois, pour deux P_i différents : disons $B_{ij} = B_{k\ell}$, alors

$$l(B_{ij}) = l(B_{k\ell}) \quad \underline{\text{mais}} \quad \Theta(B_{ij}) \neq \Theta(B_{k\ell})$$

en général

par exemple :



l'arête B continue dans $\delta(P_1)$ et $\delta(P_2)$
mais $\theta(B)_{P_1} \neq \theta(B)_{P_2}$, tandis que $l(B)_{P_1} = l(B)_{P_2}$

Or dans le produit tensoriel, par bilinéarité,

$$l(B)_{P_1} \otimes [\theta(B)_{P_1}] + l(B)_{P_2} \otimes [\theta(B)_{P_2}]$$
$$= l(B) \otimes ([\theta(B)_{P_1} + \theta(B)_{P_2}])$$

On écrit donc

$$\sum_{i=1}^{n} \delta(P_i) = \sum_{\substack{\cancel{\{B \mid B \text{ apparaît dans}} \\ \{B_{ij}\}}} l(B_{ij}) \otimes \left(\sum_{k=1}^{n} [\theta(B_{ij})_{P_k}]\right)$$

les elts sont tous distincts

l'angle dihédral de l'arête B_{ij} vu comme arête de P_k.

Mais on peut décomposer dans les trois types :

$$\sum_{i=1}^{n} \delta(P_i) = \sum_{\{B \text{ de type } \alpha\}} l(B) \otimes \left(\sum_{k=1}^{n} [\theta(B)_{P_k}]\right) \leftarrow [\pi]$$
$$+ \sum_{\{B \text{ de type } \beta\}} l(B) \otimes \left(\sum_{k=1}^{n} [\theta(B)_{P_k}]\right)$$
$$+ \sum_{\{B \text{ de type } \gamma\}} l(B) \otimes \left(\sum_{k=1}^{n} [\theta(B)_{P_k}]\right) \leftarrow [2\pi]$$

~~pour un certain i~~

~~$= \sum_{\{B \text{ t.q. } B \not\subset A_i\}} l(B) \otimes \left(\sum_{k=1}^{n} [\theta(B)_{P_k}]\right)$~~

~~$= \sum_{\{A_i \text{ arête de } P\}} \sum_{\{B \text{ t.q. } B \subset A_i\}} l(B) \otimes [\theta(B)]$~~

les arêtes de P ↓

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{\{B\subset A_i\}} l(B) \otimes \Big[\overbrace{\sum_{m=1}^{n} \theta(B)_{P_m}}^{\theta(A_i)}\Big]$$

(ici A_i arêtes de P)

(car il ne reste plus que des arêtes de type α)

$$= \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\Big(\sum_{\{B\subset A_i\}} l(B)\Big)}_{l(A_i)} \otimes [\theta(A_i)]$$

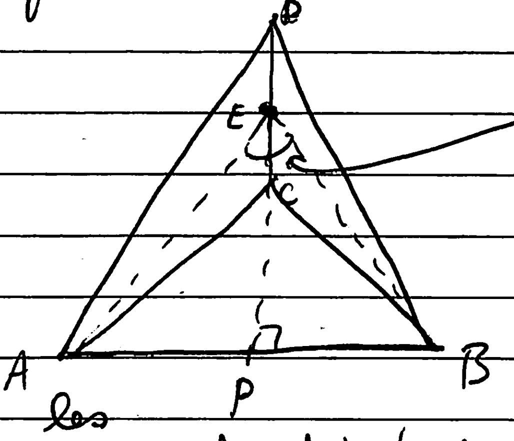
$$= \sum_{i=1}^{k} l(A_i) \otimes [\theta(A_i)] = \delta(P).$$

∎

Montrons maintenant~~s~~ que le cube et le tétraèdre régulier de même volumes ne sont pas équidecomposables.

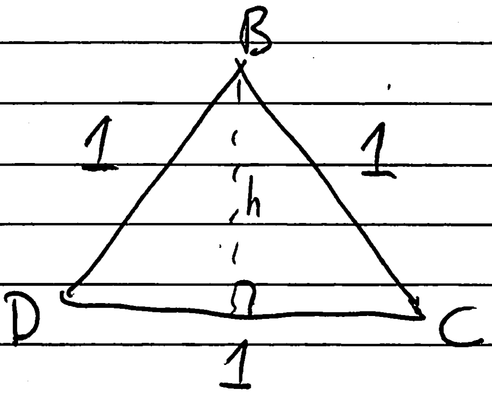
Notons T = tétraèdre rég. de côté 1
et C = cube de m̂ volume que T.

On a vu que $\delta(C)=0$. Montrons que $\delta(T)\neq 0$:



l'angle dihédral de l'arête CD est $\widehat{AEB}$

Puisque tous les ~~chaque~~ angles dihédraux sont égaux, il suffit de calculer $\widehat{AEB} = \theta$:



pythagore

$\Longrightarrow 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + h^2$

$\Longrightarrow h = \sqrt{3}/2$.

Donc $l(EB) = \sqrt{3}/2$, $l(PB) = 1/2$

Et ~~[illegible]~~ ainsi

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\ell(PB)}{\ell(EB)} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Mais on a l'identité $\cos\theta = 1 - 2\sin^2(\theta/2)$

donc $\cos\theta = 1 - 2(3/9) = \frac{1}{3}$, et $\theta = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$.

Donc :

$$\boxed{\begin{aligned}\delta(T) &= [illegible]\ 6\left(\overset{1}{\ell(A)} + \left[\overset{[\arccos(1/3)]}{\theta(A)}\right]\right)\\ &= 6 \otimes \arccos(1/3).\end{aligned}}$$

Il faut donc voir que $\arccos(1/3) \neq 0 \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Q}$, ie que $\arccos(1/3)$ n'est pas un multiple rationnel de π, ie que

$$\boxed{\frac{1}{\pi}\arccos(1/3) \notin \mathbb{Q}}$$

preuve :

Il n'est pas difficile de voir à l'aides d'identités trigonométriques habituelles que pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\cos(n\theta) = \text{[illegible]}$$
$$= 2\cos\theta\cos((n-1)\theta) - \cos((n-2)\theta)$$

et donc par récurrence que

$$\cos(n\theta) = T_n(\cos\theta)$$

pour T_n un polynôme de degré n à coefficients entiers avec coefficient de plus grand degré donné par 2^{n-1}.

(Les T_n sont les polynômes de Chebychev).

Posons $\lambda = \arccos(1/3)$ et supposons par l'absurde que $\lambda = \frac{p}{q}\pi$ pour $p, q \in \mathbb{N}$

Alors on a

$$T_q\left(\frac{1}{3}\right) = T_q\left(\cos\left(\frac{p}{q}\pi\right)\right)$$

~~[illegible]~~

$$= \cos\left(q\,\frac{p}{q}\,\pi\right) \quad \text{par déf des } T_q$$

$$= \cos(p\pi) = \pm 1 .$$

Donc $1/3$ est racine du polynôme $T_q(x) \mp 1$ à coeff. entiers et avec terme dominant 2^{q-1}.

Le "test des racines rationnelles" entraîne que 3 divise 2^{q-1}, ce qui est absurde.

NB: Pour voir ~~[illegible]~~ ceci, ~~[illegible]~~ on écrit $P(x) = T_q(x) \mp 1$. Alors

$$0 = P(\tfrac{1}{3}) = 2^{q-1}\left(\frac{1}{3}\right)^n + a_1\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \dots + a_{n-1}\left(\frac{1}{3}\right) + a_n$$

~~[illegible]~~ donc en multipliant par 3^n :

$$-2^{q-1} = a_1 3 + a_2 3^2 + \dots + a_{n-1} 3^{n-1} + a_n 3^n$$

$$= 3\underbrace{[a_1 + a_2 3 + \dots + a_n 3^{n-1}]}_{\in \mathbb{N}}$$

$$\Longrightarrow 3 \mid 2^{q-1}.$$