Introduction à l'homologie simpliciale

Herman Goulet-Ouellet

26 mai 2016

Section 1

Préambule

Motivation

- Étudier les **espaces topologiques** construits à partir de **simplexes**.

Motivation

- Étudier les **espaces topologiques** construits à partir de **simplexes**.
- Un simplexe est une généralisation n-dimensionnelle d'un triangle.

Motivation

- Étudier les **espaces topologiques** construits à partir de **simplexes**.
- Un simplexe est une généralisation n-dimensionnelle d'un triangle.
- Un espace construit en agençant des simplexes est un **complexe simplicial**.

Motivation

- Étudier les **espaces topologiques** construits à partir de **simplexes**.
- Un simplexe est une généralisation n-dimensionnelle d'un triangle.
- Un espace construit en agençant des simplexes est un **complexe simplicial**.
- On s'intéresse aux propriétés des complexes simpliciaux qui sont préservées par les **fonctions continues**.

Préalable : topologie dans $\mathbb{R}^N$

Soit $U \subseteq \mathbb{R}^N$ et $V \subseteq \mathbb{R}^M$.

Préalable : topologie dans $\mathbb{R}^N$

Soit $U \subseteq \mathbb{R}^N$ et $V \subseteq \mathbb{R}^M$.

Définition

$f : U \to V$ est **continue** en x si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|x - y\| < \delta \implies \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

Préalable : topologie dans $\mathbb{R}^N$

Soit $U \subseteq \mathbb{R}^N$ et $V \subseteq \mathbb{R}^M$.

Définition

$f : U \to V$ est **continue** en x si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|x - y\| < \delta \implies \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

⚠

La notation $\|x\|$ désigne la norme euclidienne de x à la fois dans $\mathbb{R}^N$ et dans $\mathbb{R}^M$.

Topologie dans $\mathbb{R}^N$, suite

Une fonction continue, inversible et d'inverse continue est appelée **homéomorphisme**.

Topologie dans $\mathbb{R}^N$, suite

Une fonction continue, inversible et d'inverse continue est appelée **homéomorphisme**.

- Une **propriété topologique** est une propriété qui est préservée par les **homéomorphismes**.

Topologie dans $\mathbb{R}^N$, suite

Une fonction continue, inversible et d'inverse continue est appelée **homéomorphisme**.

- Une **propriété topologique** est une propriété qui est préservée par les **homéomorphismes**.
- On veut connaître les propriétés topologiques des complexes simpliciaux.

Topologie dans $\mathbb{R}^N$, suite

Une fonction continue, inversible et d'inverse continue est appelée **homéomorphisme**.

- Une **propriété topologique** est une propriété qui est préservée par les **homéomorphismes**.
- On veut connaître les propriétés topologiques des complexes simpliciaux.
- On va définir une famille d'invariants topologiques appelés **groupes d'homologies**.

Section 2

Complexes simpliciaux

La notion de simplexe

Définition

Soit $\{v_0, \ldots, v_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$. Le simplexe σ engendré par $\{v_0, \ldots, v_n\}$ est l'ensemble

$$v_0 \ldots v_n = \left\{ \sum t_i v_i : t_i \geq 0 \text{ et } \sum t_i = 1 \right\}.$$

La notion de simplexe

Définition

Soit $\{v_0, \ldots, v_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$. Le simplexe σ engendré par $\{v_0, \ldots, v_n\}$ est l'ensemble

$$v_0 \ldots v_n = \left\{ \sum t_i v_i : t_i \geq 0 \text{ et } \sum t_i = 1 \right\}.$$

Remarques sur la définition

- On demande que $\{v_1 - v_0, \ldots, v_n - v_0\}$ soit linéairement indépendant dans $\mathbb{R}^N$.

Remarques sur la définition

- On demande que $\{v_1 - v_0, \ldots, v_n - v_0\}$ soit linéairement indépendant dans $\mathbb{R}^N$.
- Sous cette condition, $\{v_0, \ldots, v_n\}$ est l'unique ensemble qui engendre σ.

Remarques sur la définition

- On demande que $\{v_1 - v_0, \ldots, v_n - v_0\}$ soit linéairement indépendant dans $\mathbb{R}^N$.
- Sous cette condition, $\{v_0, \ldots, v_n\}$ est l'unique ensemble qui engendre σ.
- On dit que σ est un simplexe de dimension n, ou n-simplexe.

Remarques sur la définition

- On demande que $\{v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0\}$ soit linéairement indépendant dans $\mathbb{R}^N$.
- Sous cette condition, $\{v_0, \dots, v_n\}$ est l'unique ensemble qui engendre σ.
- On dit que σ est un simplexe de dimension n, ou n-simplexe.
- On peut vérifier que notre définition est la bonne en regardant $n = 0, 1, 2, 3$.

Faces d'un simplexe

Soit $\sigma = v_0 \dots v_n$ un simplexe.

Faces d'un simplexe

Soit $\sigma = v_0 \dots v_n$ un simplexe.

- Tout sous-ensemble de $\{v_0, \dots, v_n\}$ engendre un simplexe σ'.

Faces d'un simplexe

Soit $\sigma = v_0 \dots v_n$ un simplexe.

- Tout sous-ensemble de $\{v_0, \dots, v_n\}$ engendre un simplexe σ'.
- Ces simplexes sont appelés les faces de σ.

Faces d'un simplexe

Soit $\sigma = v_0 \ldots v_n$ un simplexe.

- Tout sous-ensemble de $\{v_0, \ldots, v_n\}$ engendre un simplexe σ'.
- Ces simplexes sont appelés les faces de σ.
- Les 0-faces de σ sont appelées sommets.

Complexe simplicial

Définition

Un **complexe simplicial** est un ensemble (fini) K tel que

1. tous les éléments de K sont des simplexes de $\mathbb{R}^N$;
2. si $\sigma \in K$ et que σ' est une face de σ, alors $\sigma' \in K$;
3. L'intersection de deux éléments de K est une face de ces deux simplexes ;

Polyèdre

Un complexe simplicial K définit un **polyèdre** $|K| \subseteq \mathbb{R}^N$:

$$|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma.$$

Polyèdre

Un complexe simplicial K définit un **polyèdre** $|K| \subseteq \mathbb{R}^N$:

$$|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma.$$

⚠

Deux complexes simpliciaux distincts peuvent définir le même polyèdre.

Quelques exemples

- L'ensemble des faces d'un n-simplexe σ forme un complexe simplicial, noté Δ_n.

Quelques exemples

- L'ensemble des faces d'un n-simplexe σ forme un complexe simplicial, noté Δ_n.
- Si K est un complexe simplicial, l'ensemble $K^{(p)}$ des simplexes de K de dimension au plus p est aussi un complexe simplicial.

Quelques exemples

- L'ensemble des faces d'un n-simplexe σ forme un complexe simplicial, noté Δ_n.
- Si K est un complexe simplicial, l'ensemble $K^{(p)}$ des simplexes de K de dimension au plus p est aussi un complexe simplicial.
- Plusieurs espaces connus peuvent être réalisés comme des polyèdres : le tore, le cercle, la sphère, la bouteille de Klein…

En passant : un théorème de Radò

Le mathématicien Hongrois Tibor Radò (1895-1965) a montré que toute surface peut être construite à partir de 2-simplexes. Autrement dit :

Toute surface admet une triangulation.

En passant : un théorème de Radò

Le mathématicien Hongrois Tibor Radò (1895-1965) a montré que toute surface peut être construite à partir de 2-simplexes. Autrement dit :

Toute surface admet une triangulation.

Section 3

Homologie simpliciale

Qu'est-ce que l'homologie simpliciale ?

- Une méthode pour associer à un complexe K une famille de **groupes abéliens** $H_0(K), H_1(K), H_2(K)$, etc.

Qu'est-ce que l'homologie simpliciale ?

- Une méthode pour associer à un complexe K une famille de **groupes abéliens** $H_0(K), H_1(K), H_2(K)$, etc.
- Le groupe $H_p(K)$ est appelé p-ième groupe d'homologie de K.

Qu'est-ce que l'homologie simpliciale ?

- Une méthode pour associer à un complexe K une famille de **groupes abéliens** $H_0(K), H_1(K), H_2(K)$, etc.
- Le groupe $H_p(K)$ est appelé p-ième groupe d'homologie de K.
- Chaque groupe d'homologie est un **invariant topologique** de $|K|$.

Pourquoi c'est intéressant

- Les groupes abéliens sont bien connus.

Pourquoi c'est intéressant

- Les groupes abéliens sont bien connus.
- Un complexe K a seulement un nombre fini de groupes d'homologies.

Pourquoi c'est intéressant

- Les groupes abéliens sont bien connus.
- Un complexe K a seulement un nombre fini de groupes d'homologies.
- Les groupes d'homologies d'un complexe peuvent être calculés par ordinateur.

Pourquoi c'est intéressant

- Les groupes abéliens sont bien connus.
- Un complexe K a seulement un nombre fini de groupes d'homologies.
- Les groupes d'homologies d'un complexe peuvent être calculés par ordinateur.

Simplexes orientés

Soit $\sigma = v_0 \dots v_n$ un n-simplexe avec $n > 0$.

Simplexes orientés

Soit $\sigma = v_0 \ldots v_n$ un n-simplexe avec $n > 0$.

- Les sommets de σ peuvent être ordonnés de $(n+1)!$ différentes manières.

Simplexes orientés

Soit $\sigma = v_0 \dots v_n$ un n-simplexe avec $n > 0$.

- Les sommets de σ peuvent être ordonnés de $(n+1)!$ différentes manières.
- On dit que deux ordres sur les sommets de σ sont équivalents s'ils diffèrent par une permutation paire.

Simplexes orientés

Soit $\sigma = v_0 \ldots v_n$ un n-simplexe avec $n > 0$.

- Les sommets de σ peuvent être ordonnés de $(n+1)!$ différentes manières.
- On dit que deux ordres sur les sommets de σ sont équivalents s'ils diffèrent par une permutation paire.
- À équivalence près, σ admet seulement deux ordres, appelés **orientations**.

Simplexes orientés

Soit $\sigma = v_0 \dots v_n$ un n-simplexe avec $n > 0$.

- Les sommets de σ peuvent être ordonnés de $(n+1)!$ différentes manières.
- On dit que deux ordres sur les sommets de σ sont équivalents s'ils diffèrent par une permutation paire.
- À équivalence près, σ admet seulement deux ordres, appelés **orientations**.
- On note $[v_0 \dots v_n]$ l'orientation associée à l'ordre $(v_0, \dots, v_n)$.

Chaînes

Définition

Une p-**chaîne** est une fonction c de l'ensemble des p-simplexes orientés de K vers $\mathbb{Z}$ tel que $c(-\sigma) = -c(\sigma)$.

Chaînes

Définition

Une **p-chaîne** est une fonction c de l'ensemble des p-simplexes orientés de K vers $\mathbb{Z}$ tel que $c(-\sigma) = -c(\sigma)$. On note $C_p(K)$ l'ensemble des p-chaînes de K.

Chaînes

Définition

Une ***p*-chaîne** est une fonction c de l'ensemble des p-simplexes orientés de K vers $\mathbb{Z}$ tel que $c(-\sigma) = -c(\sigma)$.
On note $C_p(K)$ l'ensemble des p-chaînes de K.

- On peut voir $C_p(K)$ comme des combinaisons $\mathbb{Z}$-linéaires formelles des p-simplexes orientés.

Structure de groupe sur les chaînes

- L'addition de fonctions donne une structure de **groupe abélien** sur $C_p(K)$.

Structure de groupe sur les chaînes

- L'addition de fonctions donne une structure de **groupe abélien** sur $C_p(K)$.
- $C_p(K)$ est un **groupe abélien libre**. On obtient une base en fixant une orientation pour chaque p-simplexe.

Structure de groupe sur les chaînes

- L'addition de fonctions donne une structure de **groupe abélien** sur $C_p(K)$.
- $C_p(K)$ est un **groupe abélien libre**. On obtient une base en fixant une orientation pour chaque p-simplexe.
- Si p est négatif ou plus grand que la dimension de K, $C_p(K) = 0$.

Intuition derrière les chaînes

- $C_p(K)$ permet de **parcourir algébriquement** $|K|$.

Intuition derrière les chaînes

- $C_p(K)$ permet de **parcourir algébriquement** $|K|$.
- On utilise la structure simpliciale de K pour se repérer.

Intuition derrière les chaînes

- $C_p(K)$ permet de **parcourir algébriquement** $|K|$.
- On utilise la structure simpliciale de K pour se repérer.
- l'orientation d'un simplexe représente la direction du parcours.

Opérateur de bord

- **Problème :** $C_p(K)$ dépend de la structure simpliciale de K.

Opérateur de bord

- **Problème :** $C_p(K)$ dépend de la structure simpliciale de K.
- **Solution :** on étudie le bord des chaînes.

Opérateur de bord

- **Problème :** $C_p(K)$ dépend de la structure simpliciale de K.
- **Solution :** on étudie le bord des chaînes.
- Le bord d'un simplexe orienté $[v_0 \dots v_p]$ est

$$\delta_p([v_0 \dots v_p]) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i [v_0 \dots v_{i-1} v_{i+1} \dots v_p].$$

Opérateur de bord

- **Problème :** $C_p(K)$ dépend de la structure simpliciale de K.
- **Solution :** on étudie le bord des chaînes.
- Le bord d'un simplexe orienté $[v_0 \dots v_p]$ est

$$\delta_p([v_0 \dots v_p]) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i [v_0 \dots v_{i-1} v_{i+1} \dots v_p].$$

- On étend δ_p linéairement à tout $C_p(K)$.

Propriétés de δ_p

- δ_p est un homéomorphismes.

Propriétés de δ_p

- δ_p est un homéomorphismes.
- $\delta_p : C_p(K) \to C_{p-1}(K)$.

Propriétés de δ_p

- δ_p est un homéomorphismes.
- $\delta_p : C_p(K) \to C_{p-1}(K)$.
- $\delta_{p-1} \circ \delta_p = 0$.

Cycles et bords

Définition

On appelle **cycle** un élément de
$Z_p(K) = \{\sigma \in C_p(K) : \delta_p(\sigma) = 0\}$.

Cycles et bords

Définition

On appelle **cycle** un élément de
$Z_p(K) = \{\sigma \in C_p(K) : \delta_p(\sigma) = 0\}$.
On appelle **bord** un élément de $B_p(K) = \{\delta_{p+1}(\tau) : \tau \in C_{p+1}(K)\}$.

Cycles et bords

Définition

On appelle **cycle** un élément de
$Z_p(K) = \{\sigma \in C_p(K) : \delta_p(\sigma) = 0\}$.
On appelle **bord** un élément de $B_p(K) = \{\delta_{p+1}(\tau) : \tau \in C_{p+1}(K)\}$.

- $B_p(K) = \mathrm{im}(\delta_{p+1})$ et $Z_p(K) = \ker(\delta_p)$.

Cycles et bords

Définition

On appelle **cycle** un élément de $Z_p(K) = \{\sigma \in C_p(K) : \delta_p(\sigma) = 0\}$.
On appelle **bord** un élément de $B_p(K) = \{\delta_{p+1}(\tau) : \tau \in C_{p+1}(K)\}$.

- $B_p(K) = \mathrm{im}(\delta_{p+1})$ et $Z_p(K) = \ker(\delta_p)$.
- L'égalité $\delta_{p+1} \circ \delta_p = 0$ entraîne $B_p(K) \leq Z_p(K)$.

Homologie

Definition

Le p-ième **groupe d'homologie** de K est le groupe quotient $H_p(K) = Z_p(K)/B_p(K)$.

Homologie

Definition

Le p-ième **groupe d'homologie** de K est le groupe quotient $H_p(K) = Z_p(K)/B_p(K)$.

- Le groupe $H_p(K)$ est un invariant topologique de $|K|$.

Homologie

Definition

Le p-ième **groupe d'homologie** de K est le groupe quotient $H_p(K) = Z_p(K)\,/\,B_p(K)$.

- Le groupe $H_p(K)$ est un invariant topologique de $|K|$.

Un exemple : l'homologie de la sphère

$$H_p(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } p = 0, n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Fin de la présentation