S^3 et la fibration de Hopf

Jean-Francois Arbour

UQAM

21 janvier 2012

1. Introduction
   - Quelques rappels
   - La 3-shère
2. Espace fibré
   - Définition
   - Exemples
3. Fibration de Hopf (définition élémentaire)
4. Projection stéréographique
5. Fibration de Hopf du point de vue complexe
   - $\mathbb{C}^2$
   - Droites complexes
   - Fibration de Hopf
6. Les cercles de Hopf
   - Structure des cercles
7. Projection de S^3 dans $\mathbb{R}^3$
   - S^3 comme l'union de deux torres solides

Quelques rappels

Définition

$R^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\}$

Quelques rappels

Définition

$R^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\}$

Example

$R^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, 4)\}$

Quelques rappels

Définition

$R^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\}$

Example

$R^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, 4)\}$

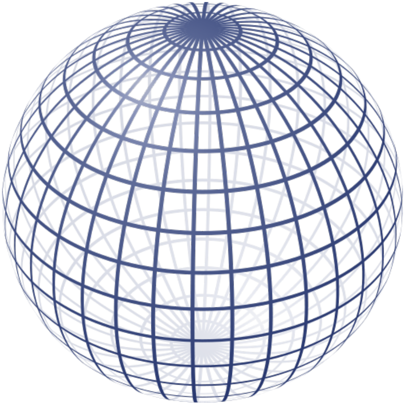
Définition

La norme de $x = (x_1, \ldots x_n) \in R^n$ est donnée par $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

Le concept de sphère, S^2

Définition

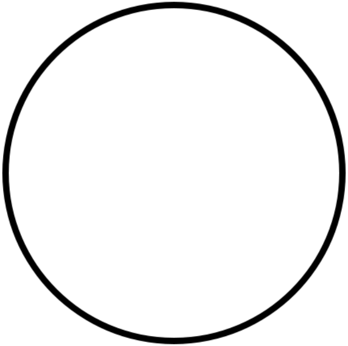
La 2-sphère $S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\}$.



Le concept de sphère, S^1

Définition

La 1-sphère $S^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = 1\}$



Généralisation à S^n

Définition

La n-sphère est $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$

Généralisation à S^n

Définition

La n-sphère est $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$

Example

La 3-sphère est $S^3 := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid |x| = 1\}$

La fibre au-dessus d'un point

Définition

Soient X et Y deux ensembles, une fonction $f : X \to Y$ et $b \in Y$.

La fibre au-dessus d'un point

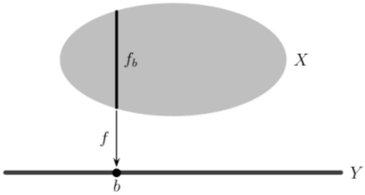
Définition

Soient X et Y deux ensembles, une fonction $f : X \to Y$ et $b \in Y$.
Alors $f^{-1}(b)$ est la *fibre* au-dessus de b.

La fibre au-dessus d'un point

Définition

Soient X et Y deux ensembles, une fonction $f : X \to Y$ et $b \in Y$.
Alors $f^{-1}(b)$ est la *fibre* au-dessus de b.



Définition d'un espace fibré

Définition

Soient E, B deux espaces (topologiques) et une fonction continue $\pi : E \to B$.

Définition d'un espace fibré

Définition

Soient E, B deux espaces (topologiques) et une fonction continue $\pi : E \to B$.
Si il existe un espace F tel que $\pi^{-1}(x) \cong F$ pour tout $x \in B$.

Définition d'un espace fibré

Définition

Soient E, B deux espaces (topologiques) et une fonction continue $\pi : E \to B$.
Si il existe un espace F tel que $\pi^{-1}(x) \cong F$ pour tout $x \in B$.
Alors E est un *espace fibré*.

Définition d'un espace fibré

Définition

Soient E, B deux espaces (topologiques) et une fonction continue $\pi : E \to B$.
Si il existe un espace F tel que $\pi^{-1}(x) \cong F$ pour tout $x \in B$.
Alors E est un *espace fibré*.

Définition

- E est l'*espace total*;

Définition d'un espace fibré

Définition

Soient E, B deux espaces (topologiques) et une fonction continue $\pi : E \to B$.
Si il existe un espace F tel que $\pi^{-1}(x) \cong F$ pour tout $x \in B$.
Alors E est un *espace fibré*.

Définition

- E est l'*espace total*;
- B est la *base*;

Définition d'un espace fibré

Définition

Soient E, B deux espaces (topologiques) et une fonction continue $\pi : E \to B$.
Si il existe un espace F tel que $\pi^{-1}(x) \cong F$ pour tout $x \in B$.
Alors E est un *espace fibré*.

Définition

- E est l'*espace total* ;
- B est la *base* ;
- π est la *projection* ;

Définition d'un espace fibré

Définition

Soient E, B deux espaces (topologiques) et une fonction continue $\pi : E \to B$.
Si il existe un espace F tel que $\pi^{-1}(x) \cong F$ pour tout $x \in B$.
Alors E est un *espace fibré*.

Définition

- E est l'*espace total* ;
- B est la *base* ;
- π est la *projection* ;
- F est la *fibre*.

Définition d'un espace fibré

Définition

Soient E, B deux espaces (topologiques) et une fonction continue $\pi : E \to B$.
Si il existe un espace F tel que $\pi^{-1}(x) \cong F$ pour tout $x \in B$.
Alors E est un *espace fibré*.

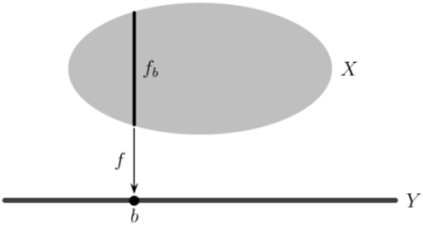
Définition

- E est l'*espace total*;
- B est la *base*;
- π est la *projection*;
- F est la *fibre*.

On note alors $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$.

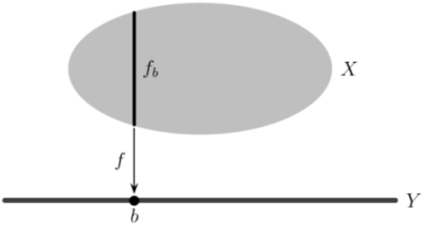
Exemple d'espace fibré

$I \hookrightarrow X \xrightarrow{f} Y$ (où $f_b \cong I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle)



Exemple d'espace fibré

$I \hookrightarrow X \xrightarrow{f} Y$ (où $f_b \cong I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle)



Mais $X \cong Y \times I$! C'est un fibré trivial.

Espace fibré trivial

Définition

Soit $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ un espace fibré. Si $E \cong F \times B$, alors E est un *fibré trivial*.

Espace fibré trivial

Définition

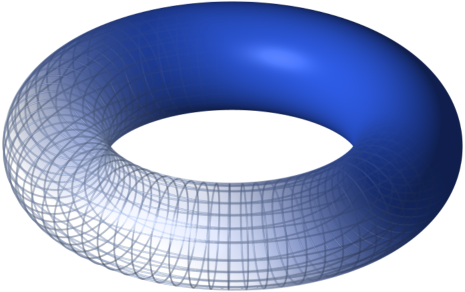
Soit $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ un espace fibré. Si $E \cong F \times B$, alors E est un *fibré trivial*.

Exemple

Le produit cartésien : $E = B \times F$.

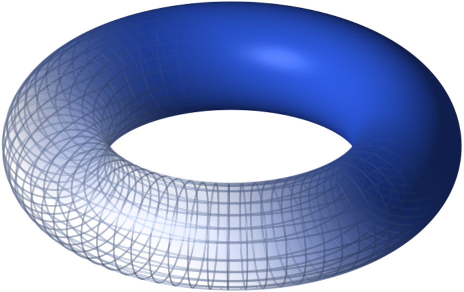
Exemple de produit cartésien, le torre

Le torre $T = S^1 \times S^1$.



Exemple de produit cartésien, le torre

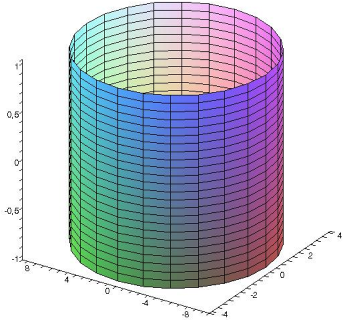
Le torre $T = S^1 \times S^1$.



Fibré : $S^1 \hookrightarrow T \xrightarrow{\pi} S^1$ où $\pi(x, y) = x$

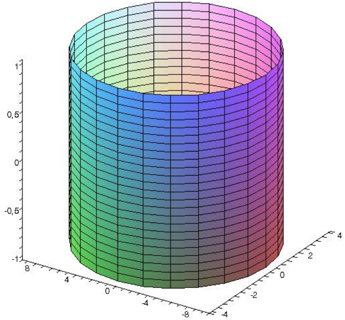
Exemple de produit cartésien, le cylindre

Le cylindre $C = S^1 \times [-1, 1]$.



Exemple de produit cartésien, le cylindre

Le cylindre $C = S^1 \times [-1, 1]$.



Fibré : $[-1, 1] \hookrightarrow C \xrightarrow{\pi} S^1$ où $\pi(x, y) = x$

Exemple d'espace fibré, le ruban de Möbius

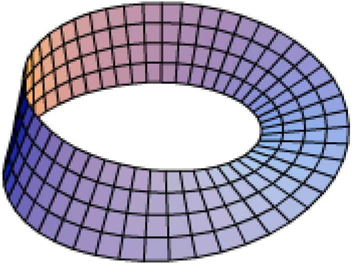
Définition

Le ruban de Möbius : $M = [a, b] \times [-1, 1]$ où $(a, x) = (b, -x)$.

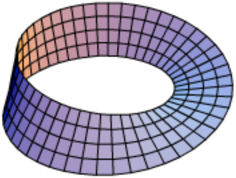
Exemple d'espace fibré, le ruban de Möbius

Définition

Le ruban de Möbius : $M = [a, b] \times [-1, 1]$ où $(a, x) = (b, -x)$.



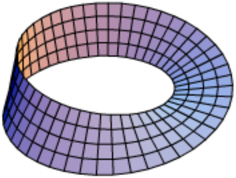
Exemple d'espace fibré, le ruban de Möbius



- Espace total = le ruban de Möbius M

.

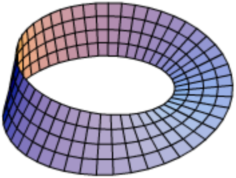
Exemple d'espace fibré, le ruban de Möbius



- Espace total = le ruban de Möbius M
- Base = le cercle S^1 au milieu de M

.

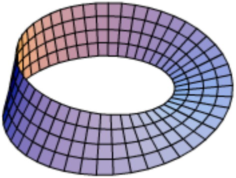
Exemple d'espace fibré, le ruban de Möbius



- Espace total = le ruban de Möbius M
- Base = le cercle S^1 au milieu de M
- Projection = $\pi : M \to S^1$ donnée par $\pi(x, y) = x$

.

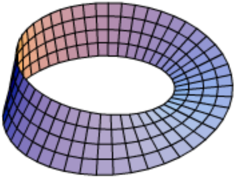
Exemple d'espace fibré, le ruban de Möbius



- Espace total = le ruban de Möbius M
- Base = le cercle S^1 au milieu de M
- Projection = $\pi : M \to S^1$ donnée par $\pi(x, y) = x$
- Fibre = une copie de $[-1, 1]$

.

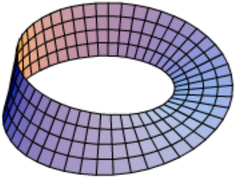
Exemple d'espace fibré, le ruban de Möbius



- Espace total = le ruban de Möbius M
- Base = le cercle S^1 au milieu de M
- Projection = $\pi : M \to S^1$ donnée par $\pi(x, y) = x$
- Fibre = une copie de $[-1, 1]$

Fibré : $[-1, 1] \hookrightarrow M \xrightarrow{\pi} S^1$.

Exemple d'espace fibré, le ruban de Möbius



- Espace total = le ruban de Möbius M
- Base = le cercle S^1 au milieu de M
- Projection = $\pi : M \to S^1$ donnée par $\pi(x, y) = x$
- Fibre = une copie de $[-1, 1]$

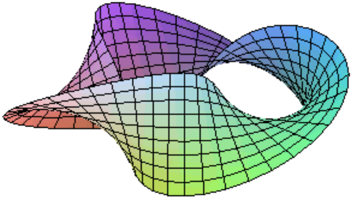
Fibré : $[-1, 1] \hookrightarrow M \xrightarrow{\pi} S^1$.
Mais pas un fibré trivial !

Exemple d'espace fibré, le ruban de Möbius

Autres exemples de fibrés de type $[-1,1] \hookrightarrow ??? \xrightarrow{\pi} S^1$

Exemple d'espace fibré, le ruban de Möbius

Autres exemples de fibrés de type $[-1, 1] \hookrightarrow ??? \xrightarrow{\pi} S^1$



S^3 en tant qu'espace fibré

Définition

La *fibration de Hopf* $h : S^3 \to S^2$ est donnée par
$h(a, b, c, d) = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2, 2(ad + bc), 2(bd - ac))$

S^3 en tant qu'espace fibré

Définition

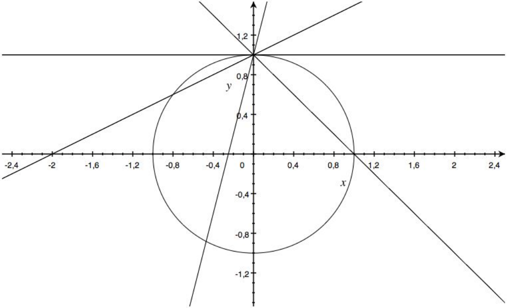
La *fibration de Hopf* $h : S^3 \to S^2$ est donnée par
$h(a, b, c, d) = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2, 2(ad + bc), 2(bd - ac))$

Proposition

$S^1 \hookrightarrow S^3 \xrightarrow{h} S^2$ donne une structure d'espace fibré à S^3.

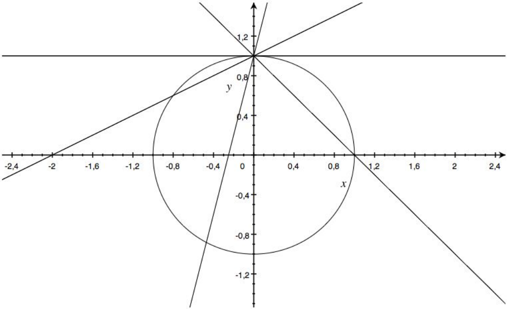
Projection stéréographique de S^1

Identification de S^1 avec $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$



Projection stéréographique de S^1

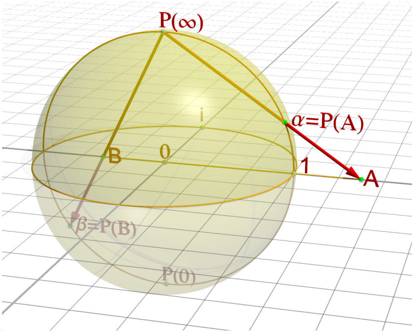
Identification de S^1 avec $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$



On la notera σ.

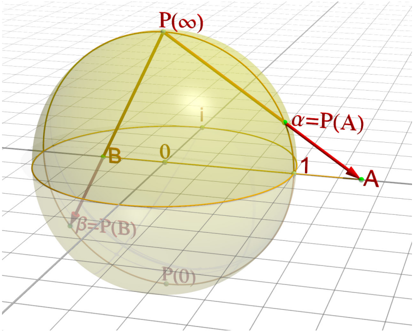
Projection stéréographique de S^2

Identification de S^2 avec $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$



Projection stéréographique de S^2

Identification de S^2 avec $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$



Définition

La *sphère de Riemann* est $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Généralisation de la projection stéréographique

Comment généraliser ?

Généralisation de la projection stéréographique

Comment généraliser ?

Proposition

$\sigma : S^2 \to \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ *est donnée par*

$$\sigma(x, y, z) = \left(\frac{x}{1 - z}, \frac{y}{1 - z}\right)$$

Généralisation de la projection stéréographique

Comment généraliser ?

Proposition

$\sigma : S^2 \to \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ *est donnée par*

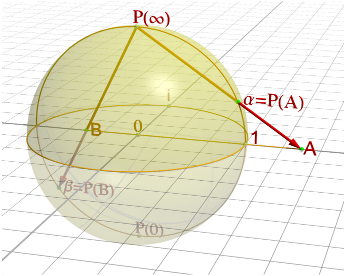
$$\sigma(x, y, z) = \left(\frac{x}{1 - z}, \frac{y}{1 - z} \right)$$

Définition

$\sigma : S^n \to \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ est donnée par

$$\sigma(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{x_1}{1 - x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{1 - x_n} \right)$$

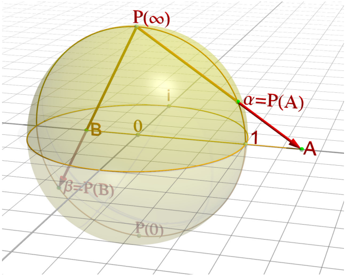
Propriétés de la projection stéréographique



Proposition

- $\sigma : S^n \to \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ *est un homéomorphisme ;*

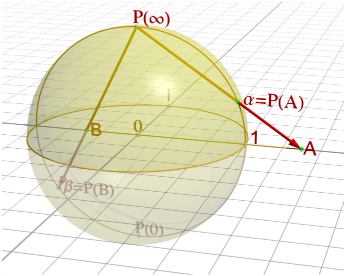
Propriétés de la projection stéréographique



Proposition

- $\sigma : S^n \to \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ *est un homéomorphisme ;*
- σ *fixe* $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$

Propriétés de la projection stéréographique



Proposition

- $\sigma : S^n \to \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ *est un homéomorphisme ;*
- σ *fixe* $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$
- $\sigma(H_s) = B^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ *et* $\sigma(H_n) = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \backslash B^{n-1}$

S^3 du point de vue de $\mathbb{C}^2$

Définition

$\mathbb{C}^2 := \{(z_1, z_2) : z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$.

S^3 du point de vue de $\mathbb{C}^2$

Définition

$\mathbb{C}^2 := \{(z_1, z_2) : z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}.$

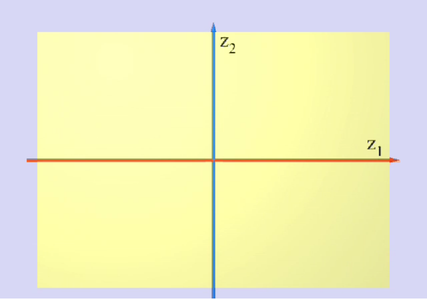
Identification de $\mathbb{R}^4$ avec $\mathbb{C}^2$: $(x_1, x_2, x_3, x_4) \longleftrightarrow (x_1 + ix_2, x_3 + ix_4)$

S^3 du point de vue de $\mathbb{C}^2$

Définition

$\mathbb{C}^2 := \{(z_1, z_2) : z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$.

Identification de $\mathbb{R}^4$ avec $\mathbb{C}^2$: $(x_1, x_2, x_3, x_4) \longleftrightarrow (x_1 + ix_2, x_3 + ix_4)$

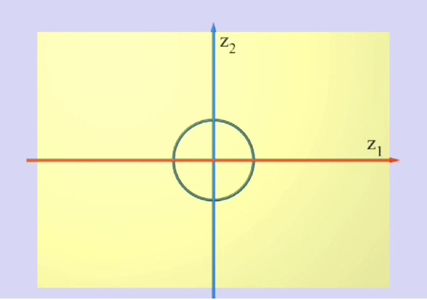


S^3 du point de vue de $\mathbb{C}^2$

Définition

$\mathbb{C}^2 := \{(z_1, z_2) : z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$.

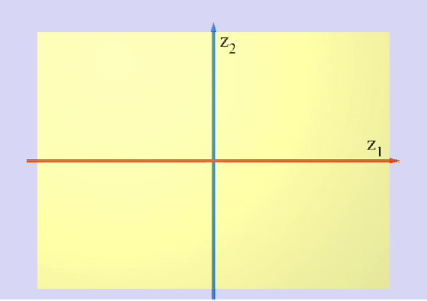
Identification de $\mathbb{R}^4$ avec $\mathbb{C}^2$: $(x_1, x_2, x_3, x_4) \longleftrightarrow (x_1 + ix_2, x_3 + ix_4)$



$$S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$$

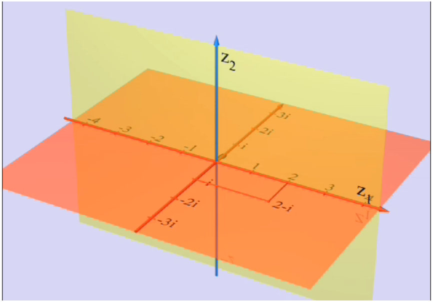
Droites complexes

Attention !



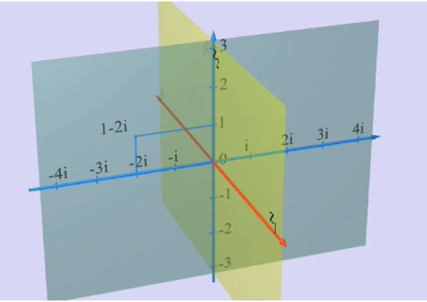
Droites complexes

Attention !



Droites complexes

Attention !



Droites complexes

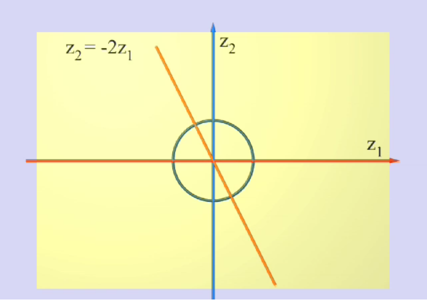
Définition

Une *droite complexe* $L \subset \mathbb{C}^2$ est donnée par une équation $az_1 + bz_2 = 0$ où $a, b \in \mathbb{C}$.

Droites complexes

Définition

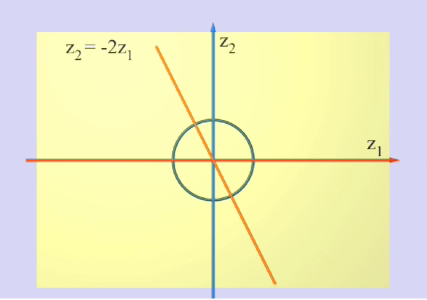
Une *droite complexe* $L \subset \mathbb{C}^2$ est donnée par une équation $az_1 + bz_2 = 0$ où $a, b \in \mathbb{C}$.



Droites complexes

Proposition

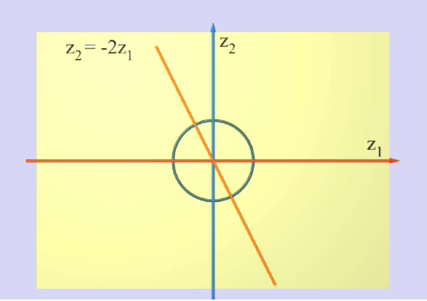
$(z_1, z_2), (w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2$ *sont sur une même droite complexe ssi* $(w_1, w_2) = \lambda(z_1, z_2)$ *pour* $\lambda \in \mathbb{C}$



Droites complexes

Proposition

$(z_1, z_2), (w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2$ *sont sur une même droite complexe ssi* $(w_1, w_2) = \lambda(z_1, z_2)$ *pour* $\lambda \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \left(\frac{w_2}{w_1}\right) = \left(\frac{z_2}{z_1}\right)$.



Droites complexes et S^3

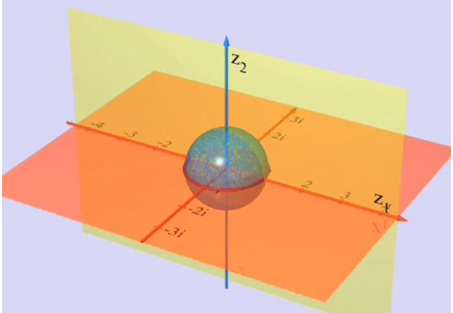
Proposition

Pour L une droite complexe, $L \cap S^3 = S^1 \subset L$.

Droites complexes et S^3

Proposition

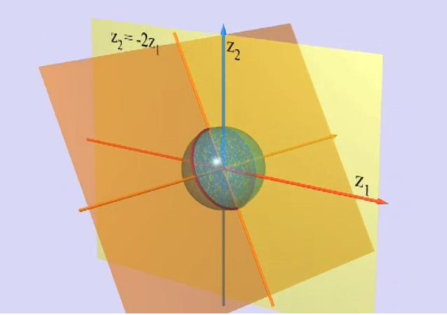
Pour L une droite complexe, $L \cap S^3 = S^1 \subset L$.



Droites complexes et S^3

Proposition

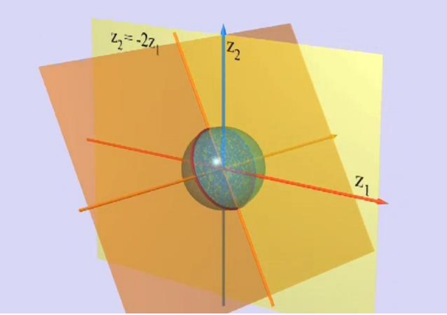
Pour L une droite complexe, $L \cap S^3 = S^1 \subset L$.



Droites complexes et S^3

Proposition

Pour L une droite complexe, $L \cap S^3 = S^1 \subset L$.



Définition

Ce sont les *cercles de Hopf*.

Fibration de Hopf, nouvelle définition

Définition

La fibration de Hopf $h : S^3 \to \mathbb{CP}^1$ est donnée par $h(z_1, z_2) = \dfrac{z_2}{z_1}$.

Fibration de Hopf, nouvelle définition

Définition

La fibration de Hopf $h : S^3 \to \mathbb{CP}^1$ est donnée par $h(z_1, z_2) = \dfrac{z_2}{z_1}$.

Proposition

- *h est surjective (car* $\mathbb{C}(1, z) \subset \mathbb{C}^2$ *contient un antécédant de z),*

Fibration de Hopf, nouvelle définition

Définition

La fibration de Hopf $h : S^3 \to \mathbb{CP}^1$ est donnée par $h(z_1, z_2) = \dfrac{z_2}{z_1}$.

Proposition

- *h est surjective (car $\mathbb{C}(1, z) \subset \mathbb{C}^2$ contient un antécédant de z),*
- *Les fibres de h sont les cercles de Hopf.*

Fibration de Hopf, nouvelle définition

Définition

La fibration de Hopf $h : S^3 \to \mathbb{CP}^1$ est donnée par $h(z_1, z_2) = \dfrac{z_2}{z_1}$.

Proposition

- *h est surjective (car $\mathbb{C}(1, z) \subset \mathbb{C}^2$ contient un antécédant de z),*
- *Les fibres de h sont les cercles de Hopf.*
- $S^1 \hookrightarrow S^3 \xrightarrow{h} S^2$.

Fibration de Hopf, nouvelle définition

Définition

La fibration de Hopf $h : S^3 \to \mathbb{CP}^1$ est donnée par $h(z_1, z_2) = \dfrac{z_2}{z_1}$.

Proposition

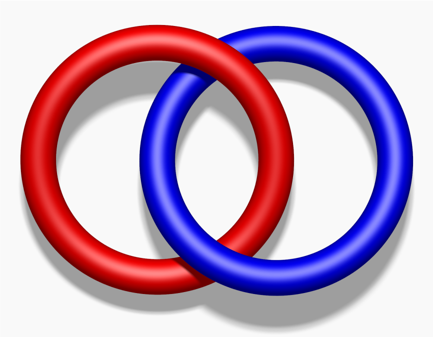
- *h est surjective (car $\mathbb{C}(1, z) \subset \mathbb{C}^2$ contient un antécédant de z),*
- *Les fibres de h sont les cercles de Hopf.*
- $S^1 \hookrightarrow S^3 \xrightarrow{h} S^2$.

Mais $S^3 \neq S^2 \times S^1$. Fibré non trivial !

Les cercles de Hopf

Proposition

Les cercles de Hopf sont liés.



L'équateur

Définition

L'équateur de S^n est $\{(x_1, \ldots, x_n) \subset S^n \mid x_n = 0\}$.

L'équateur

Définition

L'équateur de S^n est $\{(x_1, \ldots, x_n) \subset S^n \mid x_n = 0\}$.
Notons E l'équateur de S^3 et F l'équateur de E.

L'équateur

Définition

L'équateur de S^n est $\{(x_1, \dots, x_n) \subset S^n \mid x_n = 0\}$.
Notons E l'équateur de S^3 et F l'équateur de E.

Proposition

On a $F = h^{-1}(0)$. $\quad$ (*car* $h(z_1, z_2) = (z_2/z_1) = 0 \Leftrightarrow z_2 = 0$)

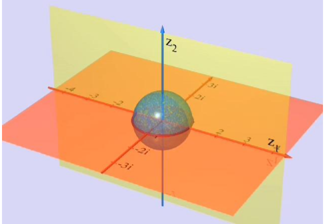
L'équateur

Définition

L'équateur de S^n est $\{(x_1, \ldots, x_n) \subset S^n \mid x_n = 0\}$.
Notons E l'équateur de S^3 et F l'équateur de E.

Proposition

On a $F = h^{-1}(0)$. (*car* $h(z_1, z_2) = (z_2/z_1) = 0 \Leftrightarrow z_2 = 0$)



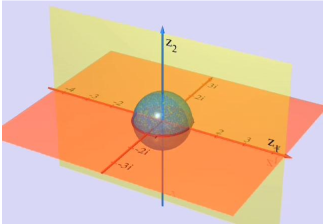
L'équateur

Proposition

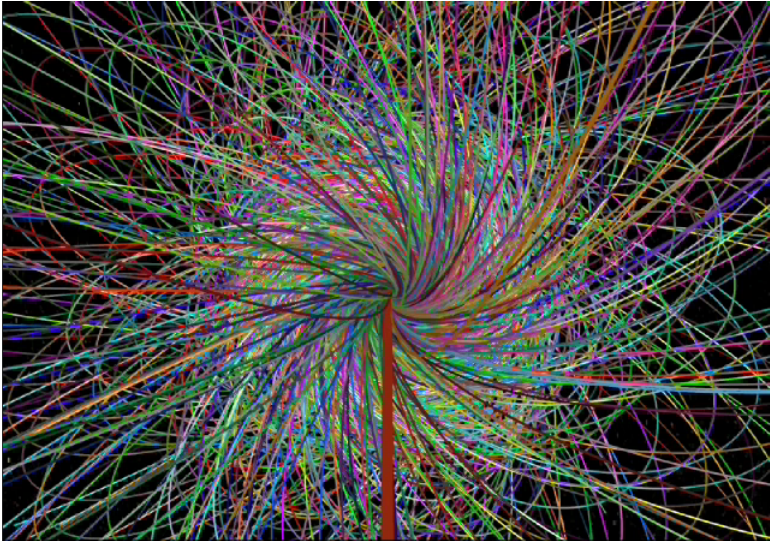
Toutes les autres fibres sont liées avec F !

Proposition

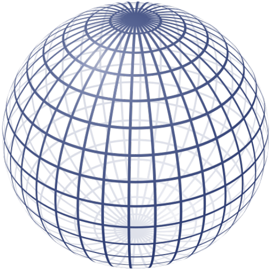
On a $F = h^{-1}(0)$. $\quad$ (*car* $h(z_1, z_2) = (z_2/z_1) = 0 \Leftrightarrow z_2 = 0$)



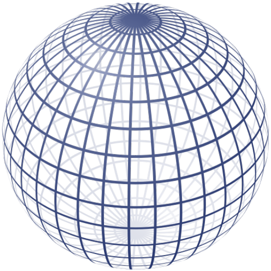
Remplissage de R^3 par des cercles liés



Qu'y a-t-il au-dessus des parallèles ?



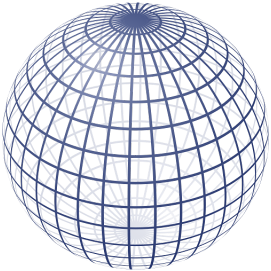
Qu'y a-t-il au-dessus des parallèles ?



Proposition

- $\sigma \circ h^{-1}(0) = h^{-1}(0) = F$

Qu'y a-t-il au-dessus des parallèles ?



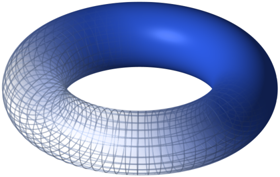
Proposition

- $\sigma \circ h^{-1}(0) = h^{-1}(0) = F$
- $\sigma \circ h^{-1}(\infty)$ *est l'axe des z.*

Projection stéréographique des fibres

Proposition

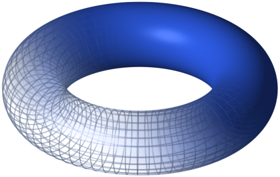
$\sigma \circ h^{-1}$ d'un parallèle est un torre !



Projection stéréographique des fibres

Proposition

$\sigma \circ h^{-1}$ d'un parallèle est un torre !



Démonstration.

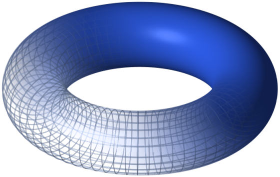
- $z \in F \Leftrightarrow |z| = 1 \quad (\text{pour } z \in \mathbb{CP}^1)$

□

Projection stéréographique des fibres

Proposition

$\sigma \circ h^{-1}$ d'un parallèle est un torre !



Démonstration.

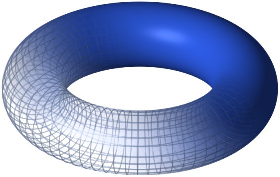
- $z \in F \Leftrightarrow |z| = 1 \quad (\text{pour } z \in \mathbb{CP}^1)$
- $h(z_1, z_2) \in F \Leftrightarrow (|z_2|/|z_1|) = 1 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$

$\square$

Projection stéréographique des fibres

Proposition

$\sigma \circ h^{-1}$ d'un parallèle est un torre !



Démonstration.

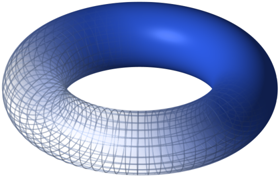
- $z \in F \Leftrightarrow |z| = 1 \quad (\text{pour } z \in \mathbb{CP}^1)$
- $h(z_1, z_2) \in F \Leftrightarrow (|z_2|/|z_1|) = 1 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$
- Donc $h^{-1}(F) = \{(z_1, z_2) \in S^3 : |z_1| = |z_2| = \sqrt{2}/2\}$

$\square$

Projection stéréographique des fibres

Proposition

$\sigma \circ h^{-1}$ *d'un parallèle est un torre !*



Démonstration.

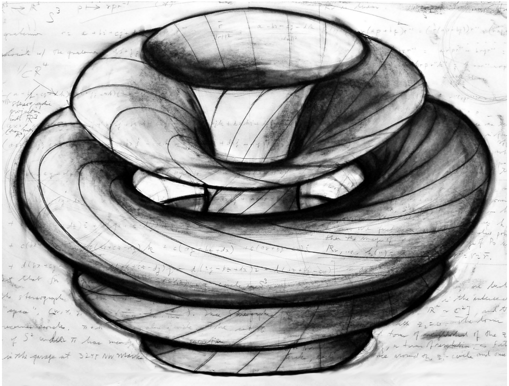
- $z \in F \Leftrightarrow |z| = 1 \quad (\text{pour } z \in \mathbb{CP}^1)$
- $h(z_1, z_2) \in F \Leftrightarrow (|z_2|/|z_1|) = 1 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$
- Donc $h^{-1}(F) = \{(z_1, z_2) \in S^3 : |z_1| = |z_2| = \sqrt{2}/2\} \cong S^1 \times S^1$

$\square$

Où sont ces torres ?

Proposition

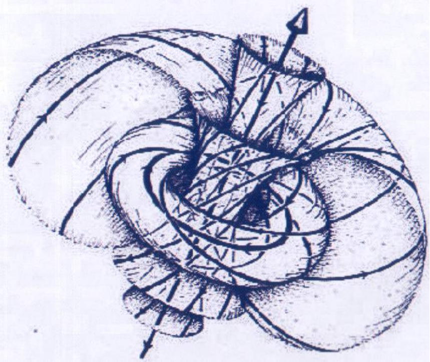
Ces torres sont emboîtés !



Où sont ces torres ?

Proposition

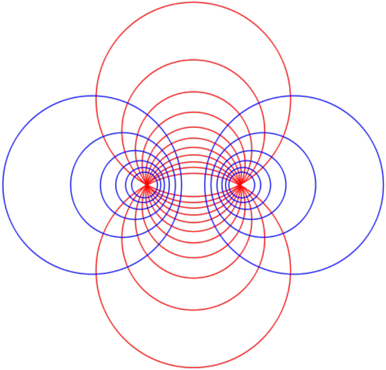
Ces torres sont emboîtés !



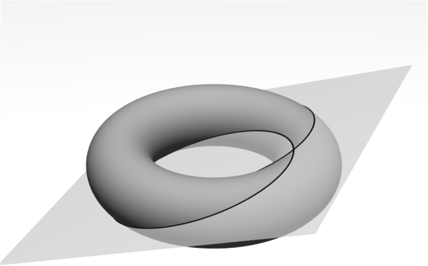
Où sont ces torres ?

Proposition

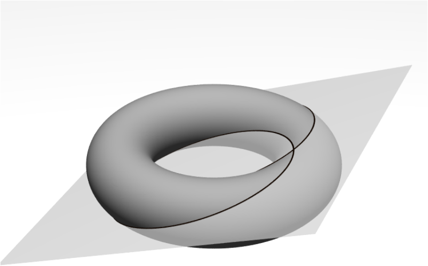
Ces torres sont emboîtés !



Les cercles de villarceau



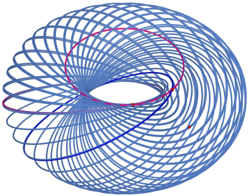
Les cercles de villarceau



Proposition

Soient P un parallèle de S^2 et $x \in P$. Alors $\sigma \circ h^{-1}(x)$ est cercle de villarceau de $\sigma \circ h^{-1}(P)$.

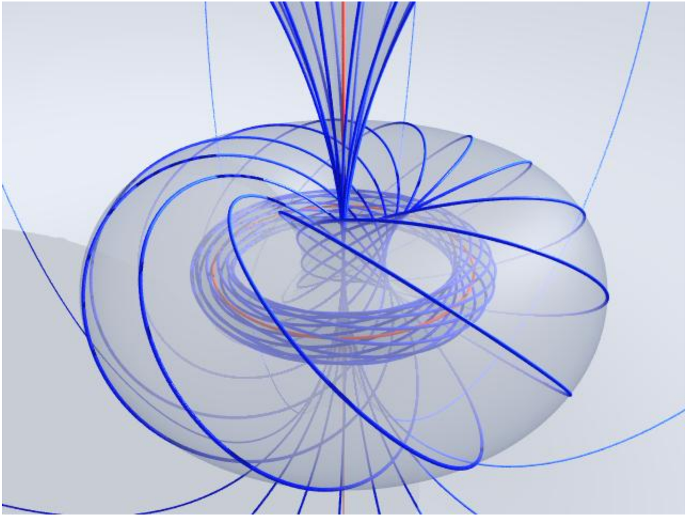
Les cercles de villarceau



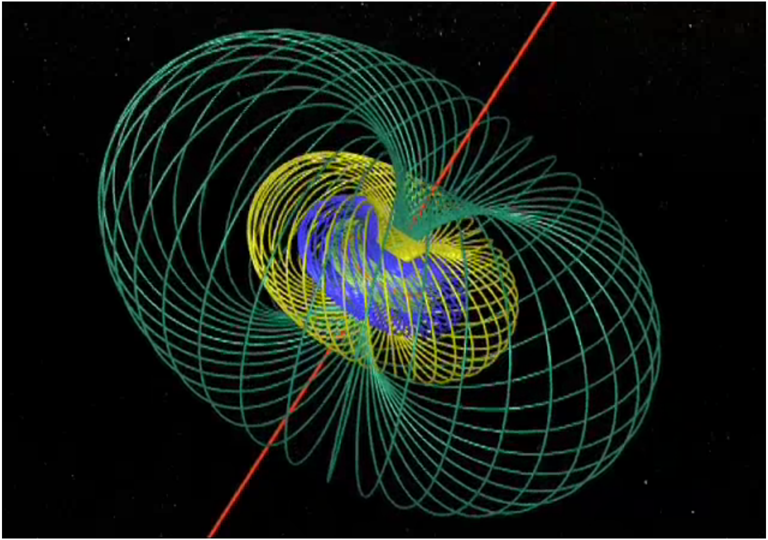
Proposition

Soient P un parallèle de S^2 et $x \in P$. Alors $\sigma \circ h^{-1}(x)$ est cercle de villarceau de $\sigma \circ h^{-1}(P)$.

Fibration de Hopf dans $\mathbb{R}^3$



Fibration de Hopf dans $\mathbb{R}^3$



S^3 comme l'union de deux torres solides

Théorème

$S^3 =$ *deux torres solides "collés" par leur bord (qui est un torre).*

S^3 comme l'union de deux torres solides

Théorème

$S^3 =$ *deux torres solides "collés" par leur bord (qui est un torre).*

Démonstration.

- $S^2 = H_N \cup H_S$;

$\square$

S^3 comme l'union de deux torres solides

Théorème

$S^3 =$ *deux torres solides "collés" par leur bord (qui est un torre).*

Démonstration.

- $S^2 = H_N \cup H_S$;
- H_N et $H_S \subset S^2$ sont l'union de leurs parallèles ;

$\square$

S^3 comme l'union de deux torres solides

Théorème

$S^3 =$ *deux torres solides "collés" par leur bord (qui est un torre).*

Démonstration.

- $S^2 = H_N \cup H_S$;
- H_N et $H_S \subset S^2$ sont l'union de leurs parallèles ;
- h^{-1} des parallèles sont des torres emboîtés ;

□

S^3 comme l'union de deux torres solides

Théorème

$S^3 =$ *deux torres solides "collés" par leur bord (qui est un torre).*

Démonstration.

- $S^2 = H_N \cup H_S$;
- H_N et $H_S \subset S^2$ sont l'union de leurs parallèles ;
- h^{-1} des parallèles sont des torres emboîtés ;
- Donc $h^{-1}(H_N)$ et $h^{-1}(H_S)$ sont des torres solides,

□

S^3 comme l'union de deux torres solides

Théorème

$S^3 =$ *deux torres solides "collés" par leur bord (qui est un torre).*

Démonstration.

- $S^2 = H_N \cup H_S$;
- H_N et $H_S \subset S^2$ sont l'union de leurs parallèles ;
- h^{-1} des parallèles sont des torres emboîtés ;
- Donc $h^{-1}(H_N)$ et $h^{-1}(H_S)$ sont des torres solides,
- D'où $S^3 = h^{-1}(S^2)$ est union de deux torres solides.

$\square$

S^3 comme l'union de deux torres solides

Théorème

$S^3 =$ *deux torres solides "collés" par leur bord (qui est un torre).*

Démonstration.

- $S^2 = H_N \cup H_S$;
- H_N et $H_S \subset S^2$ sont l'union de leurs parallèles ;
- h^{-1} des parallèles sont des torres emboîtés ;
- Donc $h^{-1}(H_N)$ et $h^{-1}(H_S)$ sont des torres solides,
- D'où $S^3 = h^{-1}(S^2)$ est union de deux torres solides.
- Mais H_N et H_S sont reliés par F

□

S^3 comme l'union de deux torres solides

Théorème

$S^3 =$ *deux torres solides "collés" par leur bord (qui est un torre).*

Démonstration.

- $S^2 = H_N \cup H_S$;
- H_N et $H_S \subset S^2$ sont l'union de leurs parallèles ;
- h^{-1} des parallèles sont des torres emboîtés ;
- Donc $h^{-1}(H_N)$ et $h^{-1}(H_S)$ sont des torres solides,
- D'où $S^3 = h^{-1}(S^2)$ est union de deux torres solides.
- Mais H_N et H_S sont reliés par F
- Et $h^{-1}(F)$ est un torre.

$\square$

Fin !